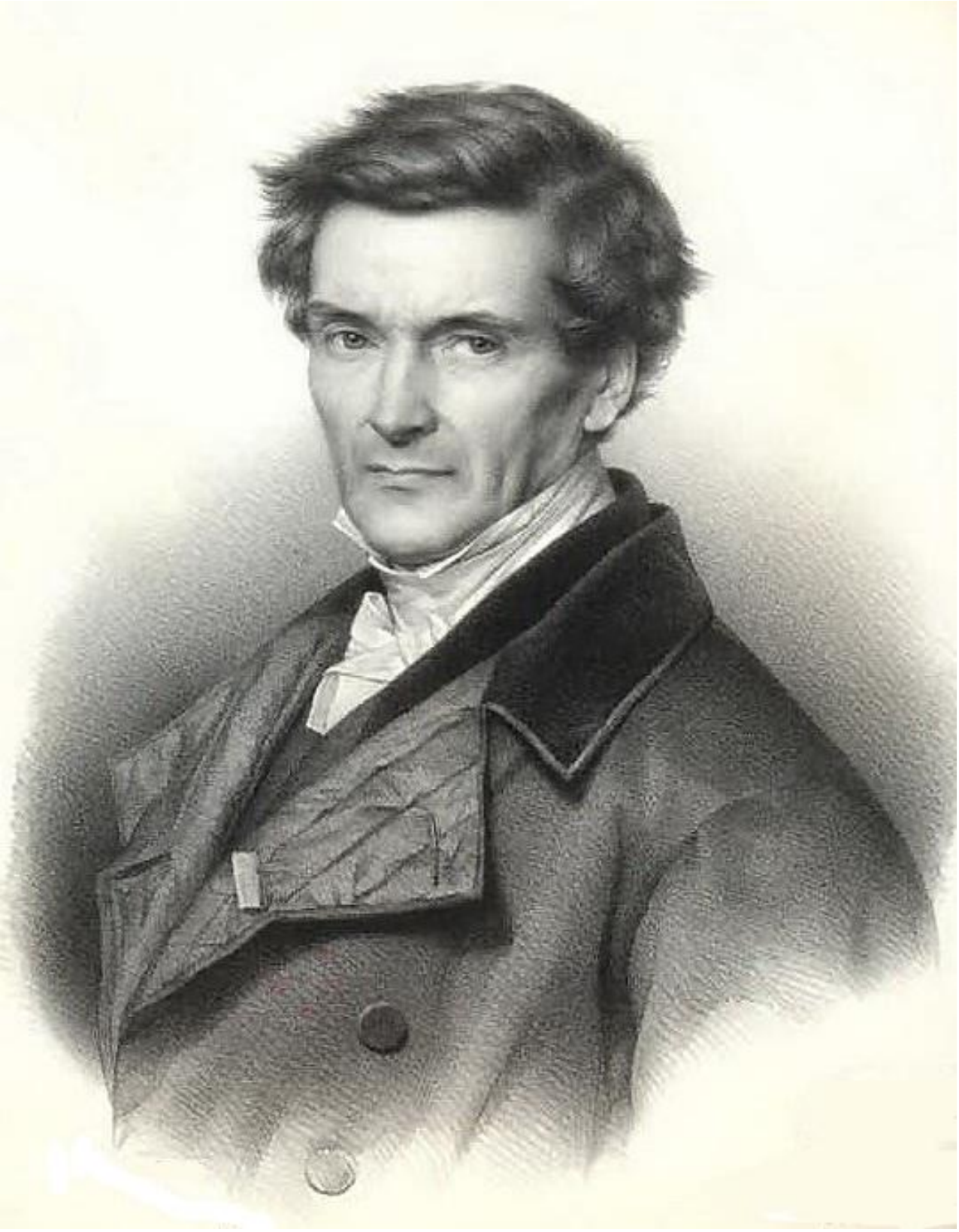


Математическая теория бильярда Г.Кориолиса в популярном изложении

Сергей Тихонов
Декабрь,2014

Введение

Всерьез заинтересовавшись бильярдом, я довольно быстро понял, что никто из посетителей «моей» бильярдной не сможет дать ответы на многочисленные вопросы, появлявшиеся один за другим, как грибы после дождя. И ответов не будет не потому, что люди что-то скрывают, утаивают, не хотят делиться. Ответить они просто не смогут – ведь у них нет багажа правильных знаний! Колотить-то по шарам многие «насобачились», аж звон стоит в ушах, но в головах – как была пустынька, так и есть. Причем, большинство даже и не стремится к тому, чтобы узнать что-то новое; их кредо – «Чего тут думать? Трясти надо!», как говорилось в стареньком анекдоте. Но есть и такие, кто хотел бы узнать, да нет возможности выудить эти знания: с одной стороны, их неоткуда (не от кого) взять, а с другой – не хватает образования. Ну да ладно, пусть другие сами решают, как заполнять пустоты в своих головах, а у меня есть проверенный временем рецепт, дающий практические результаты – нужно изучать литературу.

И прочтение первой же попавшейся мне книги по бильярдной тематике принесло свои плоды. Помню, что в название книжки (которая, по большому счету, оказалась никудышной) входили слова «секреты техники игры». Конечно же, ничего особенного по технике игры почерпнуть не удалось. А вот пара секретов открылась. Первый из них заключался в том, что родилось серьезное подозрение (которое со временем переросло в полную убежденность): современная (начала двухтысячных годов) русскоязычная литература по бильярду – низкосортное чтиво, сфабрикованное по принципу компиляции. Второй же секрет состоял в том, что Гаспар-Гюстав Кориолис, помимо прочих своих трудов, написал и в 1835 году опубликовал книгу «Математическая теория явлений бильярдной игры». Кто такой Кориолис, мне было известно еще со студенческих времен; и то, что из-под его пера вышла книга по теории бильярда, не могло меня не заинтересовать. Весьма важным фактом оказалось и то, что книга издана и в переводе на русский язык. Кстати, русскоязычная версия вышла в свет в 1956 году, а в переводе на английский появилась лишь только в 2005!

Дотошно изучив содержимое книги, я открыл немало интересного в новой для себя области динамики – бильярдной игре. Не ограничившись тем, что подробно представил Кориолис, я провел множество дополнительных расчетов (попутно вскрылись и некоторые огрехи – как у автора и переводчиков, так и при подготовке к типографскому виду), которые позволили заглянуть за пределы, установленные книгой. Например, при анализе движения прицельного шара удалось обнаружить и исследовать эффект сдвига траектории за счет трения между шарами. Годами позже я узнал, что зарубежные теоретики бильярда Рон Шепард и Дэвид Элсиэтор (он же – Доктор Дэйв) также изучали этот эффект и назвали его «отбросом прицельного шара».

Было приятно осознать, что мною это всё (включая возможности компенсации отклонения шара за счет придания прямого бокового вращения) уже самостоятельно пройдено. С помощью математических моделей Кориолиса я «пролопатил» плоские соударения шаров (без продольного вращения у битка) и разложил по полочкам игру свояков в отскок, а также прицеливание свояков разного типа. Из формул, которые теперь у меня были под рукой, стало прозрачным – в каких игровых позициях трение между шарами создает ввинчивающееся боковое вращение битка и прицельного шара, а в каких – вывинчивающееся. Чтобы дальше не плодить лишних слов, коротко констатирую, что работа Кориолиса позволила заложить основы понимания физики и математики в бильярде. В конце концов, эта книга стала для меня чем-то вроде любимого подручного справочника. Я и сейчас отношусь к ней с особым чувством – в нем есть и уважение, и теплота, и даже гордость за моего учителя-теоретика в бильярде, которым заочно стал Г.Кориолис. И это – несмотря на то, что в обсуждаемой книге далеко не все оказалось гладким, кое-что представляется спорным, а некоторые аспекты изложения просто ошибочны.

В начале 20 века А.И.Леман говорил, что о книге Кориолиса «больше знают понаслышке». И представляется, что для того существовала объективная причина: трудно было добраться до первоисточника – ведь в те времена до ксерокса, а уж до интернета и подавно, было ох как далеко. Это сейчас только ленивый (или кривящий душой) человек может сослаться на то, что не читал труд Кориолиса потому, что его нет в наличии. Но, тем не менее, книгу как не читали до революции, так не читают и до сих пор. И здесь уже причины – совсем иные. Во-первых, наша страна давным-давно утратила статус «самой читающей в мире». А во-вторых, большинство из тех, кто потенциально хотел бы изучить работу Кориолиса, просто не имеют достаточного математического образования. Нельзя сказать, что в книге представлено что-то исключительно заумное, но чтобы всё понять, читатель должен прочно владеть основами математического анализа.

Несколько лет назад ко мне пришло соображение – а почему бы не «переписать» книгу Кориолиса так, чтобы с ее содержимым вполне мог ознакомиться человек, не имеющий высшего технического образования? И вот теперь руки дошли до реализации этой задумки.

Чтобы изложить теорию бильярда Кориолиса «на пальцах», я изъял из исходного текста все выводы формул. Попутно, исчезли и термины высшей математики. Помимо этого, я не стал включать в «новый» текст всё то, что касалось графического построения траекторий шаров, перемещающихся по поверхности бильярдного стола. Этого у Кориолиса – в достатке, если не сказать, что в избытке; но в наш компьютеризированный век, построения с помощью циркуля и линейки практически утратили свою актуальность. Естественно, при таком купировании мне пришлось часть исходного текста переписать по-иному, а кое-что и добавить. Все то, что хоть как-то отличается от текста Кориолиса, я представил шрифтом синего цвета, а оставшийся авторский текст – черным цветом.

Итак, я свою работу сделал, и надеюсь, что теперь каждый человек, закончивший среднюю школу, сможет прочитать и понять труд Г.Кориолиса – было бы у него только желание. Удачи Вам и успехов!

Предисловие автора

В связи с бильярдной игрой в ее современном развитии благодаря применению киев, которые могут сообщить шарам достаточно сильное вращательное движение, возникают различные динамические задачи, решение которых содержится в этом произведении. Я думаю, что люди, знающие теоретическую механику, вроде учеников Политехнической школы, с интересом познакомятся с объяснениями всех оригинальных явлений, которые можно наблюдать во время движения бильярдных шаров.

После того как я наблюдал эти явления в игре знаменитого игрока Менго, я постарался дать для них математический расчет. В то время (уже довольно давно) я получил результаты, которые изложены в первой и в восьмой главах этого произведения. После этого я дополнительно рассмотрел вопросы, относящиеся специально к удару шаров при наличии трения.

Я очень обязан г. Менго, во время игры которого я мог удостовериться, что формулы и получающиеся из них геометрические построения дают результаты, согласные с опытом.

Один из руководителей Политехнической школы г. де Толозе (de Tholozé) обратил мое внимание на некоторые сложные удары, которые я мог объяснить при помощи моей теории.

Господин Пуассон (Poisson) в новом издании своего курса механики рассмотрел действие трения на прямолинейно движущийся шар; эта задача представляет частный случай той, которую приходится решать в теории бильярдной игры. Сын знаменитого Эйлера изучал движение шара на плоскости, учитывая только трение скольжения. Его мемуар, с которым я ознакомился уже по окончании моего труда, находится в сборнике трудов Берлинской академии за 1758 год. Здесь общим с моим трудом является только одно положение, которое я даю в первой главе в более простом виде; оно заключается в том, что линия, описываемая центром шара, является параболой, если на шар действует лишь сила трения скольжения. Вышеупомянутый математик не дал теории, которая бы объясняла, хотя бы с учетом обоих видов трения, движение шара, когда под конец шар начинает катиться. Что же касается действия трения при ударе шаров друг о друга и о борт, а также всего относящегося к удару шара наклонным кием, то я не думаю, чтобы до сего времени кто-либо занимался этими вопросами.

Я думал, что некоторые люди, которые не захотят вникать в подробности доказательств и вместе с тем обладают достаточными математическими познаниями, чтобы понимать язык этой науки и основные ее обозначения, будут рады найти отдельное изложение правил и построений, получающихся из теории, почему я и поместил его в начале книги *(в русскоязычном же переводе эта часть, наоборот, размещена в конце)*. Что касается читателей, которые хотели бы скорее рассмотреть эти вопросы с математической точки зрения, то они могут пропустить это изложение, так как в дальнейшем оно воспроизводится в книге с доказательствами.

Изложение основ теории и построений, объясняющих движение шаров

Я начну с определения некоторых терминов и с установления главных обозначений, которыми буду пользоваться.

Свой шар – шар, по которому наносят удар кием. Иное название этого шара – «биток».

Противостоящий шар – неподвижный шар, в который ударяет свой шар. В современном бильярде этот шар называют «прицельным».

Точка опоры шара – точка, которой шар касается сукна и в которой приложена сила трения. На самом деле, шар соприкасается со столом не в единственной точке, а по некоторой поверхности. При теоретических же изысканиях, для упрощения полагают, что контакт является точечным, а точка соприкосновения с сукном располагается в самом низу шара – в точке его поверхности, расположенной точно под центром шара.

Верхняя точка шара – точка диаметрально противоположная точке опоры, верхняя точка вертикального диаметра шара.

Верхний центр удара – точка, лежащая на вертикали, проходящей через центр шара и расположенная над центром шара на расстоянии 2/5 радиуса.

Точка удара – точка соприкосновения шаров в мгновение удара. *(Помимо этого, точкой удара Кориолис также называет место соприкосновения наклейки и битка при нанесении удара кием.).*

Ось вращения – прямая линия, проходящая через центр шара, относительно которой вращается шар. Если шар вращается, то в конкретный момент времени он поворачивается вокруг единственной линии, называемой «мгновенной осью вращения». Но можно формально рассматривать вращение шара и как составное: в виде наложения друг на друга независимых поворотов вокруг трех осей – вертикальной, продольной (направленной по вектору поступательной скорости) и поперечной (направленной параллельно плоскости стола и перпендикулярно продольной оси). Поворот вокруг вертикальной оси называется боковым вращением, вокруг продольной оси – поперечным вращением, а вокруг поперечной оси – продольным вращением.

Направление оси вращения – направление линии, проходящей по оси вращения и исходящей из центра шара, в ту сторону, с которой вращение наблюдается по ходу часовой стрелки. Например, если шар не обладает боковым вращением и катится без скольжения по столу, удаляясь от игрока, то направление оси вращения совпадает с направлением горизонтального радиуса шара, проведенного из центра вправо.

Вращательная скорость точки опоры – скорость точки опоры шара в его относительном вращении вокруг центра шара. Имеется в виду мгновенная величина линейной скорости точки опоры, обусловленной лишь вращением шара относительно своего центра. Величина этой скорости равна угловой скорости вращения шара (углу поворота за единицу времени), умноженной на величину радиуса.

Прямое вращение – вращение в таком направлении, при котором вращательная скорость опорной точки направлена против поступательной скорости центра шара. В

современном бильярдном лексиконе такое вращение обычно называют «верхним». При наличии верхнего вращения, шар продольно вращается в ту же сторону, что и перемещается поступательно.

Обратное вращение – вращение в таком направлении, при котором вращательная скорость опорной точки направлена так же, как и поступательная скорость центра шара. В современном бильярдном лексиконе такое вращение обычно называют «нижним». При наличии нижнего вращения, шар продольно вращается в сторону, противоположную поступательному перемещению.

Состояние скольжения – состояние, в котором находится шар в мгновение, когда вращательная скорость точки опоры равна нулю, то есть когда ось вращения вертикальна, или же когда скорость вращения равна нулю. В этом определении имеется в виду состояние чистого скольжения – как без прямого (верхнего), так и без обратного (нижнего) вращения шара в этот конкретный момент. Обычно же, когда говорят о скольжении шара, подразумевают то, что точка его опоры проскальзывает относительно сукна. А это бывает всегда, когда вращательная скорость точки опоры не равна скорости поступательного перемещения шара, т.е. когда шар не находится в состоянии естественного качения.

Финальное состояние шара – состояние, в котором находится шар, когда он катится по сукну прямолинейно без скольжения (т.е. когда шар находится в состоянии естественного качения; используя слово «финальное», Кориолис подчеркивает, что если шар, движущийся с проскальзыванием точки опоры по сукну, не встретит на своем пути препятствий, то впоследствии **всегда** перейдет к режиму прямолинейного естественного качения). Вращательная скорость опорной точки в этом случае равна и прямо противоположна поступательной скорости центра шара. В этом финальном состоянии поступательная и вращательная скорости меняются настолько незначительно, что их можно считать постоянными. Действительно, рассматривая движение битка до первого соударения с прицельным шаром или движение шаров после их соударения до лузы, борта или других шаров, в подавляющем большинстве случаев можно для простоты пренебрегать изменениями поступательных и вращательных (или вместо них – угловых) скоростей. Однако, при рассмотрении движения шаров непосредственно перед их остановкой, таким упрощением пользоваться некорректно.

Финальное направление – направление движения шара, находящегося в финальном состоянии.

Переменное состояние шара – состояние, в котором находится шар на всем этапе своего движения до перехода к финальному состоянию; при переменном состоянии шара точка опоры скользит, а, следовательно – трется о сукно. При этом поступательная и вращательная скорости меняются очень быстро, пока не достигнут одновременно финальных значений. Характеризуя движение словами «переменное состояние», Кориолис подчеркивает, что величины скоростей постоянно изменяются, и этими изменениями пренебрегать нельзя.

Угол начального отклонения – угол, который образует направление движения своего шара (вектор поступательной скорости битка) перед ударом о противостоящий шар с направлением непосредственно после удара.

Угол финального отклонения – угол, между вектором поступательной скорости своего шара в финальном состоянии (в которое приходит биток после соударения с прицельным шаром) и направлением движения битка непосредственно перед соударением.

Теперь приведем основные обозначения, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

M' – масса кия; она бывает обычно в три раза больше массы шара (для Русского Биллиарда (РБ) это не так).

V' – скорость кия перед ударом по шару (битку).

R – радиус шара.

M – масса шара.

$\mathbf{V_1}$ – начальная скорость центра шара, то есть та скорость, которую он получает непосредственно после удара кием (здесь и далее для обозначения векторов использован **жирный** шрифт).

$\mathbf{V_0}$ – начальная скорость центра шара для той же скорости кия, когда линия удара проходит через центр шара.

$\mathbf{V}$ – скорость центра шара в любое мгновение его движения.

$\mathbf{V_a}$ – абсолютная скорость точки шара, совпадающей с точкой опоры.

$\mathbf{V_r}$ – относительная скорость точки опоры шара в его вращательном движении по отношению к центру; таким образом, абсолютная скорость $\mathbf{V_a}$ есть результирующая скоростей $\mathbf{V_r}$ и $\mathbf{V}$.

$\boldsymbol{\upsilon}$ – относительная вращательная скорость точки, находящейся на вертикальном диаметре шара на расстоянии 2/5 радиуса над центром шара, то есть – точки, которую мы назвали верхним центром удара. Эта скорость υ равна $\frac{2}{5}V_r$ и противоположна скорости $\mathbf{V_r}$. При вращении шара, для любой его точки (как на поверхности, так и внутри), за исключением точки, расположенной точно в центре, можно вычислить вращательную скорость, представляющую собой мгновенную линейную скорость, обусловленную вращением вокруг центра шара. Понятно, что такая вращательная скорость будет тем больше по величине, чем дальше от центра расположена рассматриваемая точка – ведь значение вращательной скорости есть не что иное, как произведение угловой скорости вращения шара (одинаковой для всех точек) на удаление интересующей точки от его центра. Отсюда и следует упомянутое выше равенство $\upsilon = \frac{2}{5}V_r$.

Начальные значения скоростей будут всегда обозначаться нижними индексами 1.

y – измеренное по прямой расстояние, пройденное шаром с того мгновения, когда он получил удар кием, и до любого рассматриваемого момента времени; при этом предполагается, что шар движется по прямой линии.

y_2 – измеренное по прямой расстояние, пройденное шаром из исходного положения до той точки траектории, в которой он пришел в финальное состояние (стал

катиться).

y_0 – расстояние до точки, в которой шар пришел в состояние скольжения.

p, q и r – проекции вектора угловой скорости вращения шара на оси $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ неподвижной прямоугольной системы координат, заданной следующим образом: начало системы расположено в точке, совпадающей с положение центра шара в начальный момент времени; ось $\mathbf{y}$ проходит параллельно игровой поверхности и направлена в ту же сторону, в которую перемещается шар (в частном случае, положительное направление оси $\mathbf{y}$ может совпадать с начальным направлением поступательного перемещения шара; именно такое направление и будет использоваться далее); ось $\mathbf{z}$ направлена вверх перпендикулярно плоскости бильярда; ось $\mathbf{x}$ дополняет систему $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ до правой системы координат – она параллельна игровой поверхности и направлена вправо при взгляде от игрока. Таким образом, величины p, q и r представляют собой угловые скорости вращений шара относительно осей $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$, соответственно. В современных теоретических работах по бильярду угловую скорость вращения шара обычно обозначают символом $\boldsymbol{\omega}$, а угловые скорости p, q и r – символами ω_x, ω_y и ω_z. Иными словами, $p = \omega_x$, $q = \omega_y$, $r = \omega_z$.

l – высота над плоскостью бильярда той точки, в которой линия удара встречает вертикальную плоскость, проведенную через центр шара перпендикулярно к вертикальной плоскости удара. При горизонтальном ударе (когда в момент касания с битком продольная ось кия параллельна плоскости стола) величина l совпадает с высотой (удалением от игровой поверхности) точки удара, т.е. той точки, в которой соприкасаются наклейка и биток.

h – расстояние между вертикальной плоскостью удара и центром шара. Это расстояние считается положительным или отрицательным в зависимости от того, как расположена эта плоскость при взгляде от игрока – справа или слева от центра шара.

a – кратчайшее расстояние от линии удара до центра шара. Если удар кия направлен горизонтально, то $a^2 = (l - R)^2 + h^2$.

ψ_0 – угол начального отклонения.

ψ – угол финального отклонения.

f – коэффициент трения скольжения между шаром и бильярдным сукном во время движения шара; иными словами, этот коэффициент равен отношению силы трения к весу шара. Опытом найдено, что для обычного покрытия бильярдной плоскости $f = 0.25$. Этот коэффициент должен несколько меняться в зависимости от покрытия, но очень значительных отклонений от величины, полученной в наших опытах, не обнаружено.

f_1 – коэффициент трения между шаром и покрытием во время удара о борт, или во время удара шара о бильярдную плоскость при наклонном ударе кием. Для удара о борт этот коэффициент оказался равным 0.20.

f' – коэффициент трения между двумя шарами во время соударения. Этот

коэффициент очень мал и не превышает 0.03. По поводу того, что этот коэффициент ограничен указанной величиной, Кориолис не прав. Более того, современные исследования показывают, что значение коэффициента трения между шарами существенно возрастает при малых скоростях движения битка. При скоростях же, превышающих 3.5÷4 м/с, этот коэффициент, действительно, можно считать постоянным. Но откуда это было знать Кориолису в те давние времена?

θ – доля общей живой силы (**кинетической энергии**) кия и шара, которая теряется при их соударении. Опыт показывает, что величина θ может считаться постоянной и равной 0.13.

ε – доля составляющей поступательной скорости шара, перпендикулярной к борту, которая восстанавливается после удара шара о борт. Это значение очень близко к 0.55 для большого количества испытанных бортов, но несколько изменяется в зависимости от скорости шара: оно равно 0.50 для скорости 7 м/с – предельной скорости шаров на бильярде, и 0.60 для очень малых скоростей, меньших 1 м/с. В последнее время величину ε чаще называют «коэффициентом восстановления» или «эластичностью по отскоку». Значение 0.55 показывает, что при ударе о борт шар утратит 45 процентов нормальной компоненты (направленной поперечно борту) своей поступательной скорости.

Глава 1

Движение шара по горизонтальной плоскости с трением

Мы начнем с изучения движения шара по плоскости с трением, рассматривая это движение как получающееся в результате сложения некоторых начальных скоростей – поступательной и вращательной.

В следующих главах мы рассмотрим, каким образом на эти начальные скорости и, следовательно, на движение шара влияют удар кия и удар шаров как друг о друга, так и о борта; только в этой второй части в качестве следствий из теории выводятся правила относительно того, как следует давать удар кием, чтобы получать желаемые результаты.

В первую очередь мы разберем здесь достаточно известную теорию движения твердого тела, но сразу же будем применять ее к шару для того, чтобы получить прямым путем уравнения его движения.

Так как мы предполагаем, что шар однороден и имеет совершенно точную сферическую форму, то нет необходимости учитывать его вес, действие которого полностью уничтожается *(имеется в виду то, что силе тяжести противодействует равная ей по величине, но противоположно направленная сила реакции опоры)*; нужно только учитывать те силы, которые возникают от трения. Для абсолютной точности мы должны учитывать два рода трения: первое – трение скольжения, которое проявляется, когда шар скользит по сукну бильярда, и второе, которое можно назвать трением качения. Оно имеет место независимо от скольжения между соприкасающимися поверхностями, происходит вследствие прогиба, который испытывает

поверхность бильярда от веса шара и дает силу, которая действует по направлению, образующему некоторый угол с вертикалью; горизонтальная составляющая этой силы имеет направление, противоположное скорости центра шара. Таким образом, в то время как трение скольжения действует противоположно скорости скольжения по сукну опорной точки шара, горизонтальная сила, происшедшая от трения качения, направлена прямо противоположно скорости центра шара. Так как последнее трение представляет лишь очень незначительную долю первого, то мы могли бы, не делая ошибки, пренебречь им в приложениях теории к бильярдной игре. Однако в начальных стадиях нашего исследования мы этого не сделаем и соединим обе эти силы трения в одну. *(Говоря об «**абсолютной** точности», Кориолис, конечно же, несколько преувеличивает; так, принимая во внимание трения скольжения и качения, он ни словом не обмолвился о том, что при движении шара проявляет себя и так называемое трение верчения, противодействующее вращению вокруг вертикальной оси).*

Далее Кориолис составляет уравнения безотрывного движения центра масс шара по столу (в плоскости $\mathbf{xy}$) и вращения вокруг центра масс, представляя силу трения в общем виде, но предполагая, что она приложена исключительно в точке опоры. Комбинируя эти уравнения и исключая из них компоненты силы трения, он получил два простейших дифференциальных уравнения. Без труда найдя их аналитическое решение, Кориолис выразил канонические соотношения, связывающие поступательные скорости шара и относительные вращательные скорости верхнего центра удара в любой момент времени при движении со скольжением по сукну:

$$\begin{cases} \mathrm{V}_x + \upsilon_x = \mathrm{V}_{1_x} + \upsilon_{1_x}, \\ \mathrm{V}_y + \upsilon_y = \mathrm{V}_{1_y} + \upsilon_{1_y}. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь V_x, V_y – проекции поступательной скорости шара $\mathbf{V}$ на оси $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$; υ_x, υ_y – проекции вращательной скорости $\boldsymbol{\upsilon}$ на оси $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$; V_{1_x}, V_{1_y} – начальные поступательные скорости шара по осям $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$; υ_{1_x}, υ_{1_y} – начальные вращательные скорости шара по осям $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Величины υ_x, υ_y связаны с угловыми скоростями p, q следующим образом:

$$\begin{cases} \upsilon_x = -\frac{2}{5}\mathrm{Rq}, \\ \upsilon_y = +\frac{2}{5}\mathrm{Rp}. \end{cases} \tag{s1}$$

Тем, кто не ограничится знакомством с этим текстом и захочет «погрузиться» в первоисточник, следует обратить внимание на то, что в некоторых соотношениях (в (s1) – в частности), переводчик допустил серьезные «ляпы» (да и в прижизненных изданиях Кориолиса они тоже наблюдаются).

Соотношения (5) весьма важны для понимания того, что происходит с шаром при движении по столу со скольжением. *Во-первых*, следует отметить, что связи (5) можно

применять как при движении шара по прямолинейной траектории, так и в случаях криволинейного перемещения шара. *Во-вторых*, если ось $\mathbf{y}$ направить точно по вектору начальной поступательной скорости $\mathbf{V_1}$, и рассматривать движение шара по прямой линии, то система (5) вырождается в единственное уравнение

$$\mathrm{V}_y + \upsilon_y = \mathrm{V}_{1_y} + \upsilon_{1_y}\,. \qquad \text{(s2)}$$

В-третьих, из (5) видно, что при рассмотрении конкретного случая движения шара, правые части уравнений представляют собой постоянные значения. А это значит, что **сумма поступательной и вращательной скорости центра удара постоянна в любой момент движения шара со скольжением**. Отсюда, в частности, следует, что если шар перемещается с уменьшением поступательной скорости и обладает прямым (верхним) вращением ($\upsilon_y > 0$), то интенсивность (угловая скорость) этого вращения возрастает. Если же при движении с уменьшением поступательной скорости шар имеет обратное (нижнее) вращение ($\upsilon_y < 0$), то это вращение замедляется – постепенно шар полностью утрачивает нижнее вращение, а затем приобретает верхнее, которое непрерывно ускоряется вплоть до перехода к естественному качению. Наконец, ***в четверых***, нетрудно заметить, что в (5) отсутствуют величины, связанные с боковым вращением шара – вокруг вертикальной оси. А это значит, что боковое вращение никоим образом не влияет на поступательное перемещение шара (на скорости и вид траектории) и на его продольное и поперечное вращения. Боковое вращение проявляет себя лишь при соударениях шаров и при контактах шара с бильярдным бортом. Если говорить строго, то этот результат, следующий из анализа Кориолиса, не соответствует действительности, и современные научные работы это доказывают. Однако, **с очень высокой точностью можно все-таки допускать независимость движения шара от его вращения вокруг вертикальной оси**.

С учетом того, что шар переходит к естественному качению, когда выполняются равенства

$$\upsilon_x = \tfrac{2}{5}\,\mathrm{V}_x\,,\ \upsilon_y = \tfrac{2}{5}\,\mathrm{V}_y\,, \qquad \text{(s3')}$$

из (5) Кориолис легко определил поступательные скорости V_{2_x} и V_{2_y} в момент перехода шара к финальному состоянию:

$$\mathrm{V}_{2_x} = \tfrac{5}{7}\left(\mathrm{V}_{1_x} + \upsilon_{1_x}\right),\ \mathrm{V}_{2_y} = \tfrac{5}{7}\left(\mathrm{V}_{1_y} + \upsilon_{1_y}\right). \qquad \text{(6)}$$

Так как из (s3') следует

$$\upsilon_{2_x} = \tfrac{2}{5}\,\mathrm{V}_{2_x}\,,\ \upsilon_{2_y} = \tfrac{2}{5}\,\mathrm{V}_{2_y}\,, \qquad \text{(s3)}$$

то с помощью (6) можно легко найти и финальные вращательные скорости:

$$\upsilon_{2_x} = \frac{2}{7}\left(V_{1_x} + \upsilon_{1_x}\right), \upsilon_{2_y} = \frac{2}{7}\left(V_{1_y} + \upsilon_{1_y}\right). \qquad \text{(s4)}$$

С помощью величин поступательных скоростей V_{2_x} и V_{2_y} можно определить тангенс угла финального отклонения, а значит – и сам угол ψ:

$$\operatorname{tg}\psi = V_{2_x} / V_{2_y}\ . \qquad \text{(s5)}$$

Таким образом, зная начальные скорости V_{1_x}, V_{1_y}, υ_{1_x}, υ_{1_y}, при помощи соотношений (6), (s4), (s5) можно определить величины финальных скоростей и угол финального отклонения шара. Однако, для проведения моделирующих расчетов, этого недостаточно. Например, соударение шара с чем-либо или его попадание в лузу может произойти до того, как наступит естественное качение. А кроме того, необходимо уметь рассчитывать не только скорости, но и координаты точек траектории в любой требуемый момент времени, включая координаты финальной точки. Далеко не лишним будет и знать – сколько времени заняло движение шара со скольжением. В этих целях, в дальнейшем Кориолис пренебрегает действием трения качения (на самом деле, нельзя сказать, что он и до этого его учитывал). Ученый не дает никаких численных оценок, а просто, основываясь на личном опыте, говорит, что трение качения мало по сравнению с трением скольжения. И в этом он не ошибается – современные исследования показали, что сила трения качения почти на два порядка меньше силы трения скольжения.

Используя тот факт, что сила трения скольжения действует по направлению, противоположному скорости точки, касающейся сукна, Кориолис нашел выражения для косинусов углов α и β, определяющих направление действия трения. Угол α расположен между вектором абсолютной скорости точки опоры шара $\mathbf{V_a}$ (т.е. результирующей скорости при одновременном поступательном перемещении опоры вместе с шаром и повороте шара относительно своего центра) и осью $\mathbf{x}$. Угол β расположен между вектором $\mathbf{V_a}$ и осью $\mathbf{y}$. Указанные направляющие косинусы определяются зависимостями

$$\cos\alpha = \left(V_x - \frac{5}{2}\upsilon_x\right) / V_a\ , \cos\beta = \left(V_y - \frac{5}{2}\upsilon_y\right) / V_a\ , \qquad \text{(s6)}$$

а величина V_a – соотношением

$$V_a = \sqrt{\left(V_x - \frac{5}{2}\upsilon_x\right)^2 + \left(V_y - \frac{5}{2}\upsilon_y\right)^2}\ . \qquad \text{(s7)}$$

С помощью несложного анализа Кориолису удалось прийти к очень важному выводу. Он пишет: Итак, мы приходим к одному замечательному следствию, а именно: *при движении однородного шара по горизонтальной плоскости с трением*

скольжения направление силы трения не изменяется во время движения. Отсюда следует, что значения $\cos\alpha$, $\cos\beta$ постоянны при движении шара, и их можно определить, воспользовавшись значениями скоростей не только в текущий момент времени (при перемещении по траектории), но и в момент начала движения:

$$\cos\alpha = \left(V_{1_x} - \frac{5}{2}\upsilon_{1_x}\right) / V_{1_a}\,,\ \cos\beta = \left(V_{1_y} - \frac{5}{2}\upsilon_{1_y}\right) / V_{1_a}\,, \tag{s8}$$

$$V_{1_a} = \sqrt{\left(V_{1_x} - \frac{5}{2}\upsilon_{1_x}\right)^2 + \left(V_{1_y} - \frac{5}{2}\upsilon_{1_y}\right)^2}\,. \tag{s9}$$

Постоянство направления действующей на шар силы привело к тому, что не поддающиеся точному аналитическому решению нелинейные дифференциальные уравнения движения центра масс шара (во всяком случае, до сих пор таких решений найдено не было) преобразовались к простейшему виду, и решить их смог бы любой студент, знакомый с основами математического анализа. Решение таково:

$$V_x = V_{1_x} - fgt\cos\alpha\,, \tag{s10}$$

$$V_y = V_{1_y} - fgt\cos\beta\,, \tag{s11}$$

$$x = V_{1_x}t - \frac{1}{2}fgt^2\cos\alpha\,, \tag{s12}$$

$$y = V_{1_y}t - \frac{1}{2}fgt^2\cos\beta\,, \tag{s13}$$

где g – ускорение свободного падения; t – время, прошедшее от начала движения шара до текущего момента; x, y – координаты центра шара в системе $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$.

Из (s10) – (s13) видно, что с течением времени поступательная скорость изменяется линейно, а координаты (удаление шара от начального местоположения) – квадратично. Это значит, что в общем случае шар движется по одной из простейших плоских кривых – параболе, для которой характерна квадратичная зависимость одной координаты от другой. В частных же случаях парабола может вырождаться в прямую линию.

Из (s10), (s11) с помощью (6), (s4) и (s9) путем несложных преобразований выражается время t_2, прошедшее с начала движения до момента перехода шара к финальному состоянию (естественному качению по прямой линии):

$$t_2 = \frac{2}{7}\,\frac{V_{1_a}}{fg}\,. \tag{s14}$$

Подобным же образом, но с привлечением и зависимостей (s12), (s13), определяются и координаты финальной точки траектории:

$$x_2 = \frac{12}{49}\,\frac{V_{1_a}}{fg}\left(V_{1_x} + \frac{5}{12}\upsilon_{1_x}\right), \tag{s15}$$

$$y_2 = \frac{12}{49}\,\frac{\mathrm{V}_{1a}}{\mathrm{fg}}\left(\mathrm{V}_{1_y} + \frac{5}{12}\upsilon_{1_y}\right). \qquad \text{(s16)}$$

Анализируя полученные зависимости, Кориолис пришел к выводу: *в финальном положении ось вращения находится в вертикальной плоскости, перпендикулярной к направлению финальной скорости центра шара.* Это значит, что после прекращения скольжения шар будет естественно катиться по прямолинейной траектории, и при этом, в общем случае, он может одновременно обладать двумя вращениями – верхним и боковым. Если рассматривать найденную финальную точку в качестве начальной точки следующего этапа движения, то катящийся без бокового вращения шар, будет вращаться вокруг оси **x**. Если же при этом шар будет дополнительно иметь боковое вращение (вокруг оси **z**), то реальная «общая» ось вращения будет расположена где-то в плоскости **xz**. Именно об этом и сказал Кориолис. Такое движение шара называется качением с наклонной осью. Причем, следует отметить, что эта ось вращения будет тем сильнее наклонена к оси **z**, чем интенсивнее будет боковое вращение по отношению к верхнему вращению.

Чтобы наглядно убедиться в сказанном выше, можно воспользоваться шаром, имеющим на своей поверхности полоску, нанесенную по большому кругу. Например, можно попробовать отыскать шар с двумя перекрещивающимися полосами, который в относительно недавнем прошлом использовался в качестве битка при игре в Русский Биллиард. Можно взять и подходящий шар из тренировочного комплекта. Ну а в крайнем случае, придется довольствоваться шаром для игры в Пул, уж их-то в бильярдных – пруд пруди. Допустим, что у Вас в наличии оказался красно-белый шар, подобный тому, что приведен на рисунке. Его можно поставить на стол так, что линия раздела цветов будет расположена посредине между вертикальным и горизонтальным направлениями. Если нанести удар кием, попав в разделяющую полоску над центром на высоте, равной двум пятым радиуса, и смотреть на удаляющийся шар, то линия раздела цветов будет казаться неподвижной. Естественно, нужно точно установить шар и точно попасть именно туда, куда нужно. После указанного удара шар сразу же придет в состояние естественного качения (об этом внимательный читатель, осиливший предыдущие страницы, мог бы догадаться и сам – но ничего, ниже об этом речь еще пойдет). Именно в состоянии качения и возможно наблюдать обсуждаемый эффект. Кстати, вполне возможно, что какие-нибудь «жучилы» разводят доверчивых любителей бильярда на легкие деньги, выполняя на спор столь «удивительный» фокус. Не попадайтесь на такую удочку – потренируйтесь немного самостоятельно, и все окажется вполне приземленным, доступным не только «небожителям».

Для того чтобы дать численные примеры на формулы, найденные в этой главе, я произвел опыты, имевшие целью определить скорость, которую может получить шар от удара кием, нанесенного по направлению, проходящему через центр.

Ударив горизонтально шар обычной величины, подвешенный на нити длиной около 2 м, я заметил, что при ударе кием, который дает средний игрок (но не при более сильном ударе, который могли бы дать некоторые игроки), шар поднимался по вертикали приблизительно на 1.20 м, причем для очень сильного удара кием высота подъема могла доходить до 2.50 м. Таким образом, если через V_0 обозначить начальную скорость центра шара, то для обычного удара будем иметь (*по известной формуле Галилея*): ${V_0}^2/ 2g = 1.20$ м, или $V_0 = 4.85$ м/с, а для сильного удара ${V_0}^2/ 2g = 2.50$ м, или $V_0 = 7.00$ м/с.

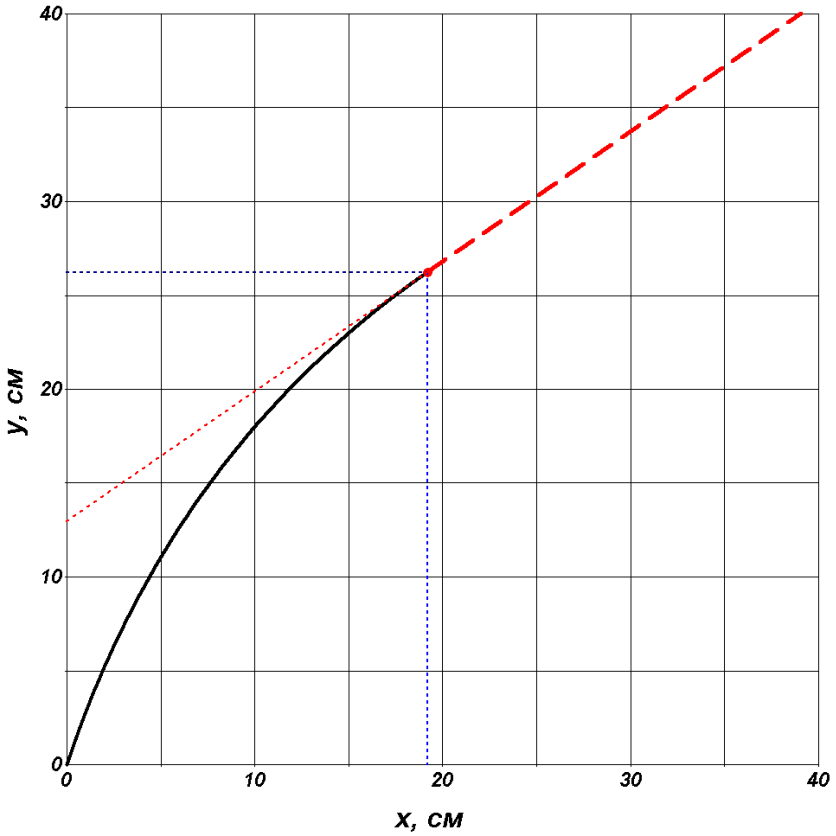
Для определения коэффициента f я устроил прибор, при помощи которого шар передвигался горизонтально по сукну при помощи нити, натянутой грузом. Сделав на сукне отметки, я смог прийти к заключению, что движение шара было приблизительно равномерным, когда на него действовала сила, равная 0.25 его веса в случае тонкого сукна или 0.30 его веса в случае сукна, более грубого или долго бывшего в употреблении.

Первое значение следует принять для бильярда, находящегося в хорошем состоянии. Хотя в опытах по определению трения скорость шара не превышала 1 м/с, тогда как после удара кием шар может получить значительно большую скорость, однако другие опыты (между прочим, опыты, произведенные г. Мореном) показали, что для всех тел трение не зависит от скорости, если она не превышает 4 м/с; поэтому мы могли, не боясь ошибиться, допустить, что точно так же дело обстоит и в данном случае для трения шара о сукно, и что величина его всегда остается постоянной независимо от скорости. Поэтому, взяв для приложений $f = 0.25$, мы получаем для обычного удара кием ${V_0}^2/ 2fg = 4.80$ м, а для сильного удара кием ${V_0}^2/ 2fg = 10.00$ м.

Таким образом, если шар начинает свое движение без вращения, как это происходит, когда кий ударяет его по направлению, проходящему через его центр, то расстояние y_2 от отправной точки до той точки, где шар начинает катиться без скольжения и приходит в состояние, которое мы назвали финальным, дается формулой (см. (s16), (s7)) $y_2 = \frac{24}{49}\frac{{V_0}^2}{2fg}$, или приблизительно $y_2 = \frac{1}{2}\frac{{V_0}^2}{2fg}$; оно для обычной скорости будет $y_2 = 2.40$ м, а для наибольшей скорости $y_2 = 4.898$ м.

В следующей главе мы увидим, как должны быть изменены эти расстояния в тех случаях, когда кий касается шара так, что линия удара не проходит через центр шара.

Для примера ниже размещен график, изображающий рассчитанную траекторию шара. Исходные данные были получены для кия и шара, применяемых в РБ, с помощью методики, изложенной в главе 8. Численные значения приведены в таблице. Начальный участок траектории, изображенный изогнутой линией черного цвета, шар проходит со скольжением по сукну. После того как шар переходит к естественному качению, он перемещается по прямой линии, изображенной на графике штриховой линией красного цвета.



Траектория шара, состоящая из участков движения со скольжением и естественного качения

V_{1_x}	Начальная поступательная скорость шара по оси **x**	0.37522 м/с
V_{1_y}	Начальная поступательная скорость шара по оси **y**	1.12797 м/с
υ_{1_x}	Начальная вращательная скорость верхнего центра удара по оси **x**	0.90181 м/с
υ_{1_y}	Начальная вращательная скорость верхнего центра удара по оси **y**	-0.24322 м/с
R	Радиус шара	0.034 м
f	Коэффициент трения скольжения между шаром и сукном	0.25
x_2	Удаление финальной точки траектории по оси **x**	19.2 см
y_2	Удаление финальной точки траектории по оси **y**	26.2 см
V_{2_x}	Финальная поступательная скорость шара по оси **x**	0.91216 м/с
V_{2_y}	Финальная поступательная скорость шара по оси **y**	0.63196 м/с
ψ	Конечный угол наклона траектории к оси **y**	55.285 град
t_2	Время движения из начального положения до перехода к естественному качению	0.29816 с

Краткое резюме к главе 1

1. Движение шара без соударений с чем-либо состоит, в общем случае, из двух последовательных фаз – движения со скольжением по сукну и естественного качения. В частных случаях фаза скольжения может отсутствовать; при этом шар сразу же естественно катится по столу. Если же движение начинается со скольжением, то рано или поздно оно прекращается, и шар переходит к естественному качению.

2. При качении траектория всегда является прямолинейной, а шар обладает верхним вращением. Помимо этого, шар может иметь и боковое вращение; в таких случаях он катится с наклонной осью вращения.

3. При движении со скольжением траектория шара в общем случае имеет параболический вид. В частных случаях шар может перемещаться со скольжением и по прямой линии.

4. Движение шара можно полностью рассчитать, если известны величины начальных поступательных скоростей V_{1_x} и V_{1_y}, а также начальных вращательных скоростей верхнего центра удара υ_{1_x} и υ_{1_y}. Причем, не важно, что именно вызвало наличие указанных скоростей – соударение с другим шаром, бортом или удар кием по битку.

Для вычисления финальной поступательной скорости следует использовать соотношения (6), а для финальной вращательной скорости – (s4). Угол финального отклонения шара определяется зависимостью (s5), а время движения до перехода к естественному качению – соотношением (s14) совместно с (s9). Координаты финальной точки траектории можно рассчитать согласно (s15) и (s16).

Если требуется построить траекторию движения шара (например, для компьютерной моделирующей программы), то применяются уравнения (s10) – (s14) вместе с (s8), (s9).

Глава 2

О действии удара горизонтальным кием

Теперь мы приступим к рассмотрению действия на шар удара кием, предполагая в первую очередь, что удар направлен параллельно плоскости бильярда. Наклонному удару кием мы посвятим другую главу; теория наклонного удара кием является более сложной и менее необходимой для приложений в обычной игре, поэтому мы сочли целесообразным разобрать ее отдельно.

Употребляют два рода киев: одни заканчиваются на заостренной части кожаной наклейкой, имеющей вид выпуклой полусферы, другие оканчиваются плоскостью, перпендикулярной к их длине. При употреблении первых, наклейку старательно натирают каким-нибудь веществом, увеличивающим трение о шар. Это делают для того, чтобы во время удара не произошло скольжения между кием и шаром даже в том случае, когда направление скорости точек кия, ударяющих шар, образует достаточно заметный угол с нормалью к поверхности шара; действительно, скольжение не может

иметь места, если этот угол будет меньше угла трения. Что касается киев без покрытия и обрезанных под прямым углом к оси, то (поскольку ими можно ударять только по направлению нормали к поверхности шара в точке удара), каким бы незначительным ни было трение, оно будет всегда достаточным для того, чтобы в мгновение удара не было скольжения между кием и шаром.

Уже только потому, что при ударе нет скольжения кия по шару, частицы шара, получившие удар кием, сцепляются с кием и, пока продолжается соприкосновение, не могут иметь скоростей, отличных от скоростей ударяющих точек кия. Кий направляется игроком так, чтобы во время удара точки кия сохраняли скорости, направленные по его геометрической оси. Поэтому то же самое будет иметь место и по отношению к точкам шара, получившим удар; таким образом, нужно считать, что ударяемые точки шара во время удара получают от кия количество движения, направленное по оси кия.

Все это полностью подтверждается опытом. Действительно, если бы во время удара направление количества движения, сообщенного шару, не совпадало с осью кия, и при соприкосновении имело бы место скольжение, то было бы совершенно невозможно наносить уверенно удар вследствие разного значения силы трения при употреблении того или другого кия. Такое различие имело бы место даже при игре одним и тем же кием в зависимости от того, больше или меньше кожаная наклейка покрыта мелом или каким-нибудь другим веществом, дающим сцепление с шаром. Когда кий при ударе скользит, и трение, таким образом, изменяет направление количества движения, то говорят, что сделан кикс (fausse queue), а такого рода удар не принадлежит к числу тех, которыми можно выиграть бильярдную партию.

Далее, если бы вторая часть количества движения, получающаяся вследствие упругости, будучи прибавлена к той, которую получил шар при сжатии во время первой стадии удара, не имела того же самого направления, как упомянутая первая часть, то точно так же было бы невозможно играть с уверенностью, так как и в этом случае направление движения после удара зависело бы от относительной упругости шара и кия, и не совпадало бы с направлением движения кия, как это бывает в действительности. Хотя при современном состоянии науки и невозможно прямым путем установить это положение при помощи теории, все же можно считать, что оно в достаточной степени подтверждается опытом, и принять его за основу для вычислений.

Таким образом, основываясь на положении, что при ударе кия шар получает некоторое количество движения по направлению движения кия, приложенное в точке, где происходит соприкосновение, мы постараемся определить величину скорости, которую приобретет шар в функции количества движения, полученного им в точке, где происходит удар; далее, мы увидим, каким образом в обычных случаях можно определить это количество движения, зная величину скорости, сообщенной кию.

Возьмем в центре шара начало прямоугольной системы координат и примем за ось $\mathbf{y}$ горизонтальную прямую, параллельную вертикальной плоскости, проходящей через ось кия (иными словами – через прямую, направленную по переносной поступательной скорости шара), а в качестве положительного направления этой оси выберем направление проекции переносной поступательной скорости шара на

плоскость бильярда. Далее, как мы это уже делали, направим положительную ось $\mathbf{x}$ вправо, если смотреть от игрока, а положительную ось $\mathbf{z}$ – вверх от плоскости бильярда. В дальнейшем *точкой удара* мы будем называть ту точку шара, которая получила удар кием; линией удара мы назовем прямую, проведенную через точку удара по направлению кия или по направлению скорости точек, ударяющих шар.

Так как удар предполагается горизонтальным, то нет необходимости рассматривать действие трения о сукно во время удара; таким образом, шар остается как бы свободным. Он получит в направлении удара кия количество движения, которое будет измеряться произведением массы шара на скорость его центра.

Введем следующие обозначения:

M – масса шара;

R – радиус шара;

V_1 – величина скорости, которую получает биток сразу же после удара, нанесенного кием;

h – абсцисса точки, в которой произошел удар; иными словами, это – расстояние между центром шара и вертикальной плоскостью, проходящей через точку, где произошел удар, и через прямую, совпадающую с направлением удара, то есть через ось кия;

l – высота точки удара над поверхностью бильярда.

Для того чтобы определить вращательное движение шара в зависимости от вышеприведенных данных, составим уравнения, согласно которым равны между собой взятые относительно центра шара моменты количеств движения, происшедших от удара, и моменты количеств движения от вращательных скоростей.

В результате, Кориолис получил следующие соотношения, из которых можно легко определить начальные величины угловых скоростей вращения шара p_1, q_1, r_1 вокруг осей $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, соответственно, приобретенные за счет удара кием:

$$\begin{cases} \frac{2}{5}Rp_1 = V_1\left(\frac{l-R}{R}\right), \\ \frac{2}{5}Rq_1 = 0, \\ \frac{2}{5}Rr_1 = -V_1\frac{h}{R}. \end{cases} \tag{14'}$$

С учетом равенств (s1) соотношения (14’) можно представить в виде

$$\begin{cases} \upsilon_{1_x} = 0, \\ \upsilon_{1_y} = V_1\left(\frac{l-R}{R}\right), \\ \omega_{1_z} = -\frac{5}{2}V_1\frac{h}{R^2}. \end{cases} \tag{s17}$$

Из (s17) вытекает несколько простых, но, вместе с тем, важных выводов:

1) За счет нанесения *горизонтального* удара кием, поперечное вращение шару не придается. А это значит, что после такого удара траектория битка не искривляется;

иными словами, биток всегда движется по прямой линии.

2) Продольное вращение, приобретенное битком, будет верхним, когда удар наносится по точке шара, расположенной выше его центра (при этом $l > R$, а значит: $\upsilon_{1_y} > 0$). Биток приобретет начальное нижнее вращение после удара, выполненного по точке, располагающейся ниже центра ($l < R$; $\upsilon_{1_y} < 0$). Начальное вращение вокруг оси $\mathbf{x}$ будет отсутствовать, если нанести удар кием точно на высоте центра шара.

Если положение точки удара удовлетворяет неравенству $l < 1.4R$ (а в игре так и бывает в подавляющем большинстве случаев), то выполняется условие $\upsilon_{1_y} < \frac{2}{5}V_1$, означающее, что при движении со скольжением поступательная скорость шара уменьшается. Если же $l > 1.4R$, то из (s17) следует, что $\upsilon_{1_y} > \frac{2}{5}V_1$. А это говорит о том, что вращательная скорость точки опоры превосходит поступательную скорость самого шара. Как следствие – пробуксовывание шара и его движение с набором скорости.

3) Смещая точку удара в сторону от вертикальной плоскости, проходящей через центр битка, можно придавать шару боковое вращение (вращение вокруг вертикальной оси $\mathbf{z}$). Так как выше было условлено, что ось вращения направлена в ту сторону, с которой вращения шара наблюдается так же, как и ход часовой стрелки, то направление оси вращения, совпададающее с положительным направлением оси $\mathbf{z}$, свидетельствует о левом боковом вращении. Такое вращение придается шару с помощью удара, наносимого кием по той половине поверхности битка, которая видна игроку левее центра. Если это направление вращения принимается за положительное ($\omega_{1_z} > 0$), то из последнего уравнения (s17) сразу же следует, что смещение точки удара влево от видимого центра шара необходимо считать за орицательное, т.е. при этом $h < 0$. И наоборот, если удар наносится с боковым смещением кия вправо, то следует полагать $h > 0$.

4) Придаваемое шару вращение будет тем более интенсивным в сравнении с поступательной скоростью шара, чем значительней удалена точка удара от рассматриваемой оси. Для продольного вращения это удаление характеризуется абсолютной величиной разности $l - R$, а для бокового вращения – абсолютным значением величины h.

5) Из (s17) видно, что на интенсивность вращения влияет, помимо удаления точки удара от оси, еще и величина скорости шара, приобретенной при ударе. Более того, угловая скорость вращения пропорциональна произведению скорости V_1 на это удаление. А это значит, что при выполнении двух различных по силе ударов можно одинаково «закрутить» биток, регулируя удаление точки контакта наклейки с шаром.

6) Чтобы использовать соотношения (s17) или их аналог (14’), нужно иметь значение поступательной скорости шара V_1 непосредственно после контакта с кием. Но до сих пор не было указано, как его определить. Кориолис представил такие уравнения чуть ниже.

Высота l, на которой производится удар кием, не должна быть ни слишком большой, ни слишком малой, если хотят нанести уверенный удар, потому что нужно,

чтобы кий не скользил по шару; предел отклонения линии удара от центра шара устанавливается самым большим углом, который направление удара может образовать с нормалью к поверхности шара без того, чтобы получалось скольжение. Этот угол равен тому, который называют *углом трения*. Опыт показал игрокам, что можно ударять шар без скольжения вплоть до расстояния от центра, равного $0.70R$.

Расстояние a от центра шара до линии удара вычисляется тривиально:

$$a = \sqrt{(l - R)^2 + h^2}\,. \qquad \text{(s18)}$$

Во избежание кикса нужно наносить удар так, чтобы было выполнено ограничение

$$a < 0.70R\ , \text{ или } \sqrt{(l - R)^2 + h^2} < 0.70R\ .$$

Если вертикальная плоскость удара проходит через центр шара (то есть, если $h = 0$), то минимальное значение l будет равно $0.3R$, а максимальное: $l = 1.7R$.

Таким образом, строго говоря, еще можно дать удар на высоте верхнего центра удара, соответствующей $l = 1.40R$; однако на этой высоте бьют очень редко из боязни, чтобы при уклоне немного вверх или в сторону, что увеличивает расстояние a от центра, не сделать кикс.

Теперь нам остается рассмотреть, каким образом скорость V_1, сообщенная ударом кия центру шара, может быть определена по скорости кия и по расстоянию между линией удара и центром шара в том случае, когда удар не проходит через этот центр.

Сцепление между кием и шаром во время удара, как показывает опыт, приводит к тому, что количество движения, полученное шаром и вследствие удара и вследствие упругости, всегда имеет направление скорости кия, а эта скорость не меняет заметно своего направления во время удара. Это обстоятельство позволяет определить скорость, которую приобретает центр шара. Мы сначала предположим, что во время удара кий предоставлен самому себе – не сжимается рукой и не получает толчка после удара. Точно так же, нам нужно будет допустить, как это делается обычно, что шар во время удара отделяется от кия и не имеет с ним соприкосновения после удара. Дальше мы увидим, каких условий требует это допущение и что происходит, если оно не имеет места.

Обозначим через M' массу кия, через V' – его скорость до удара, а через V'_1 – скорость кия после удара. В предположении о том, что при нанесении удара одновременно выполнятся как закон сохранения импульса объединенной системы «кий + шар», так и закон сохранения энергии, Кориолис получил два соответствующих уравнения. Объединив их в систему и найдя решение, он получил для центрального удара ($a = 0$) соотношения, позволяющие рассчитывать поступательные скорости

битка и кия в момент, когда шар отделяется от наклейки:

$$V_1 = \frac{2M'V'}{M'+M}, \qquad (s19)$$

$$V'_1 = \frac{(M' - M)V'}{M' + M}. \qquad (s20)$$

Зависимости (s19), (s20) весьма просты, и их удобно использовать при анализе соударения кия с шаром. Чаще всего, именно эти или подобные им соотношения (соответствующие условию $a \neq 0$; см. (s23), (s24)) применяют в современных теоретических исследованиях по бильярду. Однако, Кориолис четко осознавал, что в мире нет ничего совершенного. Он понимал, что на практике равенства (s19), (s20) выполняются лишь приблизительно, и, чтобы внести коррективы, попытался учесть неабсолютную упругость шаров. С этой целью, Кориолис провел ряд опытов. В своей книге он об этом пишет так:

Остается еще установить одно уравнение, относящееся к действию силы упругости. При современном состоянии науки невозможно вычислить à priori, что именно эта сила упругости произведет во время удара. Вследствие этого, я должен был изучить опытным путем те явления, которые она вызывает при соударении кия с шаром. Для этой цели я подвесил кий таким образом, чтобы он мог совершать горизонтальные колебания по направлению своей длины, причем все его точки описывали бы одинаковые дуги. Чтобы получить это, достаточно было прикрепить концы кия к двум расходящимся нитям, которые спускались с потолка, находящегося над кием на высоте около двух метров. При отклонениях кия от нижнего положения, он стремился возвращаться к нему, оставаясь горизонтальным. Шар был точно так же прикреплен к двум нитям, спускавшимся с потолка и прикрепленным к шару по концам горизонтального диаметра. Таким образом, этот шар мог колебаться и в то же самое время вращаться вокруг своего горизонтального диаметра. В своем положении равновесия он был расположен так, что тонкий конец кия касался его, и ось кия проходила через его центр. У конца кия и около шара были помещены градуированные дуги окружностей для измерения отклонений нитей и, следовательно, для определения высот подъема кия и шара.

После отклонения кия от положения равновесия он ударял шар в центр, имея живую силу, пропорциональную высоте первоначального подъема. Шар, получивший удар в центр, приобретал поступательную скорость, которая определялась из высоты его подъема. Если бы живая сила сохранялась после удара, то, на основании сохранения количества движения центра тяжести, мы должны были бы получить соотношения (s19), (s20).

Так как кий весил в точности в три раза больше, чем шар, то $M'=3M$, и наши формулы ((s19), (s20)) дали бы:

$$V_1 = \frac{3}{2}V'; \; V'_1 = \frac{1}{2}V'.$$

Однако, по отклонениям кия и шара после удара было вычислено:

$$V_1 = \frac{5}{4}V' \; ; V'_1 = \frac{7}{12}V'.$$

Таким образом, живая сила после удара, вместо того чтобы быть равной $M'V'^2$ или $3MV'^2$, как было бы в случае ее сохранения (*ведь кинетическая энергия, т.е. живая сила, до соударения определялась лишь движущимся кием, в то время, как биток покоился*), оказалась равной только $\frac{372}{144}MV'^2 = M \cdot \frac{5}{4}V' \cdot \frac{5}{4}V' + 3M \cdot \frac{7}{12}V' \cdot \frac{7}{12}V'$ или $2.56MV'^2$. (*Ох, и нелегко же было в давние времена тем, кому приходилось вычислять что-нибудь не самое простейшее! Не было у них под руками, хоть ты тресни, хотя бы примитивных калькуляторов. А вот, если бы были, то нет сомнений, что, после деления 372 на 144 было бы получено 2.583, а не 2.56. Вроде бы – мелочь, да? Но ведь, эта ошибка влечет за собой более серьезные последствия, чем отличие в каких-то там сотых долях. Но, ладно – Кориолис; а вот профессор М.М.Гернет при подготовке перевода книги на русский язык вполне мог бы и перепроверить результаты вычислений. Ведь в те годы для широкого пользования уже вполне был доступен цифровой калькулятор – арифмометр «Феликс»!*). Следовательно, потеря при ударе составляет 0.13 полной живой силы. (*Ну вот – и приехали! Величина 0.13 определяется как* $1 - \frac{372}{144} \cdot \frac{1}{3}$ *, что при более точных подсчетах дает 0.14, а не 0.13. А если бы Кориолис, вместо* $\frac{372}{144}$ *, использовал указанное число 2.56, то вообще бы получил 0.15!).* При изменениях скоростей кия, потери живой силы оставались приблизительно в том же самом отношении. Нельзя было получить скорости кия более 2.80 м/с и, следовательно, для шара – 3.60 м/с. Не оказалось возможным проделать опыты, в которых скорости удара приближались бы к скоростям, имеющим место в обычной игре; но, поскольку вышеприведенное отношение оставалось в опытах постоянным, мы могли применять его для скоростей, имеющих место во время игры.

Для того чтобы определить потерю живой силы в тех случаях, когда линия удара проходила немного выше или ниже центра шара, так что шар получал вращательную скорость вокруг горизонтальной оси подвеса, я рассматривал, во что обращалась скорость центра; так как она является следствием общей потери живой силы, которая имела место во время удара, то я вывел отсюда, что общая потеря живой силы с учетом той, которая пошла на придание вращения, всегда приблизительно остается одной и той же.

Без сомнения, эти опыты недостаточны для определения потери живой силы при очень сильных ударах кия; однако, поскольку, принимая постоянно для потери живой силы такое же значение 0.13, мы получили следствия, которые вполне согласуются с опытом, то, конечно, представит некоторый интерес попытка вывода этих установленных практикой правил из одного только предположения, что потеря живой силы находится в постоянном отношении к величине полной живой силы.

Таким образом, опытным путем Кориолис определил величину коэффициента θ, которая составила 0.13. Повторно решая систему уравнений, вытекающих из законов

сохранения импульса и энергии, но учитывая при этом потери кинетической энергии (путем введения коэффициента θ) и применяя связь (s18), он вывел следующие довольно-таки громоздкие соотношения:

$$V_1 = V' \frac{1+\sqrt{1-\theta-\theta\frac{M'}{M}\left(1+\frac{5}{2}\frac{a^2}{R^2}\right)}}{1+\frac{5}{2}\frac{a^2}{R^2}+\frac{M}{M'}}, \qquad \text{(s21)}$$

$$V'_1 = V' \frac{1+\frac{5}{2}\frac{a^2}{R^2}-\frac{M}{M'}\sqrt{1-\theta-\theta\frac{M'}{M}\left(1+\frac{5}{2}\frac{a^2}{R^2}\right)}}{1+\frac{5}{2}\frac{a^2}{R^2}+\frac{M}{M'}}. \qquad \text{(s22)}$$

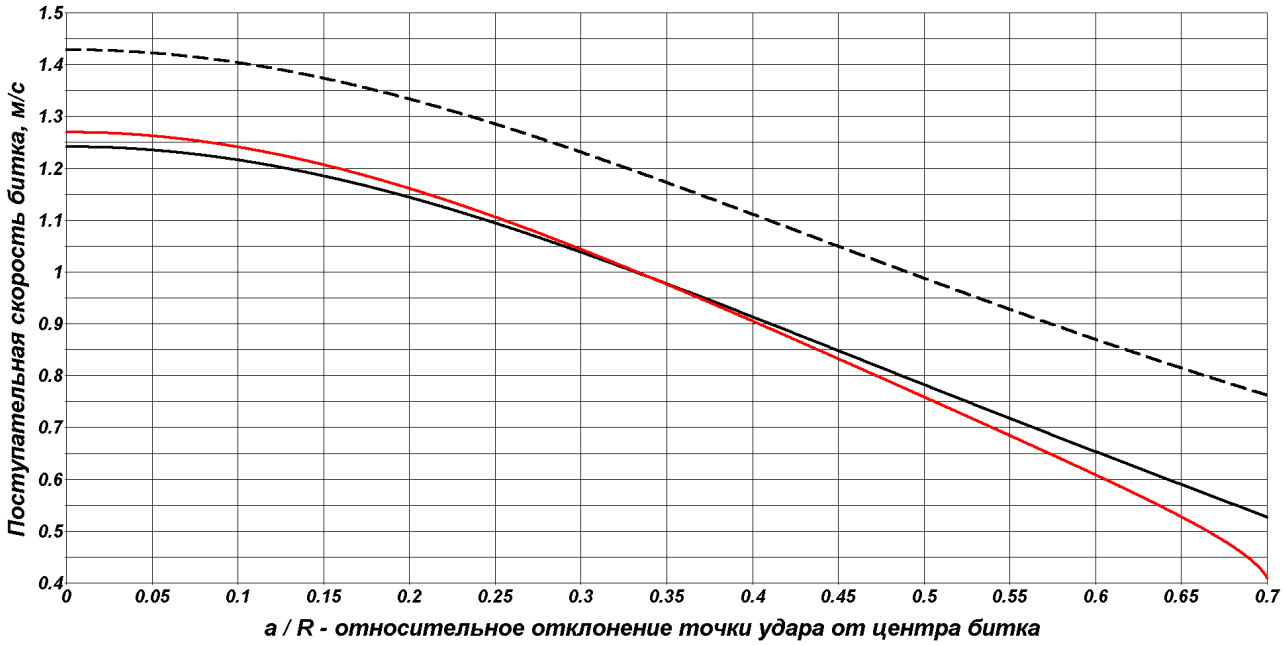
Нетрудно заметить, что если в (s21), (s22) обнулить величину θ, а также положить равным нулю удаление a (то есть, если рассмотреть лишь случай нанесения удара по точке, совпадающей с видимым центром шара), то автоматически будут получены соотношения (s19), (s20). Да и странно бы было, если бы это оказалось не так. Для случая же $\theta = 0$; $a \neq 0$, из (s21), (s22) вытекают следующие зависимости:

$$V_1 = V' \frac{2}{1+\frac{5}{2}\frac{a^2}{R^2}+\frac{M}{M'}}, \qquad \text{(s23)}$$

$$V'_1 = V' \frac{1+\frac{5}{2}\frac{a^2}{R^2}-\frac{M}{M'}}{1+\frac{5}{2}\frac{a^2}{R^2}+\frac{M}{M'}}. \qquad \text{(s24)}$$

Чтобы как-то разбавить сухой текст, приведу рисунок с графиками, рассчитанными согласно (s21). На нем представлены зависимости поступательной скорости V_1, приобретаемой битком (при скорости кия в момент удара V', равной одному метру в секунду), от отношения a/R, характеризующего удаление точки наносимого удара от центра шара. Величина $a/R = 0$ соответствует удару точно по центру битка. И наоборот, при $a/R = 0.7$ удар наносится максимально далеко от центра – в край той области поверхности шара, «выход» из которой грозит неминуемым киксом. Соответственно, все промежуточные значения a/R расположены в интервале 0÷0.7. График, изображенный черной сплошной линией, рассчитан для традиционного кия, используемого в РБ, который в два с половиной раза массивней шара. Легко заметить, что максимальную скорость биток получает, если удар наносится в центр битка, а чем дальше точка удара отодвигается от центра, тем значительней падает величина V_1. При $a/R \lesssim 0.33$ скорость шара превосходит скорость разогнанного при ударе кия, а в остальных случаях – наоборот. При ударе на границе зоны киксов,

начальная скорость битка составляет всего лишь примерно половину от той скорости, которую имел перед ударом кий. Линия красного цвета соответствует той массе кия, о которой говорит Кориолис – она в три раза больше массы используемого для игры шара. По рисунку видно, что в случаях, когда точка удара незначительно отклонена от центра (при $a/R \lesssim 0.33$), «кий Кориолиса» придает шару большее значение скорости, чем кий для РБ. При $a/R \gtrsim 0.33$ ситуация меняется на противоположную. График, изображенный черной штриховой линий, был построен по расчетам при $M'/M = 2.5$; однако, при этом вполне осознанно было положено $\theta = 0$ – чтобы понять, можно ли пренебрегать учетом потерь кинетической энергии, характеризуемых коэффициентом θ. Мне кажется, что разница между графиками черного цвета дает четкий ответ на этот вопрос. А Вы можете найти десять отличий?))



Зависимость поступательной скорости, получаемой битком при ударе, от отклонения точки удара от центра шара

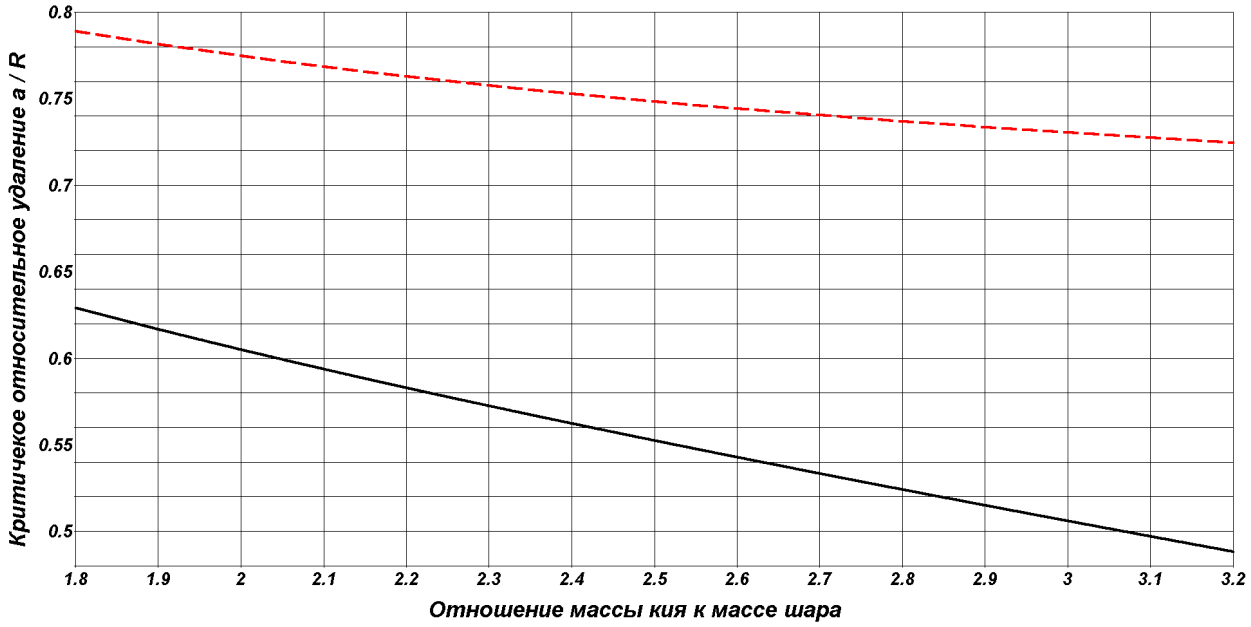
Двигаясь в своем изложении далее, Кориолис использовал найденные уравнения (s21) и (s22), чтобы проанализировать ситуацию, когда приобретенная шаром поступательная скорость не превосходит остаточную скорость кия: $V_1 \leq V'_1$. В таких случаях шар не сразу же отделяется от наклейки, и такой контакт приводит к тому, что приданное шару вращение несколько тормозится. Иными словами, при этом соотношения (14') не вполне отражают то, что происходит на самом деле. Подставив в последнее неравенство правые части из (s21) и (s22), Кориолис составил несложную цепочку рассуждений, из которой следует, что:

1) **Если применять облегченные кии, то можно наносить удар по шару ближе к его краю, не опасаясь, что после этого возникнет трение, тормозящее вращение. Более легкие кии позволяют получить большее отношение между величиной скорости обратного вращения и поступательной скоростью**.

2) При употреблении обычных киев, весящих в три раза больше шара, для сохранения всего вращательного движения не следует наносить удар на расстоянии от центра, превышающем 0.6 радиуса. С более легкими киями можно отодвигать точку удара до 0.7 радиуса – так получается большее отношение вращательной скорости к поступательной. Так как именно от этого отношения зависит легкость, с которой можно заставить биток двигаться назад после соударения с прицельным шаром, то отсюда следует, что **для получения хорошей оттяжки нужно пользоваться киями, несколько более легкими, чем обычные**.

Указанное удаление точки удара $a = 0.6R$ Кориолис определил из условия равенства V_1 и V'_1. Однако, при этом он допустил погрешности. Чтобы убедиться, достаточно взглянуть на следующий рисунок, на котором линией черного цвета изображена рассчитанная зависимость величины критического удаления a (то есть такого удаления, при котором скорости V_1 и V'_1 равны друг другу) от отношения массы кия к массе шара. Нетрудно видеть, что для киев, рассмотренных Кориолисом, критическое относительное удаление лишь немногим превосходит 0.5 и вовсе не равно 0.6. Для киев же РБ, относительное критическое удаление несколько больше по величине и примерно составляет 0.55.

На этом же рисунке для сравнения приведена зависимость критического удаления от M'/M (см. штриховую линию красного цвета), рассчитанная по формулам (s23), (s24), то есть без учета коэффициента θ. Нетрудно видеть, что такой «усеченный» анализ дает совершенно иной результат. Получается, что в рассматриваемом диапазоне значений $1.8 \le M'/M \le 3.2$ вообще невозможно добиться равенства $V_1 = V'_1$. Если говорить более строго, то такое равенство возможно лишь, когда удар кием наносится по точке битка, находящейся в области киксов. Насколько правомерен такой вывод – судить Вам.



Зависимость величины критического удаления точки удара от отношения масс кия и шара

3) **Чтобы нанести удар по шару на возможно большем расстоянии от центра, не уменьшая создаваемого вращения, нужно держать кий в руке свободно и после удара не толкать вперед**.

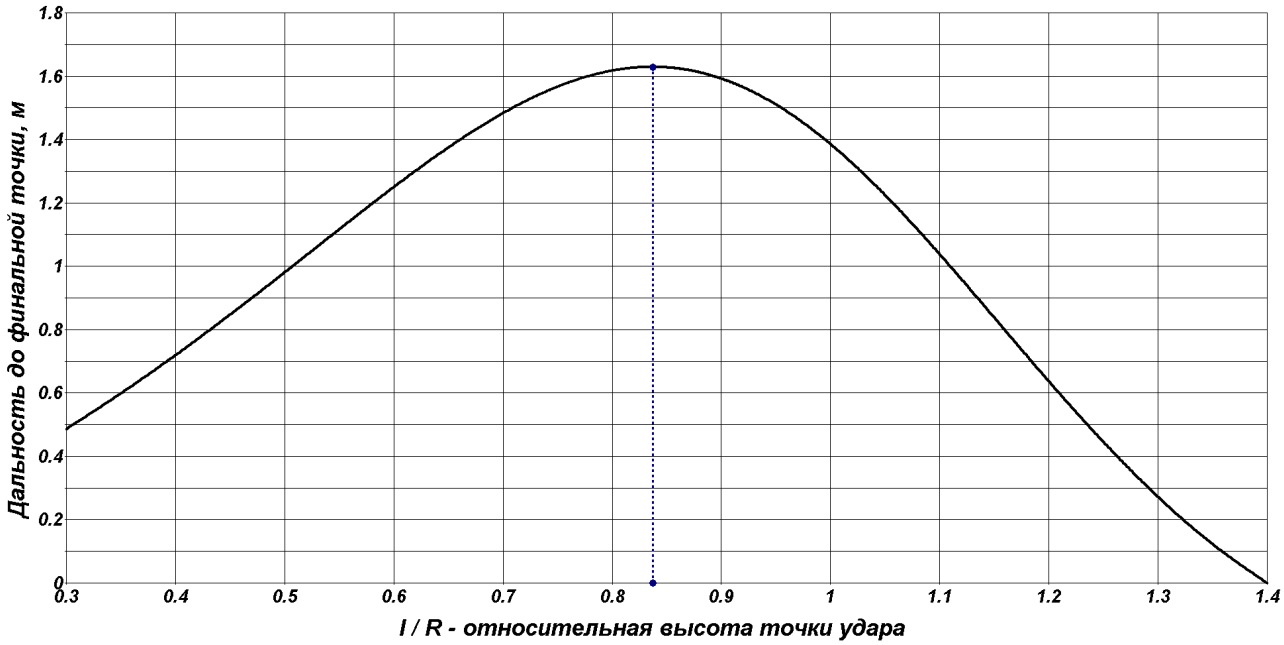
Соотношение (s21) Кориолис использовал и для того, чтобы определить местоположения некоторых «особых» точек удара. Так, он задался вопросом: «А какова должна быть высота точки удара l, обеспечивающая наибольшее удаление финальной точки траектории от начального местоположения битка»? Чтобы решить такую задачку, Кориолис сначала получил функциональную зависимость удаления y_2 от параметра l. С этой целью, были применены соотношения (5), (6), (s9), (s16), (s17) и, конечно же, (s21). В итоге получилось довольно сложное выражение, вид которого я приведу здесь – чтобы не быть голословным:

$$y_2 = \frac{V'^2}{2fg} \frac{\left[1 - \left(\frac{5}{7}\frac{l}{R}\right)^2\right]\left(1 + \sqrt{1 - \theta - \theta\frac{M'}{M}\left[1 + \frac{5}{2}\left(1 - \frac{l}{R}\right)^2\right]}\right)^2}{\left[1 + \frac{M}{M'} + \frac{5}{2}\left(1 - \frac{l}{R}\right)^2\right]^2}.$$

Теперь, перед Кориолисом задача стояла так: необходимо выразить величину l, при которой значение y_2, определяемое последним соотношением, будет максимальным. Оказалось, что в общем виде (как говорят математики – аналитически) решение найти нельзя, и Кориолису пришлось изрядно повозиться, чтобы отыскать численное решение. При этом, естественно, он зафиксировал отношение M'/M, положив его равным трем. В итоге, удалось получить $l \approx 0.9R$. А это значит, что биток начнет естественно катиться по столу максимально удаленно от начального местоположения, если нанести удар кием по точке, расположенной ниже центра примерно на 0.1 радиуса. Если найти точное численное решение для кия, применяемого в РБ, то оно будет несколько отличаться от того, что получил Кориолис, но – незначительно: $l \approx 0.837R$. Чтобы читатель мог убедиться в правильности этого решения, приведу график зависимости y_2 от отношения l / R (рассчитанной при скорости кия во время удара, равной трем метрам в секунду – то есть, для удара средней силы):

Помимо расположения точки максимума y_2, из этого рисунка видно, что если игрок захочет не удалять, а, наоборот, приближать место начала качения битка, то ему следует стремиться наносить удар поближе к точке, расположенной выше центра на две пятых радиуса. Более того, ударив именно в эту точку, можно добиваться начала естественного качения сразу же после отделения шара от кия. Но есть и другой способ приближения точки начала качения – из рисунка видно, что для этого при ударе следует придавать битку не верхнее, а нижнее вращение; причем, нужно стремиться максимально удалить точку удара от видимого центра. Именно так выполняются так называемые «тормозящие» или «медленные накаты». Достоинство этих ударов

заключается в том, что большую часть своей траектории биток преодолевает с немалой посупательной скоростью, а значит – при этом уменьшаются опасности нежелательного изменения направления движения за счет уклона игровой поверхности и помех в виде соринок.

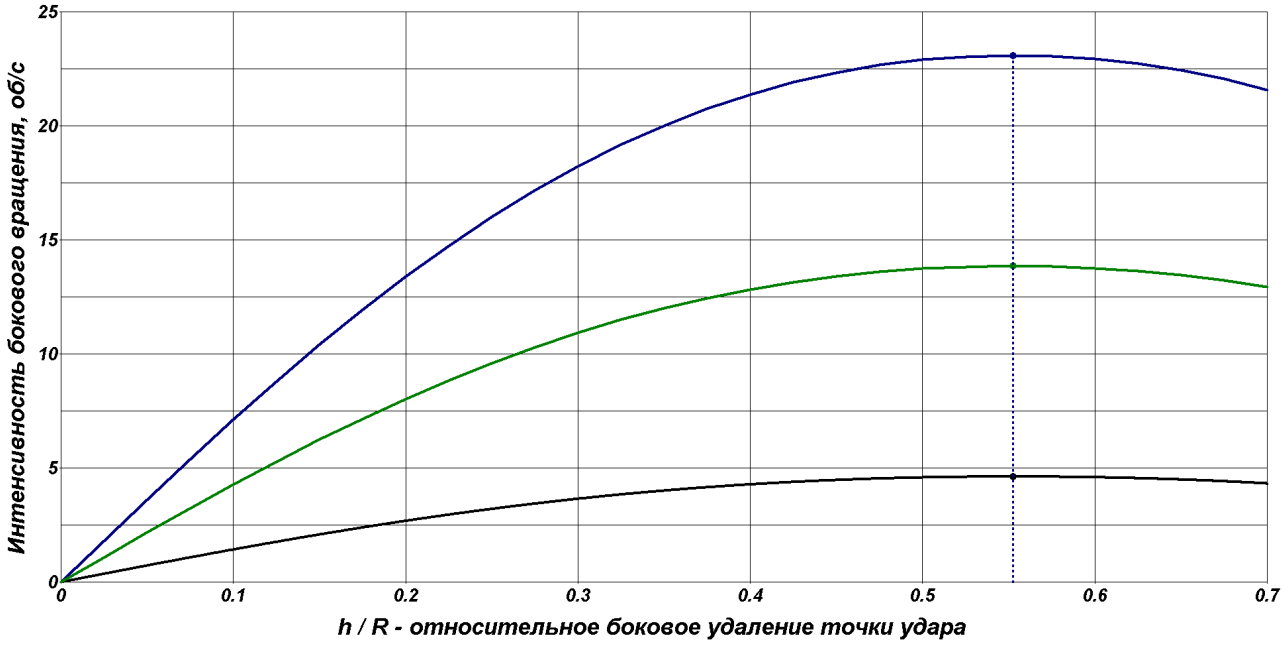


Зависимость удаления финальной точки траектории от высоты точки удара

Следующая «особая» точка удара, которую исследовал Кориолис, связана исключительно с ударом, придающим битку начальное нижнее вращение. Допустим, игроку потребовалость максимально отдалить от начального местоположения ту точку траектории, в которой шар обретает, по терминологии Кориолиса, состояние скольжения. Речь идет о том, что в этой точке шар полностью исчерпывает первоначальное нижнее вращение, но еще не обладает верхним. Решение Кориолиса таково: чтобы достичь максимума величины y_0, следует нанести удар по точке битка, отстоящей вниз от его центра приблизительно на четверть радиуса шара. С помощью же современной вычислительной техники несложно определить, что для традиционного кия, используемого в РБ, точку удара следует опустить от центра не на четверть, а на треть радиуса. Думается, что здесь отличие решений уже чувствительно.

Кориолис нашел и местоположение такой точки удара, которая обеспечивает максимальную интенсивность (угловую скорость) придаваемого битку бокового вращения. На первый взгляд, может показаться, что эта задача – надуманная. Теоретически неподкованные игроки считают, что боковое вращение будет тем сильнее, чем значительнее будет удалена точка удара в сторону от центра шара. Но это – не так! Выше указывалось, что максимально удаляя точку удара, можно добиваться наибольшего отношения интенсивности вращения к придаваемой шару поступательной скорости. Но здесь же ведется речь совершенно о другом – нужно найти точку удара, которая обеспечит наибольшее количество оборотов шара за

единицу времени при приобретенном боковом вращении. И Кориолис нашел такую точку: по его выводам, она удалена по горизонтали от центра битка на половину радиуса. Для РБ же получается, что нужно отклонить эту точку чуть дальше – на 0.55 радиуса шара. По приведенному ниже рисунку видно, что такое отличие от решения Кориолиса – вовсе несущественно. На рисунке изображены зависимости интенсивностей бокового вращения (выраженных в оборотах за секунду), приобретенного битком при ударе, от горизонтального удаления точки удара по отношению к центру. Кривая черного цвета соответствует слабому удару ($V' = 1$ м/с), зеленого вета – удару средней силы ($V' = 3$ м/с), а синего цвета – сильному удару ($V' = 5$ м/с).



Зависимость количества оборотов битка от удаления точки удара при придании бокового вращения

Наконец, последняя «особая» точка, которой уделил внимание Кориолис, позволяет придать шару наибольшую финальную скорость (попутно, и скорость в состоянии скольжения будет максимальной). Местоположение такой точки характеризуется величиной $l \approx 1.2R$. Это значит, что удар нужно наносить в точку, распологающуюся на пятую долю радиуса шара выше его центра. Почти то же самое получается и при расчетах для РБ.

Краткое резюме к главе 2

1. Найдены соотношения, определяющие величины начальных скоростей битка, полученных в результате удара кием. Для их расчета следует пользоваться формулами (s17) в совокупности с (s21).

2. После горизонтального удара кием, шар не приобретает поперечного вращения и всегда движется по прямой линии.

3. Биток получит начальное верхнее вращение, если удар наносится по точке шара, расположенной выше его центра, и нижнее, если точка удара находится ниже центра. После удара кием на высоте центра шара, начальное продольное вращение отсутствует.

3. Боковое вращение придается шару за счет горизонтального смещения точки удара относительно вертикальной плоскости, проходящей через центр шара.

4. Вращение шара будет тем более интенсивным в сравнении с его поступательной скоростью, чем дальше располагается точка удара от рассматриваемой оси.

5. Опытным путем определена величина коэффициента, характеризующего потери кинетической энергии при ударе кием по битку. Эти потери составляют примерно 13 процентов.

6. Биток приобретает максимальную начальную поступательную скорость, если удар наносится в его центр. Чем дальше отодвигается точка удара от центра, тем значительней падает начальная скорость шара.

7. При применении киев, которые массивнее шара в три раза, для сохранения всего придаваемого вращательного движения не следует наносить удары в точки, отстоящие от центра более чем на 0.6 радиуса (*видимо, эту величину, определенную Кориолисом, все же следует несколько уменьшить*). С более легкими киями можно отодвигать точку удара до 0.7 радиуса – так можно получить большее отношение вращательной скорости к поступательной. Чтобы проще выполнять удары с оттяжкой, следует пользоваться более легкими киями.

8. Основываясь на анализе математических соотношений, а не на практическом опыте, выдана рекомендация по технике игры: для нанесения удара по шару на возможно большем расстоянии от его центра, при котором не уменьшается создаваемое вращение, нужно держать кий в руке свободно и после удара не толкать его вперед.

9. После удара, нанесенного по точке, располагающейся выше центра битка на две пятых его радиуса, шар сразу же начинает движение в состоянии естественного качения, минуя фазу движения со скольжением.

10. Если нанести удар кием по точке, расположенной ниже центра шара примерно на 0.1 радиуса, то биток начнет естественно катиться по столу в точке траектории, максимально удаленной от начального местоположения.

11. Чтобы максимально увеличить дальность от начального положения шара до той точки, где он исчерпает начальное нижнее вращение, следует нанести удар по точке битка, отстоящей вниз от его центра приблизительно на четверть радиуса.

12. Максимально интенсивное боковое вращение, характеризующееся макисмальным количеством обротов вокруг оси за единицу времени, шар приобретает после удара по точке, удаленной по горизонтали от центра битка на половину радиуса.

13. Если требуется придать шару наибольшую финальную скорость, то удар следует нанести в точку, распологающуюся на пятую долю радиуса шара выше его центра.

Глава 3

Об ударе двух шаров и карамболе без учета весьма малого трения между шарами во время удара

Наиболее нужным для практики бильярдной игры является изучение того, что происходит после удара движущегося шара о неподвижный; этой проблемой мы теперь и займемся.

Трение между шарами при ударе очень слабо; это признают все игроки, и, кроме того, это вытекает из опытов, о которых я расскажу.

Чтобы определить трение двух шаров во время удара, я подвесил шар к нити и сделал на нем отметку, при помощи которой можно было бы наблюдать вращение, которое шар мог приобрести. Я сообщил шару равномерное вращение, для которого точно определил длительность одного оборота; потом я сообщил подвешенному шару сбоку горизонтальный косой удар *(имеется в виду удар не «в лоб» или, иными словами, «на резке»)* другим шаром так, чтобы посредством трения сообщить ударяемому шару вращение в направлении, противоположном существующему; я постепенно менял силу удара так, чтобы почти полностью уничтожить все существующее вращение или, по крайней мере, оставить настолько малое вращение, чтобы можно было его измерить во время качаний шара на нити. Без влияния трения во время удара шар получил бы колебательное движение на нити, которое никак не отразилось бы на вращении, существовавшем до удара; но так как в результате трения, кроме радиального удара, проходящего через центр тяжести, происходит тангенциальный удар, то вследствие этого получалось изменение вращения шара.

Пусть MV будет количество движения, сообщенное шару во время удара при наличии трения, и пусть φ будет угол трения; тогда $MV\sin\varphi$ будет количество движения, обусловленное силой трения; его отношение к количеству движения по нормали в точке удара или к $MV\cos\varphi$ будет равно $\operatorname{tg}\varphi$; именно этот тангенс и обозначается через f'.

Если через H мы обозначим высоту, на которую поднялся шар во время своих колебаний, то будем иметь:

$$V^2 = 2gH\ .$$

Обозначая символом Ω разность угловых скоростей до и после удара, а через R – радиус шара, мы будем иметь для вращательного движения

$$\frac{2}{5}R\Omega = V\sin\varphi\ .$$

Таким образом,

$$\sin\varphi = \frac{\frac{2}{5}R\Omega}{\sqrt{2gH}}\ .$$

В произведенных опытах мы имели $R = 0.025$ м, шар при ударе поднимался на высоту $H = 0.25$ м, и при этом уничтожалась угловая скорость в один оборот в секунду; таким образом, $\Omega = 2\pi$. Следовательно, значение $\sin\varphi$ равно 0.028, откуда $\operatorname{tg}\varphi = 0.028$.

Таким образом, в данном случае коэффициент трения f' равнялся 0.028.

Так как трение между шарами очень незначительно, то мы сначала рассмотрим действие удара, пренебрегая этим трением.

Опыты с ударами бильярдных шаров, подвешенных на нитях, свидетельствуют о почти абсолютной упругости удара; поэтому, в практике игры можно с очень высокой точностью считать удар шаров абсолютно упругим. Кроме того, далее, для завершения теории мы будем рассматривать трение между шарами. Мы укажем тогда же, как учесть и неабсолютную упругость шаров. Но, повторяем, оба эти влияния в обычных условиях можно и не рассматривать *(избегая резких выражений, скажу: на мой взгляд, это – весьма спорное суждение)*; поэтому мы сначала будем ими пренебрегать.

Начнем с рассмотрения обычного в игре случая, когда свой шар, получив горизонтальный удар кием, движется по прямой линии, имея элементы движения, определенные в предыдущей главе.

Действие удара шаров при их абсолютной упругости и равенстве масс, как известно, заключается в том, что ударяющиеся шары обмениваются нормальными скоростями центров. Таким образом, свой шар потеряет скорость, нормальную к общей касательной к шарам в точке удара, и сохранит только тангенциальную.

Обозначим через α^* угол, который касательная к поверхностям шаров в точке соударения *(проведенная горизонтально, т.е. параллельно игровой поверхности!)* образует с направлением движения своего шара до удара, или иными словами – с направлениями скорости $\mathbf{V}$ и скорости $\boldsymbol{\upsilon}$, которая до удара шаров направлена так же, как и скорость $\mathbf{V}$, или противоположно.

При рассмотрении «косых» соударений, в современной теории бильярда обычно пользуются «углом резки», образованным вектором поступательной скорости битка и линией соударения, проходящей через центры шаров в момент их контакта. Для обозначения угла резки чаще всего используют символ α. Поэтому, чтобы избежать путаницы, я несколько иначе обозначил угол, упомянутый Кориолисом: α^*. (Переводчики же применяли для него обозначение α, а сам Кориолис – ϕ). Связь между этими углами очень проста:

$$\alpha = \pi/2 - \alpha^*. \tag{s25}$$

После удара, если пренебрегать трением между шарами, вращение не изменится: скорость $\boldsymbol{\upsilon}$ сохранит ту же самую величину и направление, но скорость $\mathbf{V}$, изменившись, получит значение $V\cos\alpha^*$ и будет направлена по горизонтальной касательной в точке удара, иными словами, она образует угол α^* с направлением

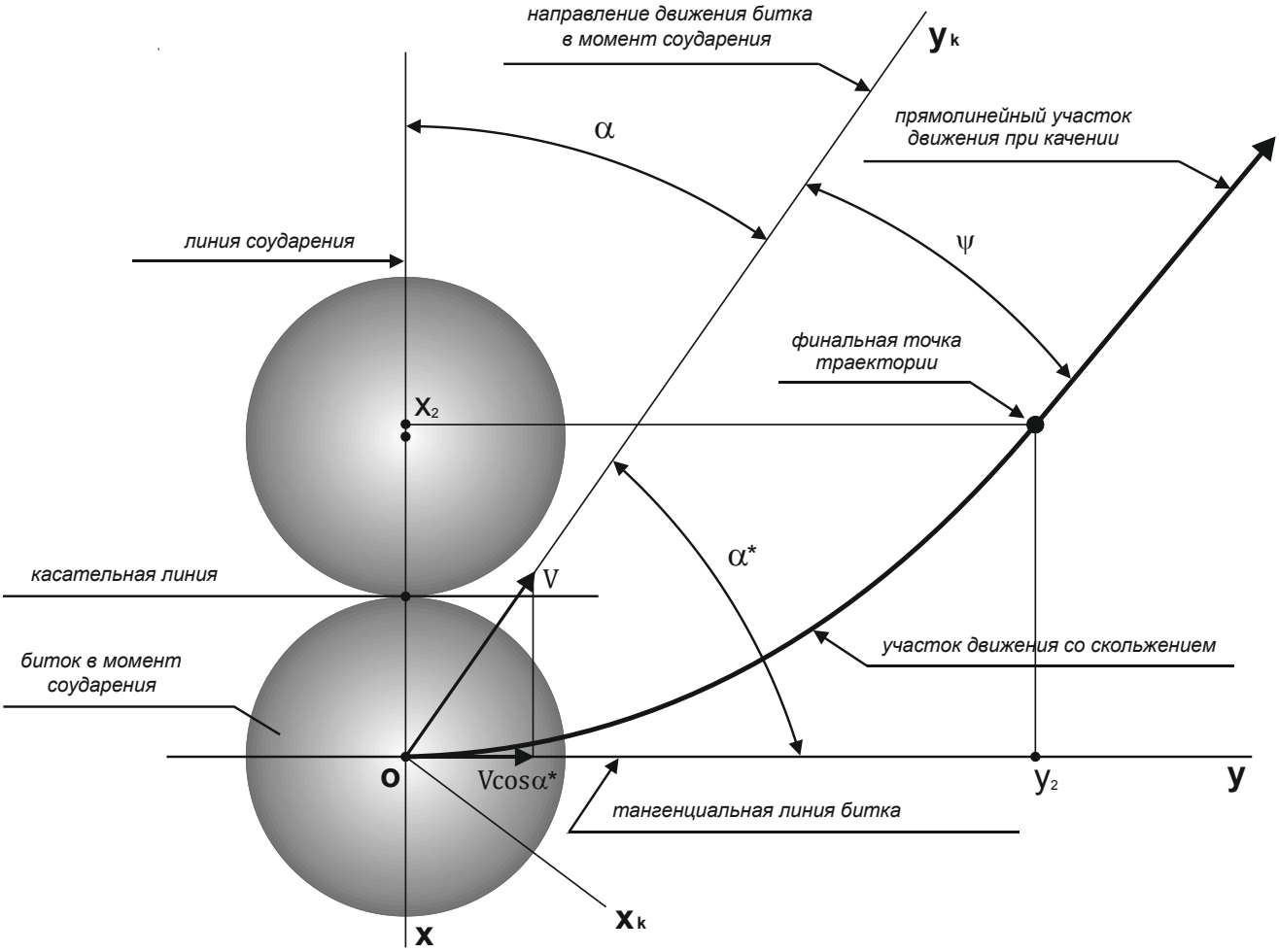
скорости $\mathbf{V}$ до удара.

Далее Кориолис исследует траектории битка после соударений с углами α^* от $\pi/2$ до 0 (то есть, от сударений «в лоб» до соприкосновений вскользь). Геометрические построения с привлечением тригонометрических соотношений позволили ему прийти к следующим выводам, относящимся к последствиям соударения шаров, при котором биток находится в состоянии естественного качения:

1) Максимальноый угол отклонения траектории битка, переходящего к качению после соударения, от направления движения бикта непосредственно перед соударением составляет $\psi = 33.75$ градуса.

2) Чтобы добиться макисмального угла ψ, необходимо соударение с углом $\alpha^* = 61.8745$ градус. Соответственно, угол резки при этом равен $\alpha = 28.1255$ градусов.

3) **При прицеливании, ставящем цель достичь максимум угла ψ, следует исходить из того, что траектория битка должна проходить приблизительно через край прицельного шара.**



Траектория битка после соударения с прицельным шаром на резке

Краткое резюме к главе 3

1. Основное предназначение этой небольшой главы заключается в довольно подробном объяснении читателям – как с помощью циркуля и линейки строить траекторию битка, отразившегося от прицельного шара.

2. Определено, что максимальный угол финального отклонения битка составляет примерно треть прямого угла, а прицеливание для его достижения тривиально – нужно лишь провести линию прицеливания через центр неподвижного битка и край прицельного шара. Пользуясь таким выводом, игроки имеют возможность весьма точно представить себе, как будет перемещаться биток после соударения.

3. Так и осталось загадкой – зачем в названии главы было использовано слово «карамболь»?!

Глава 4

О явлениях при втором ударе между двумя шарами, происшедшем на небольшом расстоянии от первого удара

Эта маленькая глава целиком посвящена построению траекторий шара с учетом того, что его повторное соударение с другим прицельным шаром происходит на малом расстоянии от точки первого соударения, в силу чего шар еще не успевает перейти к естественному качению. Графические построения на бумаге сейчас вовсе не актуальны, поэтому содержание главы не представляет практического интереса для современного читателя. Возможно, заинтересоваться могут лишь любители начертательной геометрии. Если так, то они вполне могут обратиться к авторскому первоисточнику.

Глава 5

Об ударе двух шаров с учетом трения между шарами во время удара, неабсолютной упругости и неравенства масс

Хотя бильярдные шары можно считать абсолютно упругими, но все же, поскольку это свойство может не быть вполне совершенным в некоторых шарах, можно для завершения теории предусмотреть случай несовершенной упругости. Все то, что мы скажем, можно с такой же легкостью применить и к неравенству масс обоих шаров, потому что она приводит к совершенно аналогичным результатам.

Если шары не являются абсолютно упругими, то свой шар, вместо того чтобы отдать всю нормальную составляющую скорости, сохранит некоторую ее часть; если допустить, что потеря живой силы при ударе будет оставаться в постоянном отношении с живой силой до удара, то это же самое будет иметь место и по отношению к нормальной составляющей скорости, которая до удара равнялась $V \sin \alpha^*$, а после удара обратилась в $k V \sin \alpha^*$, где k представляет весьма малый коэффициент, значение которого будет

$$k = 1 - \sqrt{1 - 2\theta}\,.$$

или приблизительно $k = \theta$, где θ представляет потерю живой силы при ударе. (*Корректность учета неабсолютной упругости с помощью такого коэффициента выглядит довольно спорной. Действительно, при $\theta = 0.13$ коэффициент k принимает значение, примерно равное 0.14, а реальность показывает, что это весьма далеко от истины*).

Мы сказали, что обычно возможно пренебрегать трением, имеющим место между шарами во время удара; однако поскольку этого нельзя делать при некоторых ударах и, кроме того, не все шары одинаково гладки и имеются такие, для которых это трение более значительно, то мы в этой главе учтем его влияние.

Формулы и построения, которые мы установим, послужат, кроме того, с очень небольшими изменениями при исследовании удара о борт, где трением никогда не приходится пренебрегать,

Учитывая взаимное трение шаров, мы можем совершенно пренебрегать тем трением, которое во время удара производится между сукном и опорными точками шаров, поскольку это трение может получиться только от вертикальной составляющей количества движения, но эта вертикальная составляющая происходит только лишь от трения между шарами, которое является очень малым, как это следует из опытов, описанных нами выше. С еще большим правом мы пренебрежем весьма малой вертикальной скоростью, которую центры шаров могут приобрести вследствие этого трения, так как получающийся результат или уничтожается сопротивлением бильярдного сукна, или делается неощутимым вследствие веса шаров, заставляющего их сейчас же опускаться на сукно, которое они, таким образом, по существу и не покидают.

Проводя дальнейший анализ изменения параметров движения битка при соударении, Кориолис пользуется системой координат $\mathbf{oxyz}$, в которой ось $\mathbf{y}$ направлена параллельно касательной, проведенной горизонтально в точке контакта шаров. Иными словами, эта ось проходит по тангенциальной линии битка (см. предыдущий рисунок). Но чтобы определить величины начальных скоростей битка в системе $\mathbf{oxyz}$, прежде всего нужно сделать пересчет – ведь поступательные и вращательные скорости обычно известны в системе координат $\mathbf{ox_k y_k z}$, которая получается из $\mathbf{oxyz}$ путем поворота относительно оси $\mathbf{z}$ на угол α^* до положения оси $\mathbf{y_k}$, проходящей по вектору поступательной скорости битка $\mathbf{V}$ непосредственно перед соударением. Формулы для пересчета весьма просты:

$$V_x = -V\sin\alpha^*,\ V_y = V\cos\alpha^*, \qquad \text{(s26)}$$

$$\upsilon_x = \upsilon_{x_k}\cos\alpha^* - \upsilon_{y_k}\sin\alpha^*,\ \upsilon_y = \upsilon_{x_k}\sin\alpha^* + \upsilon_{y_k}\cos\alpha^*,\ \omega_z = \omega_{z_k}. \qquad \text{(s27)}$$

При анализе соударения шаров Кориолис полагал, что за время контакта точка соприкосновения практически не изменяет своего положения в пространстве. Благодаря упомянутым упрощениям, ему удалось показать, что во время соударения сила трения между шарами сохраняет постоянное направление. А уже это, в свою

очередь, позволило выразить скорости битка после соударения с помощью простейших приращений (с соответствующими знаками) к значениям перед контактом шаров:

$$V_x' = 0; V_y' = V_y - u\cos\vartheta\,. \tag{s28}$$

$$\upsilon_x' = \upsilon_x - u\sin\vartheta;\ \upsilon_y' = \upsilon_y\,. \tag{s29}$$

$$\omega_z' = \omega_z - \frac{5}{2R}u\cos\vartheta\,. \tag{s30}$$

$$u = -f'V_x\,. \tag{s31}$$

$$\sin\vartheta = \frac{5}{2}\frac{\upsilon_x}{S}\,. \tag{s32}$$

$$\cos\vartheta = \frac{V_y + R\omega_z}{S}\,. \tag{s33}$$

$$S = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\upsilon_x\right)^2 + \left(V_y + R\omega_z\right)^2}\,. \tag{s34}$$

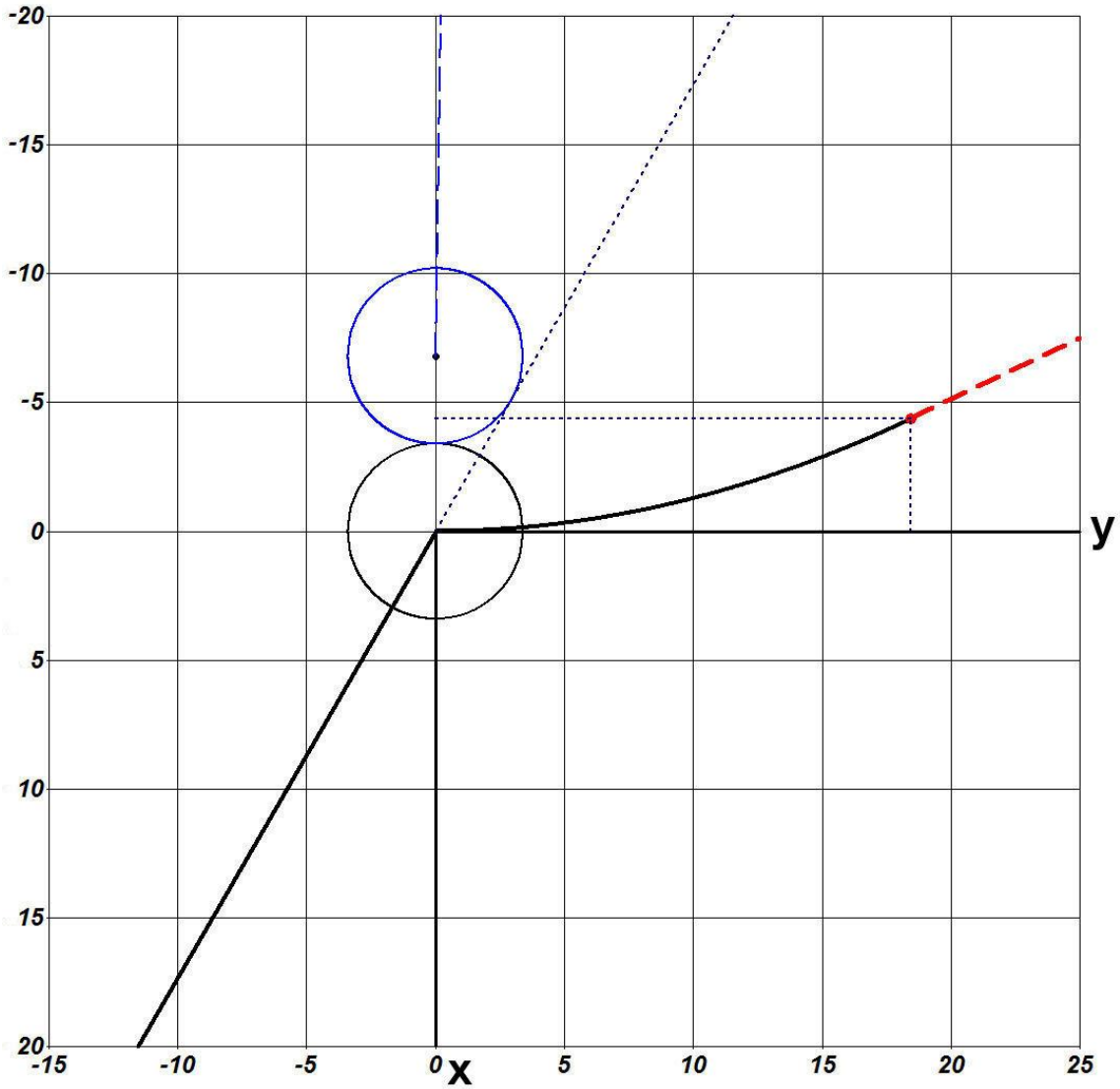
Штрихи, поставленные на местах верхних индексов в этих формулах, указывают на то, что соответствующая скорость относится к моменту, непосредственно следующему за разделением шаров.

Коэффициент трения f', присутствующий в (s31), по определению устанавливает прямую пропорциональную зависимость силы трения от силы нормального давления между шарами. В силу этого, а также с учетом того, что соударяющиеся шары одинаковы по массе, из (s31) можно заключить, что u является величиной скорости, сообщаемой шару импульсом трения. Сила трения приложена, естественно, в точке контакта; она создает импульс в вертикальной плоскости, проходящей через точку касания поверхностей шаров. Направление действия силы трения в указанной плоскости определяется углом ϑ, выражаемым равенствами (s32) – (s34). Этот угол отсчитывается от горизонтального направления, и считается положительным вверх от сукна. Следовательно, $u\cos\vartheta$ есть не что иное, как проекция скорости, сообщаемой шару импульсом трения, на горизонтальное направление, а $u\sin\vartheta$ – проекция той же скорости на вертикальное направление. Из (s33) видно, что горизонтально направленная составляющая силы трения образуется в силу проскальзывания поверхности битка относительно прицельного шара в точке соударения со скоростью $V_y + R\omega_z$. Ясно, что можно и добиться равенства нулю этой относительной скорости. Для этого следует придать битку сооветствующее боковое вращение с угловой скоростью $\omega_z = -V_y / R$. В этом случае, сила трения между шарами в горизонтальном направлении не будет действовать. О том, как нанести удар по битку, чтобы было соблюдено обсуждаемое условие, можно подробно прочитать в работе Рона Шепарда.

Чтобы наглядно и на реальных числах прочувствовать то, что выражают равенства (s28) – (s34), рассмотрим простую игровую ситуацию, которая, тем не менее, очень часто встречается на практике. Пусть, перед соударением в половину шара

($\alpha^* = 60$ градусов) биток естественно катится с поступательной скоростью $V = 2$ метра в секунду, не имея бокового вращения. Это означает, что шар обладает верхним вращением, а вращательная скорость равна 0.8 м/с (согласно (s3)); иными словами: пока за одну секунду шар перемещается по столу на 1 метр, верхний центр удара успевает «намотать» вокруг центра битка 80 сантиметров. Если же, согласно (s1), определить угловую скорость вращения $\omega = 58.82$ рад/с, то легко вычислить, что при своем естественном качении шар делает ≈ 9.36 оборота в секунду ($n = \omega/2\pi$). Использовав соотношения (s27), определим вращательные скорости в системе координат **oxyz**: $\upsilon_x =$ -0.693 м/с; $\upsilon_y = 0.4$ м/с, а с помощью (s26) – поступательные скорости: $V_x =$ -1.732 м/с; $V_y = 1$ м/с.

Обратимся теперь к соотношениям (s28) – (s34), чтобы вычислить значения скоростей битка после соударения, а затем рассчитать (по методике первой главы) и построить траекторию движения в одинаковом масштабе с изображаемыми шарами (см. следующий рисунок).



Рассчитанная траектория битка до и после соударения с прицельным шаром в состоянии естественного качения на резке в половину шара

Начнем с величины V_x, называемой нормальной составляющей поступательной скорости битка – потому, что она направлена по нормали (т.е. перпендикулярно) к поверхности прицельного шара в точке соударения. Нетрудно заметить, что в рассматриваемых расчетных соотношениях V_x встречается лишь в одном месте – при подсчете значения u в (s31). В силу того, что соударяющиеся шары идентичны (равны по массе, размерам и пр.), и в предположении об абсолютной упругости соударения, биток при контакте утрачивает скорость V_x, полностью передавая ее прицельному шару. В соответствии с этим, (s28) устанавливает, что $V_x{}' = 0$.

Поступательная скорость битка после соударения определяется из второго соотношения в (s28). Видно, что трение между шарами уменьшает компоненту скорости V_y на величину $u\cos\vartheta$. Вычисление дает следующий результат: $V_y{}' = 0.974$ м/с.

Подчеркну, что все расчеты производились с учетом постоянного значения $f' = 0.03$, рекомендованного Кориолисом. Однако, как уже отмечалось выше, современные исследования показали, что величина f' зависит от V_y, причем эта зависимость нелинейна. В частности, при рассматриваемой нами скорости $V_y = 1$ м/с, методика Уэйлэнда Марлоу позволяет определить, что $f' \approx 0.065$, а это значение более, чем в два раза превосходит константу Кориолиса $f' = 0.03$.

Перейдем теперь к вращательным скоростям. Прежде всего, нужно отметить, что компоненты υ_x и υ_y отличны от нуля. Это означает, что если тривиальное продольное вращение битка рассматривать с привязкой к системе координат $\mathbf{oxyz}$, то оно трансформируется в два накладывающихся друг на друга вращения: одно – вокруг оси $\mathbf{x}$, характеризуемое вращательной скоростью υ_y, и другое – вокруг оси $\mathbf{y}$, интенсивность которого определяется величиной υ_x. На самом же деле, никаких двух вращений нет, ведь биток совершенно «не осведомлен» о существовании каких-то осей – он просто вращается вокруг неведомой ему единственной оси и всё! Но вот для того, кто анализирует происходящее, разложение вращения на составляющие играет весьма важную роль. Казалось бы, увеличение количества рассматриваемых осей, вокруг которых поворачивается шар, должно только усложнять понимание. Ведь обычно, при решении научных и технических задач, увеличение количества переменных или размерности приводит к дополнительным трудностям. Однако, в нашем случае – при анализе соударения шаров, это вовсе не так. И, прежде всего, это связано с тем, что вращение битка вокруг оси $\mathbf{x}$ не приводит к возникновению трения между шарами. Действительно, за счет такого поворота поверхность битка не перемещается относительно поверхности прицельного шара, и, соответственно, трения нет. Отсюда следует, что при соударении вращательная скорость υ_y не меняется, что и видно из (s29). Вращение битка вокруг оси $\mathbf{y}$ приводит к тому, что в точке контакта его поверхность перемещается по отношению к прицельному шару в вертикальном направлении. Следовательно, порождается и соответствующая вертикальная компонента силы трения, которая замедляет скорость υ_x (см. первое из

соотношений (s29): $\upsilon_x{}' = -0.648$ м/с.

Благодаря наличию горизонтальной компоненты силы трения, биток приобретает боковое вращение. Согласно (s30), его угловая скорость принимает значение $\omega_z{}' = -1.91$ рад/с, что соответствует 0.3 полного оборота в секунду. Знак минус у величины $\omega_z{}'$ говорит о том, что биток вращается против хода стрелки часов, если смотреть сверху (соответственно, ось такого вращения направлена от шара к игровой поверхности). Таким образом, в рассматриваемом случае соударения на правой резке (при которой точка соударения шаров видна игроку правее центра прицельного шара) биток приобретает правое боковое вращение. Если бы была рассмотрена левая резка, то биток заручивался бы влево. Обобщая, можно дать такую формулировку: ***направление бокового вращения, приобретаемого битком за счет трения при соударении с прицельным шаром, совпадает с направлением резки***.

Рассчитанная траектория движения битка после соударения построена на представленном выше графике. Участок траектории, изображенный черным цветом, соответствует движению со скольжением по сукну, а пунктирной линией красного цвета – движению с естественным качением. Точка окончания этапа скольжения (финальная точка траектории, как ее называет Кориолис) удалена от положения центра битка в момент соударения на 18.46 см по оси $\mathbf{y}$ и на -4.37 см по оси $\mathbf{x}$. В этой точке биток обладает поступательной скоростью, равной 1.085 м/с. Соответственно, вращательная скорость верхнего центра шара составляет 0.434 м/с, и при продольном вращении биток совершает 5.08 оборота в секунду. Прямолинейный участок траектории, на котором биток катится по сукну, наклонен к направлению его движения перед соударением с прицельным шаром под углом 34.76 градуса. Следует заметить, что эта величина превосходит значение угла $\psi = 33.75$ градуса, найденное в главе 3. И такое отличие – следствие действия трения между шарами.

До сих пор рассматривалось воздействие силы трения лишь на биток. Однако, согласно третьему закону Ньютона, при соударении шаров действует пара равных по величине, но противоположно направленных сил трения, каждая из которых приложена к «своему» шару. Это значит, что с помощью представленных выше уравнений (s26) – (s34) можно без особых затруднений получить соотношения, определяющие скорости, которые приобретает прицельный шар при соударении. Для этого воспользуемся системой координат $\mathbf{o}_\Pi\mathbf{x}_\Pi\mathbf{y}_\Pi\mathbf{z}_\Pi$, начало которой $\mathbf{o}_\Pi$ расположено в центре покоящегося до соударения прицельного шара. Ось $\mathbf{y}_\Pi$ направлена по линии соударения шаров в сторону последующего движения прицельного шара, ось $\mathbf{z}_\Pi$ – вертикально вверх, а ось $\mathbf{x}_\Pi$ дополняет систему координат до правой системы. Соотношения для скоростей прицельного шара таковы:

$$V_{y_\Pi}{}' = V \sin \alpha^*;\ V_{x_\Pi}{}' = u \cos \vartheta\ . \tag{s35}$$

$$\upsilon_{y_\Pi}{}' = u \sin \vartheta;\ \upsilon_{x_\Pi}{}' = 0\ . \tag{s36}$$

$$\omega_{z_\Pi}{}' = \frac{5}{2R} u \cos \vartheta\ . \tag{s37}$$

Если использовать величины, определяемые равенствами (s35) – (s37), в качестве начальных скоростей прицельного шара, то с помощью методики, изложенной в главе 1, нетрудно рассчитать и его траекторию. Понятно, что в общем случае движение на начальном этапе скольжения будет происходить по параболической траектории. Однако, проведенный анализ показал, что искривленность траектории настолько незначительна, что ею вполне можно принебречь и считать, что прицельный шар сразу же движется по прямой линии. Из (6), (s5), (s35), (s36) нетрудно выразить угол наклона траектории прицельного шара к линии соударения $\psi_п$:

$$\mathrm{tg}\,\psi_п = u\cos\vartheta / (V\sin\alpha^* + u\sin\vartheta)\ . \qquad (s38)$$

Отличие величины угла $\psi_п$ от нуля, свидетельствующее об отклонении прицельного шара от линии соударения, в бильярдной теории называют эффектом отброса прицельного шара (ЭОПШ). Кориолис не исследовал этого явления, но оно автоматически следует из его формул. Подробнее с ЭОПШ и его проявлениями можно ознакомиться, обратившись к работам Рона Шепарда и Доктора Дэйва.

Расчеты с теми же самыми исходными данными, которые использовались выше для битка, показывают, что угол $\psi_п$ составляет 0.657 градуса. Это значит, что прицельный шар, пройдя по столу один метр, отклонится в сторону резки на 1.15 сантиметра. При своем движении он будет обладать приобретенным боковым вращением с такой же интенсивностью, что и у битка, то есть 0.3 оборота в секунду. Причем, и направления боковых вращений шаров будут одинаковыми. А это значит, что ***направление бокового вращения, приобретаемого прицельным шаром за счет трения при соударении, совпадает с направлением резки***. На представленном выше рисунке траектория прицельного шара показана синей штриховой линией.

Краткое резюме к главе 5

1. Получены соотношения (s26) – (s34) для расчета скоростей битка (поступательных и вращательных) после его соударения с прицельным шаром.

2. За счет действия трения между шарами, угол отклонения финальной части траектории битка от направления его движения перед соударением несколько увеличивается по сравнению с теоретической величиной, найденной без учета трения.

3. Получены соотношения (s35) – (s37) для расчета скоростей прицельного шара (поступательных и вращательных) после того, как произойдет его соударения с битком.

4. При соударении на резке биток и прицельный шар приобретают боковые вращения одинаковой интенсивности, обусловленные действием трения между шарами.

5. Придавая битку при ударе боковое вращение опреленной интенсивности, можно добиваться того, что при соударении шаров горизонтальная составляющая трения будет отсутствовать. В таких случаях прицельный шар будет перемещаться без сдвига от линии соударения.

Глава 6

Об ударе о борт или непосредственно, или после другого удара

Рассмотрим, что происходит, когда свой шар ударяется о борт, причем его центр имеет скорость V, образующую с бортом угол α, а вращательное движение определяется элементами Rp, Rq, Rr, отнесенными к системе осей $\mathbf{oxyz}$, в которой ось $\mathbf{y}$ идет по борту (в ту сторону, в которую направлен вектор поступательной скорости шара $\mathbf{V}$ перед соударением), а ось $\mathbf{x}$ направлена в сторону бильярда. Начало системы $\mathbf{o}$ расположено в центре шара, а ось $\mathbf{z}$ направлена вертикально вверх.

Чтобы получить элементы движения после удара, обозначим через ε некоторый дробный числовой коэффициент, такой, что нормальная скорость шара, восстановленная после удара о борт, будет определяться выражением $\varepsilon V \sin\alpha$ (*таким образом, ε является коэффициентом восстановления при ударе бильярдного шара о борт; примечание переводчика*).

Количество движения, сообщенное шару от борта во время удара, будет $V \sin\alpha\,(1+\varepsilon)$(*Кориолис берет разность проекций на ось* $\mathbf{x}$ *количеств движения шара после удара и до удара, причем массу шара здесь, как и в дальнейшем, он принимает равной единице; примечание переводчика*).

Если f_1 представляет коэффициент трения во время удара о борт, то количество движения, происходящее от трения при ударе, будет $f_1(1+\varepsilon)\,V \sin\alpha$.

Положим для сокращения $f_1(1+\varepsilon) = f''$, тогда это количество движения будет $f''V \sin\alpha$.

Далее мы укажем способ, при помощи которого можно определить коэффициент f_1 из опытов на бильярде.

Из этих опытов мы нашли, что коэффициент f_1 нужно взять несколько меньшим того, который получается в случае простого давления от веса шара при его движении по сукну, и равным приблизительно пятой части количества движения, произведенного во время удара.

Подвешивая шар к нити и заставляя его ударять в борт, к которому он подходил, когда нить находилась в вертикальном положении, мы нашли из более чем пятидесяти опытов, что для скоростей от 0.20 м/с до 7.00 м/с коэффициент ε остается достаточно близким к значению 0.55. Для небольших скоростей он близок к 0.60, затем он несколько уменьшается и доходит до 0.50 для скорости 7.00 м/с.

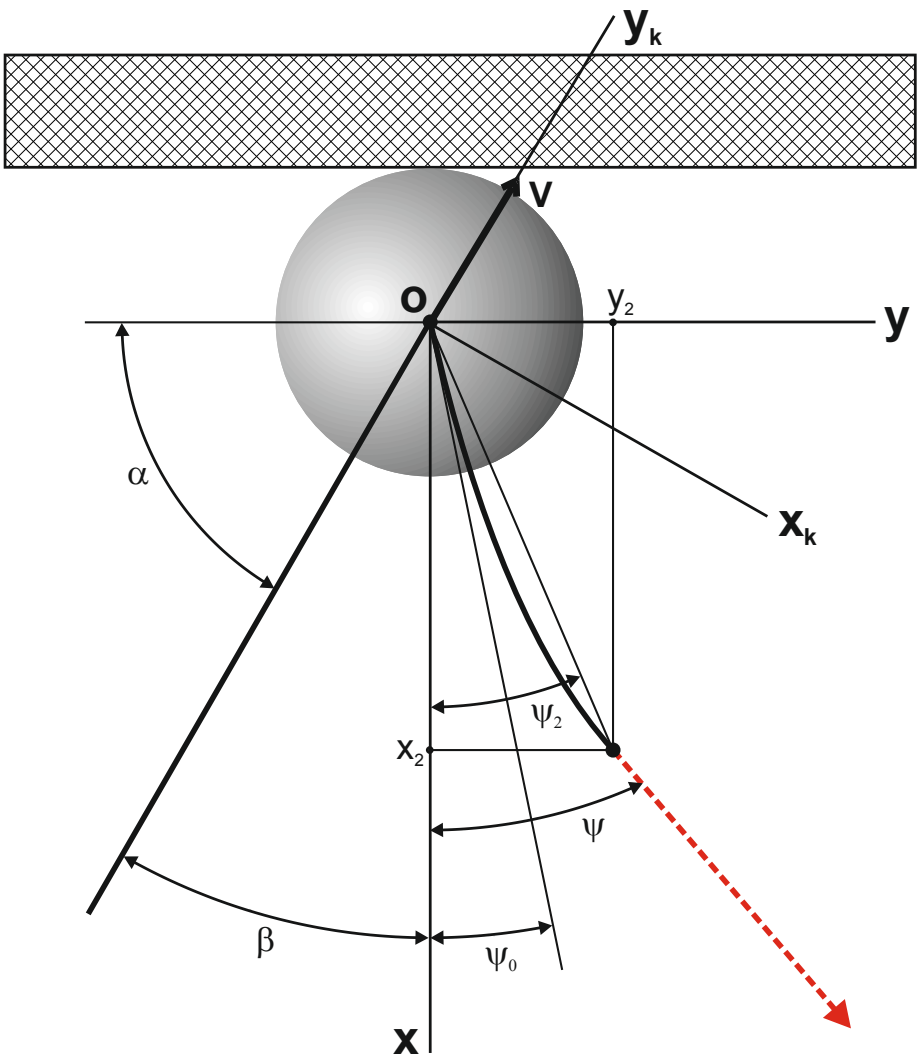
Так как вследствие формы бортов точка удара находится приблизительно на высоте центра шара (*для современных бортов это вовсе не так*), то направление трения определится углом ϑ, который скорость в точке удара составляет с направлением борта с той его стороны, где находится составляющая скорости шара по направлению борта; мы будем считать этот угол положительным вверх от сукна и отрицательным вниз. Значения $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$ выражаются здесь совершенно так же, как

и в случае удара двух шаров.

Движение шара до соударения с бортом удобно рассматривать в системе координат $\mathbf{ox_k y_k z}$, связанной с траекторией (см. рисунок). При анализе же соударения следует «привязаться» к борту, пересчитав скорости:

$$V_x = -V\sin\alpha,\ V_y = V\cos\alpha, \tag{s39}$$

$$\upsilon_x = \upsilon_{x_k}\cos\alpha - \upsilon_{y_k}\sin\alpha\ ,\ \upsilon_y = \upsilon_{x_k}\sin\alpha + \upsilon_{y_k}\cos\alpha\ ,\ \omega_z = \omega_{z_k}. \tag{s40}$$



Соударение шара с бортом

Соударение с упругим бортом изменяет параметры движения шара следующим образом:

$$V_x' = -\varepsilon V_x;\ V_y' = V_y - u\cos\vartheta\ . \tag{s41}$$

$$\upsilon_x' = \upsilon_x - u\sin\vartheta;\ \upsilon_y' = \upsilon_y\ . \tag{s42}$$

$$\omega_z' = \omega_z - \frac{5}{2R}u\cos\vartheta\ . \tag{s43}$$

$$u = -f_1(1+\varepsilon)V_x. \tag{s44}$$

$$\sin\vartheta = \frac{5}{2}\frac{\upsilon_x}{S}. \tag{s45}$$

$$\cos\vartheta = \frac{V_y + R\omega_z}{S}. \tag{s46}$$

$$S = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\upsilon_x\right)^2 + \left(V_y + R\omega_z\right)^2}. \tag{s47}$$

Учитывая результаты этой главы, можно определить опытным путем коэффициент трения f_1 при ударе о борт, если коэффициент ε уже известен.

Для этого нужно играть шаром перпендикулярно к борту, нанося удар сбоку (*придавая боковое вращение*) на высоте центра и помещая шар достаточно близко к борту, чтобы он подошел к нему в состоянии скольжения. Если удар кием наносится несколько дальше от борта, то достаточно будет ударить по шару немного ниже центра, для того чтобы шар подошел к борту в состоянии скольжения. Если через ψ обозначить угол, который обратный ход образует с нормалью к борту, то легко видеть из формул или построений, что

$$\operatorname{tg}\psi = f_1\frac{(1+\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Этот тангенс можно будет получить из опыта, наблюдая точку, в которой шар коснется противоположного борта. Таким образом, зная ε, можно будет получить значение f_1. Так как трудно быть уверенным в том, что шар подходит к борту в состоянии скольжения, то опыт нужно повторять большое число раз, определяя каждый раз тангенс угла с нормалью. Так как ε меняется достаточно мало для различных скоростей, то мы ошибемся незначительно, если будем считать ε постоянным для различных ударов кием, которые нужно давать с возможно постоянной силой; таким образом, $\operatorname{tg}\psi$ будет изменяться лишь вследствие горизонтального (*продольного*) вращения, то есть от значения υ. Но так как максимальное значение $\operatorname{tg}\psi$ получает при $\upsilon = 0$, как это показывают разобранные в этой главе построения, то, следовательно, наблюдая это максимальное значение среди большого числа ударов, мы сможем действительно получить $\operatorname{tg}\psi = f_1(1+\varepsilon)\ /\ \varepsilon$, что даст f_1 при помощи ε. Именно таким образом я и пришел к значению $f_1 = 0.20$.

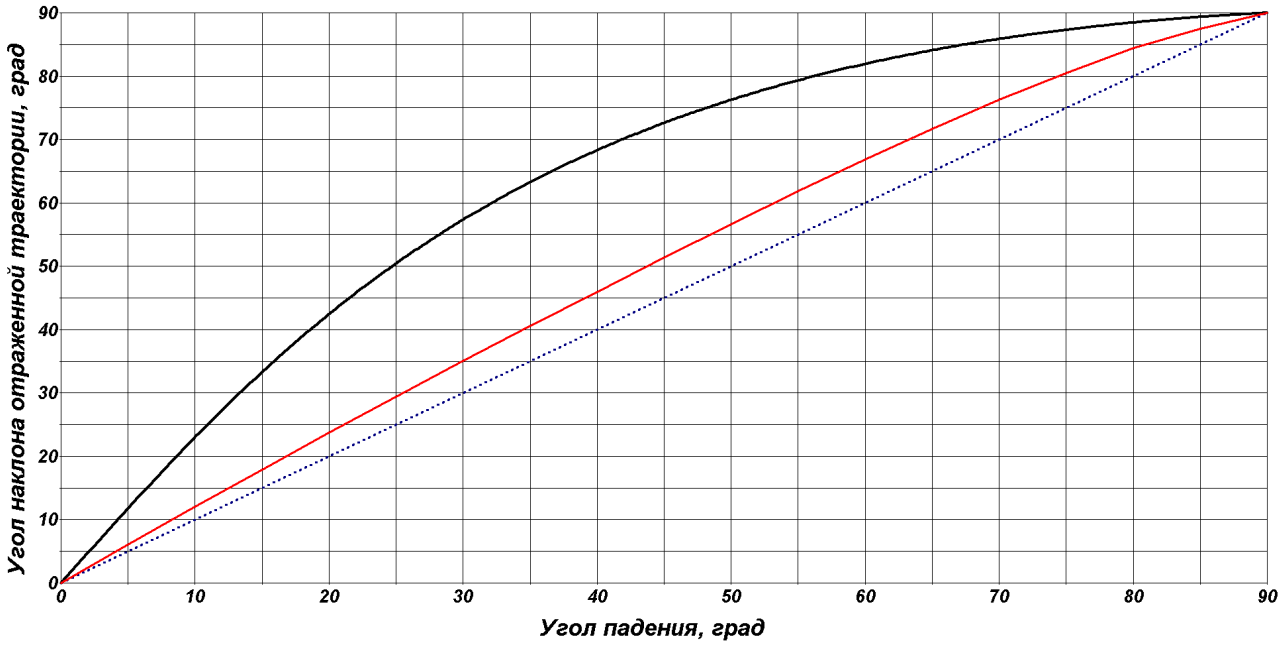
В современных теоретических исследованиях, соударения шара с бортом обычно характеризуют углом падения β, который образуется вектором поступательной скорости $\mathbf{V}$ и перпендикуляром к борту (в данном случае – осью $\mathbf{x}$). Вполне возможно, и Кориолис поступил бы так же; но он, видимо, стремился к тому, чтобы полученные соотношения (s41) – (s47) по своей форме повторяли ранее найденные зависимости (s28) – (s34). Ну что же, почти во всем ему это удалось сделать. Из рисунка видно, что углы β и α связаны простейшим образом:

$$\beta = \pi/2 - \alpha. \qquad (s48)$$

Когда речь заходит об углах падения чего-либо, человеку свойственно тут же задуматься и об углах отражения. Уже начиная со школы, нас всех настойчиво приучали свыкнуться с тем, что углы падения и отражения равны. В качестве примеров при этом приводилось отражение света от зеркальной поверхности и отражение электромагнитных волн от диэлектриков. А как обстоит с этим дело в бильярде? Вроде бы, вопрос – простой, и ответ на него давно дан. Так, еще А.И.Леман утверждал, что если у шара нет бокового вращения, то угол падения равен углу отражения. И до сих пор практически все игроки так и полагают. Однако, возникает вопрос: «А что, собственно, все они понимают под углом отражения»? Действительно, если проанализировать траекторию отраженного бортом шара на предыдущем рисунке (начальный параболический участок которой, как и ранее, изображен черным цветом, а финальный – штриховой прямой линией красного цвета), то кажущаяся полная ясность вполне может переродиться в туман. Разумно ли под углом отражения понимать начальный угол отклонения траектории шара ψ_0 от оси $\mathbf{x}$ непосредственно после разъединения с бортом? Вроде бы, такой выбор логичен, но чем угол ψ_0 может быть интересен игроку в практическом смысле? Ответ прост – по большому счету, ничем. Может быть, углом отражения следует считать угол наклона траектории шара ψ к оси $\mathbf{x}$ при качении? Действительно, при выполнении бортового удара игроков обычно интересует положение той точки на противоположном борту, в которую прикатится шар. И именно угол ψ позволяет прогнозировать это местоположение. Но, к сожалению, помимо угла ψ, на это будут влиять еще и координаты финальной точки x_2, y_2. Поэтому, и выбор угла ψ не оптимален. Можно, наконец, попытаться найти компромисс и под углом отражения понимать угол ψ_2, образованный осью $\mathbf{x}$ и прямой линией, проходящей через финальную точку x_2, y_2. Но нетрудно заметить, что такой выбор будет довольно искусственным. На мой взгляд, из трех указанных углов ψ_0, ψ, ψ_2 в качестве угла отражения наиболее логично рассматривать ψ. Тем не менее, вопрос так и остается открытым. Вероятно, в теории бильярда следует видоизменить или даже изъять само понятие «угла отражения».

Чтобы понять, насколько точно модель (s39) – (s47), полученная Кориолисом, отражает движение шара после отражения от борта, были проведены расчеты для простой игровой ситуации. Были рассмотрены соударения, при которых шар естественно катился по столу и встречался с бортом под различными углами падения β. Игровая практика показывает, что от расчетов следовало ожидать (с той или иной точностью) примерных равенств $\beta \approx \psi$. Однако, на поверку это оказалось вовсе не так, что и подтверждает следующий график. На нем черным цветом представлена зависимость ψ от β, а синей штриховой линией – ожидаемая зависимость, соответствующая равенству $\psi = \beta$. Отличия расчетных значений ψ от ожидаемых настолько велики, что можно, не сомневаясь, сделать вывод о том, что для получения хотя бы более-менее адекватных результатов применять модель Кориолиса

бессмысленно. Следует воспользоваться какой-либо иной моделью. Но, к сожалению, в этом вопросе теория бильярда продвинулась не столь значительно, как это было бы нужно. Могу порекомендовать ознакомиться с моделями И.Хана, а также С.Матхэвена, М.Р.Джексона и Р.М.Паркина. К примеру, расчет с помощью модели И.Хана приводит к зависимости ψ от β, изображенной на рисунке линией красного цвета. Сказать, что модель Хана дает гораздо лучшее приближение к действительности, чем модель Кориолиса – значит не сказать практически ничего.



Зависимости угла наклона ψ траектории шара, отраженного бортом, от угла падения шара на борт β

Краткое резюме к главе 6

1. Получены соотношения (s39) – (s47) для расчета скоростей шара (поступательных и вращательных) после его соударения с упругим бильярдным бортом.

2. При построении математической модели Кориолис полагал, что соударение шара с бортом происходит на высоте, равной радиусу шара. Подобные конструкции бортов в настоящее время не применяются. В соременных бортах рабочая кромка поднята над центром шара примерно на четверть радиуса, что обусловливает пространственный характер действия трения при соударении (а не плоский характер, который учитывал Кориолис).

3. Применяемое в теории и практике бильярдной игры понятие угла отражения нуждается в серьезной корректировке.

4. Проведенные расчеты показали, что представленная Кориолисом модель приводит к результатам, не согласующимся с практикой игры.

Глава 7

Частный случай, когда нужно видоизменить формулы и построения, относящиеся к действию трения во время удара

Если точка своего шара, которая ударяет или в другой шар, или в борт, имеет собственную скорость, направление которой с нормалью в точке удара образует угол, меньший некоторого предела, то явления движения изменят свой характер. Действие трения во время удара уже не будет состоять в сообщении шару некоторого количества движения в постоянном отношении f_1 к количеству движения, которое получилось по направлению нормали в точке соприкосновения обоих тел; оно будет заставлять точку движущегося шара, коснувшуюся другого тела, сцепляться с этим телом и отделяться от него не в результате скольжения, а только при вращении. В этом случае трение можно будет уподобить количеству движения, которое способно уничтожить касательную скорость в точке соприкосновения.

Математически формализуя сказанное выше, Кориолис внес поправки в соотношения для расчета скоростей шара после его соударения с бортом, а также после соударения с другим шаром. Так, при использовании (s41) – (s47), уравнение (s44) в общем случае принимает вид

$$u = \begin{cases} -f_1(1+\varepsilon)V_x\,, \text{если } |f_1(1+\varepsilon)V_x| \le \frac{2}{7}S, \\ \frac{2}{7}S\,, \text{если } |f_1(1+\varepsilon)V_x| > \frac{2}{7}S\,. \end{cases} \tag{s49}$$

Для расчета же соударения шаров по соотношениям (s28) – (s34), общий вид уравнения (s31) таков:

$$u = \begin{cases} -f'V_x\,, \text{если } |f'V_x| \le \frac{2}{7}S, \\ \frac{2}{7}S\,, \text{если } |f'V_x| > \frac{2}{7}S\,. \end{cases} \tag{s50}$$

Глава 8

О действии удара наклонным кием

Если кию дать некоторый наклон по отношению к сукну, то происходит двойной удар: один – между кием и шаром, другой – между шаром и сукном. Если мы хотим определить движение шара, то нужно иметь в виду оба этих одновременных удара.

Мы сошлемся здесь на то, что в начале второй главы мы сказали о направлении количества движения, происходящего при ударе; в соответствии со сказанным, мы берем его по направлению удара, иными словами – совпадающим с продольной осью кия.

Мы назовем *линией удара* прямую, проведенную через ту точку, в которой кий ударяет шар (точку удара), по направлению оси кия, а *вертикальной плоскостью удара* – вертикальную плоскость, проведенную через линию удара.

Введем следующие обозначения.

Q – количество движения, возникшее от удара кием по направлению линии удара. Если через V_1 обозначить скорость, которую получил бы центр шара под действием того же самого удара кием, выполненного в той же самой точке, при условии, что удар о сукно не изменяет этой скорости, то $Q = MV_1$.

μ – угол, который направление удара образует с плоскостью сукна.

h – горизонтальное расстояние между центром шара и вертикальной плоскостью удара (расстояние считается положительным, если эта плоскость проходит вправо от центра, и отрицательным, если она проходит влево).

k – расстояние между линией удара и горизонталью, проведенной через центр перпендикулярно вертикальной плоскости удара; k считается положительным, когда линия удара проходит выше этой горизонтали, и отрицательным, когда она проходит ниже нее.

Исходные соотношения Кориолис получает, пользуясь принципом пропорциональности между количествами движения, получившимися в результате действия движущих сил, и произведенными ими скоростями. При этом он не использовал уравнения, относящегося к вертикальной скорости, которую мог бы получить шар вследствие упругости сукна. Эта упругость достаточно мала, и можно пренебрегать получающейся от нее скоростью при обычных ударах кием, когда угол удара не слишком велик и сам удар не очень силен. Но, кроме того, при подскакивании шара скорости V_{1_x}, V_{1_y}, p_1, q_1, r_1 одинаково относятся как к мгновению, когда шар снова падает на плоскость, так и к тому мгновению, когда он покидает ее, поскольку за соответствующий промежуток времени эти количества не изменились бы. Упругость может только увеличить трение при ударе, потому что она связана с количеством движения, потерянным в результате вертикального удара. Но так как (мы увидим это далее) величина трения не влияет на основные результаты, которые мы дадим, то же самое можно сказать и об упругости бильярдной плоскости, которая возвратила бы шару некоторое количество движения по вертикали. Таким образом, действие этой упругости, если она заставит шар подскочить, будет заключаться в том, что она несколько изменит координаты точки начала движения шара, которая должна будет теперь совпадать с той точкой, где шар снова падает на сукно; кроме того, она изменит то, что специально определяется величиной трения во время удара. Опыт показывает, что подскакивания не бывает при ударах кием обычной силы, когда кий не держат слишком наклонно.

Если бы удар был произведен очень наклоненным кием, и сукно обладало упругостью, достаточной для того, чтобы шар немного подскочил после удара, то следовало бы рассмотреть и вертикальную скорость, получившуюся после удара; если мы обозначим ее через V_z и положим, что ε представляет ту долю вертикальной составляющей скорости, которая восстановилась после удара, то будем иметь $V_z =$

$\varepsilon V_1 \sin \mu$. Коэффициент f_1 в этом случае должен быть изменен в $f_1(1+\varepsilon)$.

Кроме того, нужно заметить, что значения основных элементов V_x, V_y, p, q, r, имевшие место непосредственно после удара в то мгновение, когда шар, подпрыгивая, покидает сукно, не испытают никакого изменения во время пребывания шара в воздухе и что в той точке, куда упадет шар, он будет обладать теми же самыми основными элементами движения. Поэтому, достаточно будет взять их же в той точке, куда упадет шар, и учесть новый удар, происшедший при этом падении, для того чтобы определить также и путь шара, начиная от этой точки. В построениях, которые будут указаны дальше для получения пути шара при помощи этих элементов, новым будет лишь то, что их придется производить, исходя из той точки сукна, куда упадет шар. Эта точка будет находиться на направлении геометрической суммы величин V_{1_x} и V_{1_y}.

При промежуточном анализе Кориолис показал, что:

1. ***Шар пойдет по прямой линии в направлении кия в том случае, если это направление будет горизонтальным, или же в случае, если оно не будет горизонтальным, то только тогда, когда вертикальная плоскость удара будет проходить через центр шара***.

2. ***Шар будет двигаться криволинейно всякий раз, когда кий не будет горизонтальным и вертикальная плоскость удара не будет проходить через центр шара***.

3. ***Всякий раз, когда кий держат наклонно и вертикальная плоскость удара не проходит через центр шара, последний будет описывать кривую линию, уводящую его от направления удара в ту сторону, где расположена точка удара,*** **или, короче говоря,** ***шар отклонится от направления удара в ту сторону, с которой был нанесен удар***.

Помимо этого, Кориолис нашел, что угол финального отклонения ψ можно определить из равенства

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{h \operatorname{tg} \mu}{l}. \qquad \text{(s51)}$$

Отсюда следуют два любопытных вывода:

1. Мы приходим к очень простому следствию, что *финальное направление движения шара параллельно линии, идущей от его точки опоры к той точке, в которой линия удара пересекает плоскость бильярдного сукна.*

2. На основании этой теоремы, *шар в конечном счете должен будет пойти назад, то есть возвратиться, двигаясь в направлении, противоположном направлению начальной скорости, если линия удара пересечет плоскость бильярда по эту сторону опорной точки.* В этом последнем случае, как мы покажем дальше, при обычных условиях игры такое движение невозможно, потому что оно требует, чтобы после удара кий уже не касался шара, а это обстоятельство не будет иметь места, если удар произведен очень наклонно и не нанесен слишком низко, в непосредственной близости от горизонтального экватора или если игрок не проявляет очень большой ловкости для того, чтобы убрать кий назад сейчас же после удара.

Указанные выводы Кориолиса дают игроку простую в применении и весьма наглядную схему для прицеливания при выполнении ударов массе. На мой взгляд, эта схема даже в чем-то красива. Однако, следует предупредить читателей о том, что ее «прямое» применение на практике не будет приводить именно к тем последствиям, которые озвучил Кориолис. И причиной тому – проявление в реальной игре так называемого эффекта сноса битка, который при существенно наклонных ударах будет весьма серьезно противодействовать криволинейному движению шара именно по траектории, определенной Кориолисом. Снос битка заключается в том, что при нецентральном ударе (как при наклонном, так и при горизонтальном) появляется импульс, стремящийся сдвигать траекторию шара в сторону, противоположную боковому смещению точки удара относительно вертикальной плоскости, проходящей через центр шара. Подробно ознакомиться с физикой и математикой этого эффекта можно в работах Рона Шепарда и Рода Кросса.

Показав, что за время удара сила трения между шаром и сукном не может изменить направления своего действия, Кориолис получил соотношения для расчета начальных скоростей, приобретаемых шаром:

$$V_{1_x} = \delta \sin \gamma \,. \tag{s52}$$

$$V_{1_y} = V_1 \cos \mu + \delta \cos \gamma \,. \tag{s53}$$

$$\delta = f_1 V_1 \sin \mu \,. \tag{s54}$$

$$\sin \gamma = \frac{h}{\rho} \,. \tag{s55}$$

$$\cos \gamma = \frac{k - 0.4R \cos \mu}{\rho \sin \mu} \,. \tag{s56}$$

$$\rho = \sqrt{h^2 + \left(\frac{k - 0.4R \cos \mu}{\sin \mu}\right)^2} \,. \tag{s57}$$

$$k = (l - R) \sin \mu \,. \tag{s58}$$

$$\upsilon_{1_x} = V_1 \frac{k}{R} - \delta \cos \gamma \,. \tag{s59}$$

$$\upsilon_{1_y} = -V_1 \frac{h \sin \mu}{R} + \delta \sin \gamma \,. \tag{s60}$$

$$\omega_{1_z} = -\frac{5}{2} V_1 \frac{h}{R^2} \cos \mu \,. \tag{s61}$$

Установленное выше предложение, что финальный путь шара после наклонного удара кием не зависит от величины трения, или, иными словами, от величины вертикального количества движения $V_1 \sin \mu$, с которым шар ударяется о сукно, может быть без затруднений распространено и на случай удара о борт. Таким образом, мы убеждаемся в том, что в случае удара шара о борт мы не сделали никакой ошибки в определении направления финального пути шара, отвлекшись от вертикального количества движения, обусловленного трением во время удара. Что касается

криволинейной части траектории шара, то на нее это вертикальное количество движения оказывает небольшое влияние.

Однако есть один удар, при котором нельзя пренебрегать этим вертикальным количеством движения, – это когда шар идет в среднюю лузу. Тогда можно видеть, что в случае прямого вращения шар, немного приподнимаясь от действия удара, не упадет в лузу, если скорость в мгновение удара была несколько велика. Наоборот, если вращение является обратным, то шар, не опираясь на сукно в то мгновение, когда он отражается от борта, будет стремиться упасть еще быстрее; он может попасть в лузу, обладая скоростью, которая в предыдущем случае заставила бы его перескочить через лузу. Таким образом, при равных скоростях свой шар всегда больше рискует попасть в среднюю лузу, если он подходит к ней, имея обратное вращение. *(Этот абзац свидетельствует о том, что при разработке своей теории Кориолис не ориентировался исключительно на карамбольные столы, как это нередко считается).*

Имеется один частный случай, когда при изучении удара наклонным кием нужно видоизменить построения, совершенно так же, как согласно уже сказанному нами выше нужно было это делать при ударе шара о борт.

Этот случай представляется тогда, когда трение сукна о шар во время удара достаточно для того, чтобы задержать точку опоры шара и заставить шар сцепиться с сукном без скольжения во время удара. Указанное условие выражается математически следующим образом: $\rho < \frac{7}{5} V_1 R$. В таких случаях сразу же после удара шар будет катиться под углом ψ, определяемым равенством (s51).

Для того чтобы шар после удара кием обладал скоростями, найденными при помощи предыдущих построений, будет ли это в общем случае или в только что упомянутом частном случае, необходимо, чтобы после удара кий отделялся от шара и не изменял, продолжая касаться шара, скоростей, найденных в предположении, что шар получил только количество движения MV по направлению удара кием.

Чтобы определить a priori скорость V_1 и узнать, будет ли отделение иметь место в действительности, мы заметим, что бильярдное сукно вследствие своей толщины обладает некоторой сжимаемостью, и шар должен опуститься на очень малое расстояние, прежде чем он получит от покрытия очень большую силу, которая может возникнуть только, когда сукно будет сжато ударом. Но если удар кием сделан не очень наклонно, то шар уже пройдет некоторое расстояние, прежде чем сжатие сукна достигнет своего максимума, а в течение времени, необходимого для этого перемещения, как бы мало это перемещение ни было, можно допустить, что удар кием уже кончился. Одним словом, почти одновременный удар шара кием и удар о сукно можно рассматривать как два последовательных удара.

Основываясь на этих рассуждениях, Кориолис показывает, что и в случае наклонного удара справедливы равенства (s21), (s22), найденные в главе 2 для горизонтального удара. С помощью этих соотношений он определил, что при выполнении наклонного удара в центр шара, кий и биток разойдутся сразу же после удара, если угол наклона кия μ не будет превышать примерно 51 градус. В тех же

случаях, когда удар наносится в точку, видимую как центр шара при горизонтальном ударе (Кориолис называет ее тыльной точкой), условия разделения кия с битком будут выполняться лишь при углах наклона $\mu < 36°$. Помимо этого, Кориолис указал, что если наносить удар немножко выше тыльной точки и немного сбоку ее, то при не слишком большом a можно брать угол μ до 45°. Но если μ и a будут достаточно большими, то условие разделения уже не удовлетворяется, и удар уже никоим образом не может быть верным, потому что шар и кий не разделятся тотчас после удара, и основные величины движения будут зависеть от трения *(имеется в виду трение между наклейкой и шаром за счет их пролонгированного контакта)*. Однако, опытные игроки умеют так быстро отводить назад кий во время удара, что эта причина ошибки отпадает при наклонных и эксцентрических ударах кия, так что они могут с уверенностью получать желаемые результаты и вне пределов, указанных приведенным неравенством. В таком случае им достаточно только для расстояния a не превышать предела $0.70R$, что остается всегда необходимым для того, чтобы кий не скользил по шару в самое мгновение удара.

Краткое резюме к главе 8

1. После выполнения наклонного удара биток будет передвигаться по прямолинейной траектории в направлении продольной оси кия только тогда, когда вертикальная плоскость удара будет проходить через центр шара. Во всех иных случаях траектория битка будет криволинейной.
2. После выполнения наклонного нецентрального удара траектория битка отклонится в ту сторону, в которую по горизонтали смещена точка удара относительно центра шара.
3. Если не будет проявляться эффект сноса битка, то финальное направление движения шара будет параллельно линии, соединяющей точку опоры неподвижного до удара шара с точкой, в которой линия удара пересекает игровую поверхность.
4. Получены соотношения (s52) – (s61) для расчета начальных скоростей битка после наклонного удара кием.
5. Углы наклона кия, при которых наклейка и шар разъединятся сразу же после нанесения удара, существенно ограничены трением, возникающим при увеличении длительности контакта.