

Г. КОРИОЛИС



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
ЯВЛЕНИЙ
БИЛЬЯРДНОЙ ИГРЫ



Г. КОРИОЛИС

КЛАССИКИ
ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ



МАТЕМАТИКА
МЕХАНИКА
ФИЗИКА
АСТРОНОМИЯ



*Государственное издательство
технико-теоретической литературы*

МОСКВА • 1956

Г. КОРИОЛИС



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
ЯВЛЕНИЙ
БИЛЬЯРДНОЙ ИГРЫ



Перевод с французского
И.Н. ВЕСЕЛОВСКОГО
и М.М. ГЕРНЕТА

•

*Государственное издательство
технико-теоретической литературы*

МОСКВА • 1956

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Имя Гаспара Кориолиса (1792—1843) широко известно. «Поворотное ускорение Кориолиса», «кориолисовы силы инерции» знакомы каждому, изучавшему теоретическую механику. Кориолис является одним из основателей прикладной механики. Он ввел в науку столь важное понятие, как «механическая работа». Он известен исследованиями в области гидравлики, по теории локомотива и т. п. Деятельность Кориолиса оставила глубокий след в науке и технике. Между тем о жизни этого замечательного ученого имеются лишь самые скудные сведения.

Гаспар Густав Кориолис родился в 1792 году в Париже. Обучался Гаспар в лицее в Нанси. В 1808 году он был принят в Политехническую школу, которую успешно закончил в 1812 году со званием инженера путей сообщения.

В 1817 году Кориолис поступил в Политехническую школу на должность преподавателя механики. Позднее он стал в этой школе экзаминатором, профессором, директором. Курсом анализа и механики в Политехнической школе с 1816 года руководил Коши (1789—1857). Однако направление деятельности Кориолиса коренным образом отличается от значительно более абстрактных исследований Коши. Коши пытался подчинить математическому анализу все отделы физики (за исключением разве только электричества и магнетизма), обращая внимание главным образом на математическую, но не на физическую сторону вопросов. Кориолис, напротив, явился одним из творцов технической механики. Вместе с Жаном Понселе (1788—1867) он развил идеи Лазаря Карно (1753—1823), Гаспара

Монжа (1746—1818) и отчасти Луи Навье (1785—1836) относительно механической работы и впервые ввел в науку этот термин, притом в точном, современном нам смысле. Это большое принципиальное достижение в науке было принято не сразу и оценено по достоинству лишь значительно позже. Понятие «механическая работа», имевшее впоследствии решающее значение для развития механической теории тепла, установления закона сохранения энергии, было введено Кориолисом в 1829 году в знаменитом сочинении «Курс механики твердых тел и расчеты мощности машин». Курс Кориолиса коренным образом отличался от господствовавшего тогда курса «Аналитической механики» Лагранжа (1736—1813): в противовес Лагранжу Кориолис стремился изучить и обобщить действие сил в машинах, с учетом всех обстоятельств, в том числе и трения.

В 1831 году Кориолис опубликовал свою самую замечательную работу «Исследование о приложении принципа живых сил в относительных движениях системы тел», в которой ввел понятие о силах инерции в относительном движении, развитое им более подробно в книге «Трактат о механике твердых тел», опубликованной в 1844 году после смерти Кориолиса. В этих работах была дана знаменитая теорема, позднее получившая название теоремы Кориолиса. Теорема Кориолиса доказывает, что в сложном движении (если переносное движение не поступательное) появляются «добавочные силы инерции», зависящие от относительной скорости, от угловой скорости переносного вращения и от синуса угла между векторами этих скоростей. Теорема Кориолиса является основной в механике относительного движения и имеет огромное значение для различных отраслей науки и, в частности, при расчете машин и механизмов.

В 1836 году Кориолис был избран членом Института (академиком Парижской академии наук).

За год до этого он опубликовал книгу «Математическая теория явлений бильярдной игры», о которой впоследствии он не раз говорил, что она является его самым любимым произведением. К изучению бильярда Кориолис

подошел как исследователь и механик, на примерах этой игры он впервые поставил задачу о движении шаров по шероховатой плоскости и дал остроумные и изящные аналитические и графические решения; однако он, повидимому, недооценивал большого значения своего труда с более широкой точки зрения.

В самом деле, задача о движении шара по плоскости является одной из интереснейших задач динамики твердого тела, привлекавшей внимание многих ученых. Еще в 1758 году И. А. Эйлер (сын Леонарда Эйлера) опубликовал на эту тему интересную работу. Тем же вопросом с несколько другой точки зрения интересовался Пуассон (1781—1840) и многие другие. Если шар движется без скольжения, то на шар налагается кинематическая связь, выражающаяся в том, что скорость точки касания равна нулю. От внимания творца аналитической механики Лагранжа ускользнул тот важный факт, что связи, налагаемые на систему, могут состоять в ограничении не только положения системы, но и скоростей ее точек, то есть связи могут выражаться не только конечными, но и дифференциальными соотношениями между координатами системы, причем соотношениями не интегрируемыми, не сводящимися к конечным. Впервые это обстоятельство отметил М. В. Остроградский (1801—1861). Он же первый вывел уравнения движения таких систем, но в форме, недостаточно удобной для практических применений.

Исключительный интерес имеют исследования С. А. Чаплыгина (1869—1942). В работе «О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости» (1897) он вывел уравнения, названные несколько позже его именем. Задача о катании без скольжения тела вращения по плоскости была доведена С. А. Чаплыгиным до квадратур. Он получил более общие результаты, чем это удалось многим другим ученым, занимавшимся той же задачей. В другой работе «О катании шара по горизонтальной плоскости» он решил задачу о катании без скольжения неоднородного шара по плоскости при любом эллипсоиде инерции шара. Несколько дальше от темы книги Кориолиса стоят работы С. А. Чаплыгина: «О некотором

возможном обобщении теоремы площадей с применением к задаче о катании шаров» и «К теории движения негोलонномных систем», в которых рассмотрены некоторые частные случаи движения шара.

Исследования Кориолиса относятся к движению однородного шара, но он не ограничивается лишь катанием, а исследует движение шара при всевозможных начальных условиях, при ударах различной силы, нанесенных кием в различные точки шара и в различных направлениях. Кроме того, он исследует движение шара после соударения с другим шаром, после удара о борт и т. п. Аналитические решения Кориолиса очень остроумны, изящны и сравнительно элементарны. Они вполне доступны читателю, знакомому с динамикой твердого тела в объеме курса немеханических специальностей втузов.

Книга Кориолиса ценна еще и тем, что в ней широко применяются графические методы расчета. Работа Кориолиса была выполнена значительно ранее, чем появились в науке различные графические способы исследования движения, ставшие теперь обычными в механике и едва ли не доминирующими при исследовании механизмов. Внимательный читатель встретит в этой работе Кориолиса различные приемы графического анализа движения, в которых он узнает предшественников современных нам методов, например метода плана скоростей.

Выпуская эту книгу на русском языке, мы имели целью ознакомить советского читателя с весьма оригинальным произведением Кориолиса, представляющим определенный теоретический интерес и в настоящее время.

И. Н. Веселовский
М. М. Гернет

Г. КОРИОЛИС



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
ЯВЛЕНИЙ
БИЛЬЯРДНОЙ ИГРЫ



ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

В связи с бильярдной игрой в ее современном развитии благодаря применению киев, которые могут сообщить шарам достаточно сильное вращательное движение, возникают различные динамические задачи, решение которых содержится в этом произведении. Я думаю, что люди, знающие теоретическую механику, вроде учеников Политехнической школы, с интересом познакомятся с объяснениями всех оригинальных явлений, которые можно наблюдать во время движения бильярдных шаров.

После того как я наблюдал эти явления в игре знаменитого игрока Менго¹⁾, я постарался дать для них математический расчет. В то время (уже довольно давно) я получил результаты, которые изложены в первой и в

¹⁾ Менго (Mingaut) — известный французский бильярдист, основатель современной школы игры на бильярде, автор книги «Noble jeu de billard» (Брюссель, 1828), переведенной на русский язык под названием «Теория бильярдной игры» (СПб., 1847.)

В 1827 году Менго предложил кии с кожаной наклейкой на конце (*queue à procédé*), которые вытеснили кии без наконечников (*queue sèche*), а также и кии с концом, покрытым гипсом (*queue tachée*), предложенные майором Дуга (Dougat), сменившим после падения Наполеона шпагу на кий и стяжавшим себе на бильярде не меньшую славу, чем на полях сражения.

Кии Менго, не превзойденные и до наших дней, позволили вследствие значительного трения кожи сообщить ударяемому («своему») шару вращение вокруг любой оси, что значительно усовершенствовало бильярд. Многие явления бильярдной игры, рассмотренные Кориолисом в его книге, возможны только после удара шара кием Менго с кожаной наклейкой. (*Прим. перев.*)

восьмой главах этого произведения. После этого я дополнительно рассмотрел вопросы, относящиеся специально к удару шаров при наличии трения.

Я очень обязан г. Менго, во время игры которого я мог удостовериться, что формулы и получающиеся из них геометрические построения дают результаты, согласные с опытом.

Один из руководителей Политехнической школы г. де Толозе (de Tholozé) обратил мое внимание на некоторые сложные удары, которые я мог объяснить при помощи моей теории; так он показал мне явление, к которому относятся построения фигур 57 и 66, содержащиеся в этом труде.

Г. Пуассон (Poisson) в новом издании своего курса механики рассмотрел действие трения на прямолинейно движущийся шар; эта задача представляет частный случай той, которую приходится решать в теории бильярдной игры. Сын знаменитого Эйлера изучал движение шара на плоскости, учитывая только трение скольжения. Его мемуар, с которым я ознакомился уже по окончании моего труда, находится в сборнике трудов Берлинской академии за 1758 год. Здесь общим с моим трудом является только одно положение, которое я даю в первой главе в более простом виде; оно заключается в том, что линия, описываемая центром шара, является параболой, если на шар действует лишь сила трения скольжения. Вышеупомянутый математик не дал теории, которая бы объясняла, хотя бы с учетом обоих видов трения, движение шара, когда под конец шар начинает катиться. Что же касается действия трения при ударе шаров друг о друга и о борт, а также всего относящегося к удару шара наклонным кием, то я не думаю, чтобы до сего времени кто-либо занимался этими вопросами.

Я думал, что некоторые люди, которые не захотят вникать в подробности доказательств и вместе с тем обладают достаточными математическими познаниями, чтобы понимать язык этой науки и основные ее обозначения, будут рады найти отдельное изложение правил и построений, получающихся из теории, почему я и

поместил его в начале книги¹⁾. Что касается читателей, которые хотели бы скорее рассмотреть эти вопросы с математической точки зрения, то они могут пропустить это изложение, так как в дальнейшем оно воспроизводится в книге с доказательствами. Однако к этому изложению нужно обратиться при рассмотрении фигур 29—67, объяснение к которым находится на стр. 170—234.

(Париж, 1835)

¹⁾ В нашем переводе это «отдельное изложение правил и построений» помещено в конце книги. (*Прим. перев.*)



ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВ
ТЕОРИИ И ПОСТРОЕНИЙ,
ОБЪЯСНЯЮЩИХ
ДВИЖЕНИЕ ШАРОВ





Я начну с определения некоторых терминов и с установления главных обозначений, которыми я буду пользоваться.

Свой шар — шар, которому наносят удар кием.

Противостоящий шар — неподвижный шар, в который ударяет свой шар.

Точка опоры шара — точка, которой шар касается сукна и в которой приложена сила трения.

Верхняя точка шара — точка диаметрально противоположная точке опоры, верхняя точка вертикального диаметра шара.

Верхний центр удара, или качания, шара — точка, лежащая на вертикали, проходящей через центр шара и расположенная над центром шара на расстоянии $\frac{2}{5}$ радиуса.

Нижний центр удара — точка, находящаяся под центром шара на расстоянии $\frac{2}{5}$ радиуса от него.

Первая из двух последних точек является центром удара по отношению к оси подвеса, проходящей через точку опоры; вторая точка — это центр удара относительно оси подвеса, проходящей через верхнюю точку шара, то есть через другой конец вертикального диаметра, проходящего через точку опоры.

Точка удара — точка соприкосновения шаров в мгновение удара.

Тыльная точка — точка противостоящего шара, в которую ударился бы свой шар, если бы направление движения центра этого шара проходило через центр противостоящего шара.

Ось вращения — ось, все точки которой имеют ту же скорость, что и центр шара.

Направление оси вращения — направление полупрямой, проходящей через центр вдоль этой оси и притом в ту сторону, с которой вращение представляется происходящим слева направо (по стрелке часов). Так, если шар катится без скольжения при горизонтальной оси вращения, удаляясь от игрока, то направление оси вращения совпадает с направлением горизонтального радиуса, проведенного вправо от игрока.

Вращательная скорость точки опоры — скорость точки опоры шара в его относительном вращении вокруг центра шара.

Прямое вращение — вращение, направление которого совпадает с тем, которое получается у шара, катящегося без скольжения по сукну; или, если угодно, это вращение, при котором вращательная скорость опорной точки направлена против скорости центра шара; в этом случае ось вращения направлена вправо от игрока.

Обратное вращение — вращение, происходящее в сторону, противоположную прямому вращению, то есть когда скорость опорной точки направлена в сторону скорости центра шара; в этом случае ось вращения направлена влево от игрока.

Состояние скольжения — состояние, в котором находится шар в мгновение, когда вращательная скорость точки опоры равна нулю, то есть когда ось вращения вертикальна, или же когда скорость вращения равна нулю.

Финальное состояние шара — состояние, в котором находится шар, когда он катится по сукну прямолинейно без скольжения и, следовательно, когда трение первого рода в точке опоры отсутствует. Вращательная скорость опорной точки в этом случае равна и прямо противоположна скорости центра шара. В этом финальном состоянии поступательная и вращательная скорости меняются настолько незначительно, что их можно считать постоянными.

Финальное направление — направление движения шара, находящегося в финальном состоянии.

Переменное состояние шара — состояние, в котором находится шар, перед тем как перейти в финальное состояние; при переменном состоянии шара точка опоры скользит,

а следовательно, трется о сукно. В этом состоянии поступательная и вращательная скорости меняются очень быстро, пока не достигнут одновременно финальных значений.

Угол начального отклонения — угол, который образует направление движения своего шара перед ударом о противостоящий шар с направлением непосредственно после удара.

Угол финального отклонения — угол, который скорость своего шара в финальном состоянии после удара о противостоящий шар образует с направлением его движения до удара.

Теперь приведем основные обозначения, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

M' — масса кия; она бывает обычно в три раза больше массы шара.

V' — скорость кия перед ударом шара.

R — радиус шара.

M — масса шара.

V_1 — начальная скорость центра шара, то есть та, которую он получает непосредственно после удара кием.

V_0 — начальная скорость центра шара для той же скорости кия, когда линия удара проходит через центр шара.

V — скорость центра шара в любое мгновение его движения.

V_a — абсолютная скорость точки шара, совпадающей с точкой опоры.

V_r — относительная скорость точки опоры шара в его вращательном движении по отношению к центру; таким образом, абсолютная скорость V_a есть результирующая скоростей V_r и V^1).

v — относительная вращательная скорость точки, находящейся на вертикальном диаметре шара на расстоя-

¹⁾ В своих доказательствах Кориолис рассматривал движение бильярдного шара как составное, состоящее из переносного поступательного движения, определяемого движением центра шара, и относительного вращательного по отношению к центру, но в данной работе он не пользовался терминами: «абсолютное движение», «относительная скорость» и т. п. Чтобы облегчить чтение перевода современному читателю, мы позволили себе применять эти термины, хотя они отсутствуют в подлиннике. (*Прим. перев.*)

нии $\frac{2}{5}$ радиуса над центром шара, то есть точки, которую мы назвали верхним центром удара. Эта скорость v равна и противоположна $\frac{2}{5} V_r$.

Начальные значения скоростей будут всегда обозначаться индексами 1, поставленными внизу букв.

y — измеренное по прямой расстояние, пройденное шаром с того мгновения, когда он получил удар кием, и до любого мгновения, причем предполагается, что шар движется по прямой линии.

y_2 — измеренное по прямой расстояние, пройденное шаром в том же предположении до той точки, где шар пришел в финальное состояние, или стал катиться.

y_0 — расстояние до точки, где шар пришел в состояние скольжения.

p , q и r — три проекции на три оси x , y и z прямоугольных координат угловой скорости вращения, отложенной по оси вращения в сторону, соответствующую ее направлению; координатные оси обычно берутся так, что направление движения центра шара совпадает с положительным направлением оси y , проведенный горизонтально перпендикуляр к этой прямой на плоскости бильярда является осью x , а проведенная вверх нормаль к плоскости бильярда служит осью z .

Эти величины могут быть определены и иначе. Именно, можно сказать, что произведения $R \cdot p$, $R \cdot q$, $R \cdot r$ получаются, если взять скорости точек, расположенных на больших кругах, параллельных координатным плоскостям, и затем спроектировать взятые скорости на указанные плоскости. Такой способ определения этих величин получается на основании предложения, что скорости всех точек большого круга шара, являющиеся вообще различными по величине и по направлению, имеют одинаковые проекции на плоскость этого круга.

l — высота над плоскостью бильярда той точки, в которой линия удара встречает вертикальную плоскость, проведенную через центр шара перпендикулярно к вертикальной плоскости удара.

h — расстояние вертикальной плоскости удара от центра шара. Это расстояние считается положительным или отрицательным в зависимости от того, находится ли эта плоскость по отношению к игроку справа или слева от центра шара.

a — кратчайшее расстояние линии удара от центра шара. Если удар кия направлен горизонтально, то

$$a^2 = (R - l)^2 + h^2.$$

α — угол начального отклонения.

ψ — угол финального отклонения.

f — коэффициент трения между шаром и бильярдным сукном во время движения шара, иными словами, отношение силы трения к весу шара. Опытom найдено, что для обычного покрытия бильярдной плоскости $f = 0,25$. Этот коэффициент должен несколько меняться в зависимости от покрытия, но очень значительных отклонений от величины, полученной в наших опытах, не обнаружено.

f_1 — коэффициент трения между шаром и покрытием или во время удара о борт, или во время удара шара о бильярдную плоскость при наклонном ударе кием. Для удара о борт этот коэффициент оказался равным 0,20.

f' — коэффициент трения между двумя шарами во время удара. Этот коэффициент очень мал и не превышает 0,03.

θ — доля общей живой силы кия и шара, которая теряется при ударе двух этих тел. Опыт показывает, что дробь θ может считаться постоянной и равной 0,13.

ϵ — доля составляющей скорости шара, перпендикулярной к борту, которая восстанавливается при ударе шара о борт. Эта дробь очень близка к 0,55 для большого количества испытанных бортов, но она несколько изменяется в зависимости от скорости шара: она равна 0,50 для скорости 7 м/сек — предельной скорости шаров на бильярде, и 0,60 для очень малых скоростей, меньших 1 м/сек.





Г Л А В А I

ДВИЖЕНИЕ ШАРА ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ С ТРЕНИЕМ

Мы начнем с изучения движения шара по плоскости с трением, рассматривая это движение как получающееся в результате сложения некоторых начальных поступательной и вращательной скоростей.

В следующих главах мы рассмотрим, каким образом на эти начальные скорости и, следовательно, на движение шара влияют удар кия и удар шаров как друг о друга, так и о борта; только в этой второй части в качестве следствий из теории выводятся правила относительно того, как следует давать удар кием, чтобы получить желаемые результаты.

В первую очередь мы разберем здесь достаточно известную теорию движения твердого тела, но сразу же будем применять ее к шару для того, чтобы получить прямым путем уравнения его движения.

Так как мы предполагаем шар однородным ¹⁾ и совершенно точной сферической формы, то нет надобности

¹⁾ Задача о катании по плоскости неоднородного шара полностью решена С. А. Чаплыгиным в 1903 году в работе «О катании шара по горизонтальной плоскости» (Собрание сочинений, том I, Гостехиздат, 1948). С. А. Чаплыгин решил эту задачу аналитическим путем, не налагая никаких ограничений ни на эллипсоид инерции, ни на начальные обстоятельства движения. Высказанные в той же работе геометрические соображения в значительной мере уясняют характер движения неоднородного шара в общем случае. (Прим. перев.)

учитывать его вес, действие которого полностью уничтожается; нужно только учитывать те силы, которые возникают от трения. Для абсолютной точности мы должны учитывать два рода трения: первое — трение скольжения — проявляется, когда шар скользит по сукну бильярда, и второе, которое можно назвать трением качения. Оно имеет место независимо от скольжения между соприкасающимися поверхностями, происходит вследствие прогиба, который испытывает поверхность бильярда от веса шара и дает силу, которая действует по направлению, образуемому некоторый угол с вертикалью; горизонтальная составляющая этой силы имеет направление, противоположное скорости центра шара. Таким образом, в то время как трение скольжения действует противоположно скорости скольжения по сукну опорной точки шара, горизонтальная сила, происшедшая от трения качения, направлена прямо противоположно скорости центра шара. Так как последнее трение представляет лишь очень незначительную долю первого, то мы могли бы, не делая ошибки, пренебречь им в приложениях теории к бильярдной игре. Однако в начальных стадиях нашего исследования мы этого не сделаем и соединим обе эти силы трения в одну.

Обозначим через V_x и V_y скорости центра тяжести шара по направлениям двух координатных осей, проведенных в горизонтальной плоскости движения шара; пусть результирующая этих скоростей будет V . Обозначим через M массу шара, а через X и Y составляющие по направлению координатных осей силы трения о сукно.

Мы получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} M \frac{dV_x}{dt} &= X, \\ M \frac{dV_y}{dt} &= Y. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Обозначим через dm массу какого-нибудь бесконечно малого элемента шара, а через x, y, z его координаты относительно осей, проходящих через его центр тяжести и имеющих постоянные направления.

Будем предполагать, что ось z направлена вверх от сукна, а ось y взята влево от оси x для наблюдателя, находящегося на положительной оси z .

Если через R обозначить радиус шара, то координаты точки приложения силы трения будут $x=0$, $y=0$, $z=-R$.

Уравнения вращательного движения, которые мы получим, применяя теорему моментов, таковы:

$$\left. \begin{aligned} \int dm \left(y \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2y}{dt^2} \right) &= 0, \\ \int dm \left(x \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2x}{dt^2} \right) &= RX, \\ \int dm \left(z \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2z}{dt^2} \right) &= -RY. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Чтобы получить из этих трех уравнений три переменные, которые наиболее простым образом определяют движение шара, обозначим через Ω угловую скорость вращения, а через α , β , γ углы, образуемые с осями координат мгновенной осью вращения, направив ее в ту сторону, с которой вращение вокруг этой оси представляется совершающимся слева направо¹⁾; таким образом, если бы эта ось совпадала, например, с положительной осью x , то верхние точки шара вращались бы от оси z к оси y . Взяв углы α , β , γ , как только что указано, положим:

$$\Omega \cos \alpha = p,$$

$$\Omega \cos \beta = q,$$

$$\Omega \cos \gamma = r.$$

Можно заметить, что величины p , q , r представляют также проекции на координатные плоскости вращательных скоростей точек, расположенных на больших кругах шара, параллельных этим координатным плоскостям²⁾.

¹⁾ Мы сказали бы «по стрелке часов». (Прим. перев.)

²⁾ Формулировка несколько неточна. Проекция вращательной скорости, конечно, не могут быть равны проекциям угловой скорости, поскольку размерности этих скоростей различны. Правильнее было бы сказать, что проекция на данную ось угловой ско-

Пять элементов V_x , V_y , p , q , r полностью определяют движение шара.

При помощи величин p , q , r легко выразить суммы моментов количеств движения по координатным плоскостям¹⁾.

Если мы через J обозначим момент инерции шара относительно одного из его диаметров, то произведение

рости шара численно равна проекции на плоскость, перпендикулярную к этой оси, вращательных скоростей точек шара, расположенных на окружности большого круга, параллельного этой плоскости, если радиус шара равен единице. Так, например, проекция r угловой скорости Ω на ось z численно равна проекции v_{xy} скорости v точки шара, лежащей в плоскости xOy , на эту плоскость, если расстояние R этой точки от центра шара равно единице.

Доказательство этого положения можно получить хотя бы из известных формул Эйлера, связывающих проекции на координатные оси вращательных и угловых скоростей:

$$v_x = qz - ry,$$

$$v_y = rx - pz,$$

$$v_z = py - qx.$$

Если точка лежит на окружности большого круга $R=1$, расположенного в плоскости xOy , то координаты точки будут:

$$x = R \cos(\widehat{R, x}); \quad y = R \sin(\widehat{R, x}); \quad z = 0,$$

и две первые из формул Эйлера принимают вид

$$v_x = -rR \sin(\widehat{R, x}),$$

$$v_y = rR \cos(\widehat{R, x}),$$

откуда

$$v_{xy} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = rR,$$

а если

$$R = 1,$$

то

$$v_{xy} = r \cdot 1 = r.$$

Аналогично получим:

$$p = v_{yz}$$

и

$$q = v_{zx}.$$

(Прим. перев.)

¹⁾ Мы сказали бы «главные» моменты количеств движения относительно координатных осей». (Прим. перев.)

$J\Omega$ представит сумму моментов количеств движения по отношению к оси вращения. Проектируя эту сумму моментов на координатные плоскости, мы получим Jp , Jq , Jr .

Таким образом, мы имеем:

$$\int dm \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) = Jr,$$

$$\int dm \left(x \frac{dz}{dt} - z \frac{dx}{dt} \right) = Jq,$$

$$\int dm \left(z \frac{dy}{dt} - y \frac{dz}{dt} \right) = Jp,$$

или

$$\int dm \left(y \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2y}{dt^2} \right) = J \frac{dr}{dt},$$

$$\int dm \left(x \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2x}{dt^2} \right) = J \frac{dq}{dt},$$

$$\int dm \left(z \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2z}{dt^2} \right) = J \frac{dp}{dt}.$$

Таким образом, уравнения (2) вращательного движения примут вид

$$\left. \begin{aligned} J \frac{dr}{dt} &= 0, \\ J \frac{dq}{dt} &= RX, \\ J \frac{dp}{dt} &= -RY. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Комбинируя эти уравнения с уравнениями движения центра тяжести

$$\left. \begin{aligned} M \frac{dV_x}{dt} &= X, \\ M \frac{dV_y}{dt} &= Y, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

мы определим пять неизвестных V_x , V_y , p , q , r , если будут известны силы X и Y .

Каковы бы ни были силы трения, достаточно, чтобы они действовали всегда горизонтально и в самой нижней

точке шара, для того чтобы вышеприведенные уравнения имели место. Из уравнений (1) можно усмотреть, что центр шара будет описывать кривую линию, если только сила, составляющими которой являются X и Y , не будет направлена по одной прямой со скоростью центра шара, составляющими которой являются V_x и V_y . Это криволинейное движение будет иметь место всегда, если скольжение точки опоры шара по сукну не будет происходить по одному направлению со скоростью центра, иными словами, если ось вращения не будет перпендикулярна к этой скорости.

Исключая X и Y из уравнений (3) и (1), получим:

$$\begin{aligned} J \frac{dr}{dt} &= 0, \\ J \frac{dq}{dt} &= RM \frac{dV_x}{dt}, \\ J \frac{dp}{dt} &= -RM \frac{dV_y}{dt}. \end{aligned}$$

Если заметить, что для шара $\frac{J}{MR} = \frac{2}{5} R$, то вышестоящие уравнения примут вид

$$\begin{aligned} R \frac{dr}{dt} &= 0, \\ \frac{2}{5} R \frac{dq}{dt} &= \frac{dV_x}{dt}, \\ -\frac{2}{5} R \frac{dp}{dt} &= \frac{dV_y}{dt}. \end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения и обозначая через V_{1x} , V_{1y} , p_1 , q_1 , r_1 начальные значения этих переменных, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} r &= r_1, \\ V_x - V_{1x} &= \frac{2}{5} R (q - q_1), \\ V_y - V_{1y} &= \frac{2}{5} R (p_1 - p). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Эти уравнения показывают, что 1) составляющая r остается постоянной и что 2) составляющие p и q изменяются только вместе с V_x и V_y ; таким образом, шар может изменить ось своего вращения только в том случае, если он перестанет двигаться равномерно прямолинейно. Справедливо и обратное заключение.

Вышеприведенные соотношения можно представить в более симметричной и удобной форме, если изменить переменные.

Обозначим через v_x и v_y составляющие вращательной скорости v верхнего центра удара шара, то есть точки, расположенной на вертикали, проходящей через центр на высоте, равной $\frac{2}{5}$ радиуса над этим центром; тогда согласно определению величин p , q , r

$$\frac{2}{5}Rp = v_x,$$

$$\frac{2}{5}Rq = -v_y.$$

Таким образом, если обозначать всегда начальное значение индексами 1, поставленными внизу букв, мы будем иметь:

$$v_x - v_{1x} = V_{1x} - V_x,$$

$$v_y - v_{1y} = V_{1y} - V_y,$$

или

$$\left. \begin{aligned} v_x + V_x &= v_{1x} + V_{1x}, \\ v_y + V_y &= v_{1y} + V_{1y}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Эти последние уравнения показывают, что *результурующая скоростей центра шара и относительной скорости верхнего центра удара будет всегда во время движения постоянной*¹⁾. Эта теорема остается справедливой при всякой природе сил, действующих в точке опоры. Таким образом, она будет иметь место, учтываем ли мы оба рода трения или же только один.

¹⁾ Другими словами, во время движения шара скорость верхнего центра удара сохраняется по величине и по направлению. (Прим. перев.)

Заметим теперь, что в то мгновение, когда шар не скользит в точке опоры, трение скольжения перестает существовать; в таком случае остается только второе трение — трение качения, которое не в состоянии изменить направление движения шара; тогда шар будет катиться по прямой линии, не отклоняясь от нее. Это случится в то мгновение, когда относительная вращательная скорость точки опоры будет равна и противоположна скорости центра или, что сводится к тому же, когда вращательная скорость точки, расположенной над центром диаметрально противоположно точке опоры, будет равна скорости центра и направлена в ту же сторону.

Но составляющие скорости этой верхней точки суть

$$\frac{5}{2} v_x \text{ и } \frac{5}{2} v_y.$$

Таким образом, шар покатится без скольжения и пойдет по прямой линии, когда будет

$$V_x = \frac{5}{2} v_x, \quad V_y = \frac{5}{2} v_y,$$

или

$$v_x = \frac{2}{5} V_x, \quad v_y = \frac{2}{5} V_y.$$

Подставив это в предшествующие уравнения (5), получим:

$$\frac{7}{5} V_x = V_{1x} + v_{1x},$$

$$\frac{7}{5} V_y = V_{1y} + v_{1y},$$

или

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \frac{5}{7} (V_{1x} + v_{1x}), \\ V_y &= \frac{5}{7} (V_{1y} + v_{1y}). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Эти значения для V_x и V_y дают те скорости, которые будет иметь центр шара, когда он перестанет двигаться по кривой линии и покатится без скольжения по

прямой. Эти скорости определяют то, что мы называем *финальным направлением* движения шара.

Таким образом, это финальное направление не зависит от природы трений; оно *всегда является направлением геометрической суммы скорости V центра шара и вращательной скорости v верхнего центра удара*, и это имеет место, какова бы ни была природа обоих трений.

Теперь займемся движением шара до достижения им финального состояния, когда еще существует трение шара о сукно; мы имеем в виду получить кривую, которую этот шар описывает, а также определить, каким образом меняются скорости V_x и V_y его центра во время этой первой стадии его движения.

Для этого мы пренебрежем трением качения, которое очень мало по сравнению с трением скольжения. Поэтому в уравнения (1) мы должны ввести направление силы, происходящей только от одного трения скольжения.

Известно, что трение скольжения действует по направлению, прямо противоположному скорости точки, касающейся сукна; поэтому, обозначая, как обычно, через f постоянное или переменное отношение силы трения к силе давления, мы будем иметь:

$$X = -fMg \cos \alpha,$$

$$Y = -fMg \cos \beta,$$

где α и β представляют углы, которые образует с координатными осями скорость касающейся сукна точки шара. Эта скорость является результирующей поступательной скорости центра шара и вращательной скорости опорной точки.

Относительная скорость опорной точки имеет составляющие

$$-\frac{5}{2}v_x \quad \text{и} \quad -\frac{5}{2}v_y.$$

Таким образом, составляющие по координатным осям абсолютной скорости этой точки будут

$$V_x - \frac{5}{2}v_x \quad \text{и} \quad V_y - \frac{5}{2}v_y.$$

Следовательно, мы имеем:

$$\cos \alpha = \frac{V_x - \frac{5}{2} v_x}{\sqrt{\left(V_x - \frac{5}{2} v_x\right)^2 + \left(V_y - \frac{5}{2} v_y\right)^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{V_y - \frac{5}{2} v_y}{\sqrt{\left(V_x - \frac{5}{2} v_x\right)^2 + \left(V_y - \frac{5}{2} v_y\right)^2}}.$$

Обозначим для сокращения знаменатель этих выражений через V_a — это будет абсолютная скорость трущейся точки; эту величину V_a мы будем всегда считать положительной, так что знаки упомянутых косинусов будут устанавливаться числителем. Таким образом, мы будем иметь:

$$X = -fMg \frac{V_x - \frac{5}{2} v_x}{V_a},$$

$$Y = -fMg \frac{V_y - \frac{5}{2} v_y}{V_a}.$$

Следовательно, уравнения (1) будут

$$\frac{dV_x}{dt} = -fg \frac{V_x - \frac{5}{2} v_x}{V_a},$$

$$\frac{dV_y}{dt} = -fg \frac{V_y - \frac{5}{2} v_y}{V_a}.$$

Подставим в эти уравнения вместо v_x и v_y их выражение из уравнений (5):

$$v_x = V_{1x} + v_{1x} - V_x,$$

$$v_y = V_{1y} + v_{1y} - V_y.$$

Назовем V_{2x} и V_{2y} найденные значения финальных скоростей, иными словами, положим:

$$\left. \begin{aligned} V_{2x} &= \frac{5}{7} (V_{1x} + v_{1x}), \\ V_{2y} &= \frac{5}{7} (V_{1y} + v_{1y}), \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

и следовательно,

$$V_a = \frac{7}{2} \sqrt{(V_x - V_{2x})^2 + (V_y - V_{2y})^2} \quad (7)$$

Таким образом, вышеприведенные дифференциальные уравнения (1) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dV_x}{dt} + \frac{7}{2} fg \frac{V_x - V_{2x}}{V_a} &= 0, \\ \frac{dV_y}{dt} + \frac{7}{2} fg \frac{V_y - V_{2y}}{V_a} &= 0. \end{aligned}$$

¹⁾ Вывод этих выражений требует некоторых пояснений. Из равенств (5) и (6) находим:

$$V_{2x} = \frac{5}{7} (V_x + v_x).$$

Умножая полученное равенство на $\frac{7}{2}$ и прибавляя к обеим частям по $\frac{7}{2} V_x$, найдем:

$$\frac{7}{2} V_x - \frac{7}{2} V_{2x} = \frac{7}{2} V_x - \frac{5}{2} (V_x + v_x),$$

откуда

$$\frac{7}{2} (V_x - V_{2x}) = V_x - \frac{5}{2} v_x.$$

Аналогично получаем:

$$\frac{7}{2} (V_y - V_{2y}) = V_y - \frac{5}{2} v_y.$$

Но

$$V_a = \sqrt{\left(V_x - \frac{5}{2} v_x\right)^2 + \left(V_y - \frac{5}{2} v_y\right)^2}.$$

Из трех этих равенств получаем искомое выражение. (Прим. перев.)

После исключения V_a получаем:

$$\frac{dV_x}{V_x - V_{2x}} = \frac{dV_y}{V_y - V_{2y}}.$$

Коэффициент f исключен вместе с V_a ; следовательно, это уравнение не зависит от закона, по которому может изменяться сила трения. Интегрируя его от начального мгновения и переходя от логарифмов к числам, находим:

$$\frac{V_x - V_{2x}}{V_{1x} - V_{2x}} = \frac{V_y - V_{2y}}{V_{1y} - V_{2y}}. \quad (8)$$

Отсюда заключаем, что выражения $\frac{V_x - V_{2x}}{V_a}$ и $\frac{V_y - V_{2y}}{V_a}$, или

$$\frac{V_x - V_{2x}}{\sqrt{(V_x - V_{2x})^2 + (V_y - V_{2y})^2}} \quad \text{и} \quad \frac{V_y - V_{2y}}{\sqrt{(V_x - V_{2x})^2 + (V_y - V_{2y})^2}},$$

определяющие косинусы углов, образуемых скоростью точки опоры с неподвижными осями, будут в течение всего движения величинами постоянными. Таким образом, в течение всего движения эти косинусы останутся равными своим начальным значениям

$$\frac{V_{1x} - V_{2x}}{\sqrt{(V_{1x} - V_{2x})^2 + (V_{1y} - V_{2y})^2}} \quad \text{и} \quad \frac{V_{1y} - V_{2y}}{\sqrt{(V_{1x} - V_{2x})^2 + (V_{1y} - V_{2y})^2}}.$$

Итак, мы приходим к одному замечательному следствию, а именно: *при движении однородного шара по горизонтальной плоскости с трением скольжения направление силы трения не изменяется во время движения.*

Эта теорема позволит нам с легкостью разобрать все обстоятельства, которые относятся к движению шара, с учетом трения о сукно.

Движение будет переменным, когда в начале движения не будет иметь место равенства

$$V_{1x} = V_{2x} \quad \text{и} \quad V_{1y} = V_{2y},$$

или, поскольку

$$V_{2x} = \frac{5}{7} (V_{1x} + v_{1x}) \quad \text{и} \quad V_{2y} = \frac{5}{7} (V_{1y} + v_{1y}),$$

то когда

$$V_{1x} - \frac{5}{2} v_{1x} = 0,$$

$$V_{1y} - \frac{5}{2} v_{1y} = 0,$$

то есть всякий раз, когда в начальное мгновение не будет равна нулю скорость точки, в которой приложена сила трения.

Если во время движения шара скорость этой точки обращается в нуль, то трение прекращает свое действие и величина f претерпевает разрыв непрерывности, который отражается и на движении. Для соответствующего мгновения следует положить $f=0$, и тогда мы будем все время иметь:

$$\frac{dV_x}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dV_y}{dt} = 0.$$

Таким образом, скорости V_x и V_y не изменятся уже больше; то же самое будет справедливым и для величин p , q , r , которые зависят только от этих скоростей.

Когда начальные скорости V_{1x} и V_{1y} не совпадают с V_{2x} и V_{2y} , то дифференциальные уравнения дают для dV_x и dV_y те же самые знаки, что и для $V_{2x} - V_x$ и $V_{2y} - V_y$, откуда можно заключить, что скорости V_x и V_y будут все время приближаться к V_{2x} и V_{2y} , пока, наконец, не получится $V_x = V_{2x}$, $V_y = V_{2y}$ или, что сводится к тому же, пока не будет:

$$V_x - \frac{5}{2} v_x = 0,$$

$$V_y - \frac{5}{2} v_y = 0.$$

Тогда, поскольку скорость в точке опоры обращается в нуль, трение исчезает; мы имеем $f=0$, и движение становится равномерным. После этого шар катится по сукну таким образом, что его центр движется по прямой

линии с постоянной скоростью. Вследствие этого замечания мы и называем *финальной скоростью* эту скорость, составляющие которой по осям суть постоянные величины V_{2x} и V_{2y} , которые выражаются через начальные скорости установленными выше соотношениями

$$\left. \begin{aligned} V_{2x} &= \frac{5}{7} (V_{1x} + v_{1x}), \\ V_{2y} &= \frac{5}{7} (V_{1y} + v_{1y}). \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

Напомним еще, что значение финальной скорости ничуть не зависит ни от значения силы трения, ни от закона ее изменения: финальное состояние зависит только от начальных значений v_{1x} , v_{1y} , V_{1x} , V_{1y} .

Эти величины можно еще представить в другой форме, если ввести в их выражения скорости точки опоры. Если обозначить через V_{ax} и V_{ay} составляющие скорости точки опоры, то есть если положить

$$\begin{aligned} V_{ax} &= V_{1x} - \frac{5}{2} v_{1x}, \\ V_{ay} &= V_{1y} - \frac{5}{2} v_{1y}, \end{aligned}$$

то после подстановки в выражения для V_{2x} и V_{2y} получится:

$$\left. \begin{aligned} V_{2x} &= V_{1x} - \frac{2}{7} V_{ax}, \\ V_{2y} &= V_{1y} - \frac{2}{7} V_{ay} \text{ } ^1). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Эти соотношения позволяют сделать вывод, что скорость центра шара в его финальном состоянии получится в результате сложения начальной скорости этого самого центра с $\frac{2}{7}$ начальной скорости

¹⁾ Для получения этих равенств нужно помножить на $\frac{2}{7}$ два предыдущих равенства и полученные произведения вычесть соответственно из V_{1x} и V_{1y} . Правые части полученных разностей будут равны правым частям равенств (6'), а потому равны будут и левые части. (Прим. перев.)

верхней точки. Эта последняя получается в результате сложения вращательной скорости точки опоры со скоростью центра.

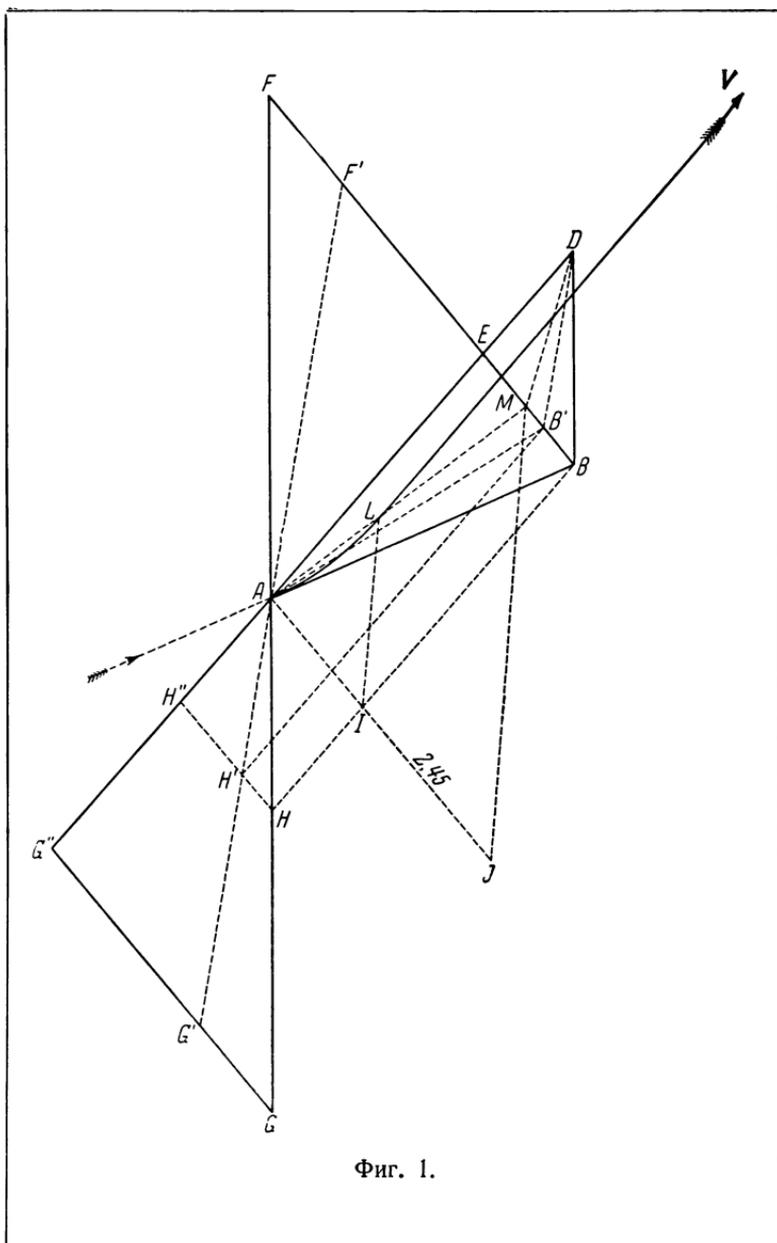
Далее, из линейности уравнения (8) относительно V_x и V_y вытекает, что если на бильярдной плоскости от неподвижной точки отложить отрезок прямой, который представляет по величине и направлению скорость центра шара во время его движения, то конец отложенного отрезка опишет прямую линию, стремясь к финальному положению, причем эта прямая, описанная концом этой переменной скорости, будет иметь направление скорости V_a точки опоры шара¹⁾). Таким образом, если на фиг. 1 прямая AB представляет начальную скорость V_1 центра шара, а AG — начальную относительную вращательную скорость V_{r1} опорной точки и, наконец, BF — начальную абсолютную скорость V_{a1} опорной точки, то переменная скорость центра шара во время движения будет представлена изменяющимся отрезком AB' , конец B' которого будет двигаться по прямой BF . Точка E , в которой остановится точка B' , будет расположена так, что

$$BE = \frac{2}{7} BF.$$

Можно заметить, что величина и направление финальной поступательной скорости AE могут быть получены, если на AG отложить длину $AH = v = \frac{2}{5} AG$ и точку H соединить с B прямой HB , которая будет параллельна финальной скорости AE , но составляет $\frac{7}{5}$ ее. Тогда AH представит по величине и направлению скорость, противоположную v : это будет относительная вращательная скорость нижнего центра удара.

Можно еще получить это финальное направление, проведя прямую AD , где точка D получится, если на прямой BD , параллельной AF , отложить отрезок

¹⁾ Здесь Кориолис вводит понятие, получившее впоследствии название годографа вектора скорости. (Прим. перев.)



Фиг. 1.

$BD = v = \frac{2}{5} AF$, то есть сложить относительную скорость $BD = v$ верхнего центра удара со скоростью $AB = V$ центра шара.

Подобно тому как имеется финальное состояние для поступательной скорости шара, будет также финальное состояние и для его вращательного движения. Финальные значения p , q и r получатся из соотношений (4), если положить в них $V_x = V_{2x}$, $V_y = V_{2y}$; таким образом, получается:

$$Rp_2 = \frac{5}{7} V_{1y} + \frac{2}{7} Rp_1 = V_{2y},$$

$$Rq_2 = \frac{5}{7} V_{1x} + \frac{2}{7} Rq_1 = -V_{2x}$$

и

$$Rr_2 = Rr_1.$$

Два первых из написанных уравнений дают:

$$Rp_2 - V_{2y} = 0 \quad \text{и} \quad Rq_2 + V_{2x} = 0,$$

или

$$V_{2x} - \frac{5}{2} v_{2x} = 0,$$

$$V_{2y} - \frac{5}{2} v_{2y} = 0.$$

Так как первые члены представляют здесь значение скорости точки опоры, то эти уравнения выражают только, как и следовало ожидать, что в финальном положении оси вращения скорость точки опоры равна нулю и что шар катится и не испытывает больше трения скольжения или, что сводится к тому же, что вращательная относительная скорость опорной точки становится равной и противоположной скорости центра.

Из данных значений Rp и Rq получается:

$$V_{2x}p_2 + V_{2y}q_2 = 0.$$

Это соотношение показывает, что *в финальном положении ось вращения находится в вертикальной плоскости, перпендикулярной к направлению финальной скорости центра шара.*

Если в уравнения (4) ввести вращательные относительные скорости точки опоры, которые мы обозначим через V_{rx} и V_{ry} , так что

$$V_{rx} = -\frac{5}{2} v_x,$$

$$V_{ry} = -\frac{5}{2} v_y,$$

и

$$Rp = -V_{ry},$$

$$Rq = V_{rx},$$

то получится:

$$V_x - V_{1x} = \frac{2}{5} (V_{rx} - V'_{rx}),$$

$$V_y - V_{1y} = \frac{2}{5} (V_{ry} - V'_{ry}),$$

где V'_{rx} и V'_{ry} обозначают начальные значения скоростей V_{rx} и V_{ry} .

Эти уравнения показывают, что если от начала неподвижных координатных осей отложить прямую AG (фиг. 1), которая по величине и направлению представляет для какого-нибудь мгновения вращательную скорость точки опоры шара, то ее конец G опишет прямую линию GG'' , параллельную прямой BE , описанной концом B переносной скорости центра шара.

Если вместо того чтобы длину, представляющую вращательную скорость, откладывать по направлению этой скорости, мы отложим ее в направлении, прямо противоположном AG , иными словами, по направлению вращательной скорости верхней точки вертикального диаметра, то конец F скорости, направленной таким образом, будет во время движения перемещаться по той же самой BF , по которой движется конец B переносной скорости. Действительно, если теперь обозначить через V_{2x} и V_{2y} проекции этой скорости, то для финального состояния мы будем иметь:

$$V_{rx} = V_{2x} \quad \text{и} \quad V_{ry} = V_{2y}.$$

Таким образом, поскольку рассматриваемые концы скоростей совпадают в финальном состоянии и, кроме того, должны описывать параллельные прямые, то они будут двигаться по той же самой прямой BF , которая соединяет их начальные положения B и F и представляет начальную скорость V_a точки опоры.

Итак, мы можем считать, что трение стремится сблизить на прямой линии BF концы B' и F' отрезков, которые представляют переносную (поступательную) скорость центра и вращательную скорость верхней точки шара. Это не зависит от природы трения. Сейчас мы увидим, что если сила трения постоянна, то концы B' и F' приближаются один к другому равномерно.

Рассмотрим движение оси вращения шара. Ясно, что ее проекция на плоскость бильярда будет перпендикулярна к прямой AH' , или к прямой AG' , которая представляет вращательную скорость точки опоры. Если на этой оси ¹⁾ взять точку на расстоянии от центра шара, равном в некотором масштабе экваториальной вращательной скорости, то есть величине ΩR , то ее координаты будут соответственно равны Rp , Rq , Rr . Так как величина Rr остается во время движения постоянной, то отсюда следует, что рассматриваемая точка движется по горизонтали, перпендикулярной к BF . Таким образом, ось вращения будет оставаться в наклонной плоскости, след которой на плоскости сукна перпендикулярен к BF . Перемещение этой оси так связано с изменением скорости AG' точки опоры или противоположной ей скорости AF' , что движение этой линии может дать полное представление о движении оси.

Получив финальные значения основных элементов движения шара и показав, что они совершенно не зависят от закона изменения силы трения, даже если принимать в расчет трение качения, мы постараемся найти выражения этих переменных элементов в функции времени, полагая уже, как это теперь становится необходимым, что

¹⁾ То есть на мгновенной оси вращения. (Прим. перев.)

трение качения неощутимо мало и трение скольжения не зависит от скорости.

Таким образом, в нижеследующих вычислениях мы будем рассматривать f как постоянную величину, или лучше, чтобы выразиться точнее, как функцию скорости скольжения, которая принимает значение нуль, когда эта скорость равна нулю, и сразу становится равной конечной и постоянной величине, как только эта скорость станет отличной от нуля.

Возьмем снова уравнение (6') и заметим, что отношения

$$\frac{V_x - V_{2x}}{V_a}, \quad \frac{V_y - V_{2y}}{V_a},$$

то есть косинусы углов между координатными осями и скоростью точки опоры, в которой действует сила трения, имеют постоянные значения. В таком случае уравнения (5) примут вид

$$\frac{dV_x}{dt} = -fg \cos \alpha,$$

$$\frac{dV_y}{dt} = -fg \cos \beta.$$

Интегрируя эти уравнения и обозначив через x, y координаты положения центра шара в конце времени t , будем иметь:

$$V_x = V_{1x} - fg \cos \alpha \cdot t,$$

$$V_y = V_{1y} - fg \cos \beta \cdot t$$

и

$$x = V_{1x}t - fg \cos \alpha \cdot \frac{t^2}{2},$$

$$y = V_{1y}t - fg \cos \beta \cdot \frac{t^2}{2}.$$

Два первых уравнения для V_x и V_y показывают, что конец B' отрезка, который представляет по величине и направлению скорость V центра шара, равномерно движется к точке E , а вследствие линейности зависимостей, связывающих V_x, V_y, V_{rx} и V_{ry} , конец F' отрезка, представляющего вращательную скорость верхней точки, тоже

равномерно подвинется к E . Постоянная скорость, с которой конец B' переносной поступательной скорости V идет от B к E , равна fg , а скорость, с которой конец F' вращательной скорости V_r верхней точки идет от F к E , равна $\frac{2}{5}fg$. Относительная вращательная скорость ω верхнего центра удара изобразится отрезком $B'D$, где точка D всегда остается одной и той же.

Полученные значения для x и y показывают, что описанная центром шара кривая будет параболой; это можно видеть и непосредственно из того факта, что сила трения действует в постоянном направлении, и мы только что приняли, что она постоянна и по величине.

Можно легко вывести уравнение этой параболы, но мы предпочтем отыскать лишь крайние точки этой криволинейной части траектории¹⁾ центра шара, которую он описывает до перехода в конечное состояние, и построить касательные к параболе в этих точках. В исходной точке направление касательной к кривой определит начальная скорость AB , составляющими которой являются V_{1x} и V_{1y} .

Для получения таких же данных для конца криволинейной части траектории, соответствующего переходу шара в финальное состояние, нужно положить $V_x = V_{2x}$ и $V_y = V_{2y}$; тогда получим:

$$V_{2x} = V_{1x} - fg \cos \alpha \cdot t,$$

$$V_{2y} = V_{1y} - fg \cos \beta \cdot t.$$

Отсюда получается:

$$t = \frac{1}{fg} \sqrt{(V_{1x} - V_{2x})^2 + (V_{1y} - V_{2y})^2},$$

или, заменяя V_{2x} и V_{2y} их значениями (9):

$$t = \frac{2}{7} \frac{V_a}{fg},$$

где, как и раньше, V_a обозначает скорость, с которой точка опоры скользила по сукну в начале движения.

¹⁾ В своей книге Кориолис не употреблял этого термина, а писал «кривая, описанная центром шара». (Прим. перев.)

Если через x и y мы обозначим координаты последней точки дуги параболы, то есть той точки, в которой шар получает свою финальную скорость и переходит к прямолинейному движению, то, подставляя найденное значение t в выражения координат x , y центра для любого мгновения, мы будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \frac{2}{7} \frac{V_a}{fg} \frac{V_{1x} + V_{2x}}{2}, \\ y_2 &= \frac{2}{7} \frac{V_a}{fg} \frac{V_{1y} + V_{2y}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

На основании уравнений (9) эти значения можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \frac{2}{7} \frac{V_a}{fg} \left(V_{1x} - \frac{V_{ax}}{7} \right), \\ y_2 &= \frac{2}{7} \frac{V_a}{fg} \left(V_{1y} - \frac{V_{ay}}{7} \right), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где V_{ax} и V_{ay} — составляющие скорости V_a скольжения в начальное мгновение.

В выражения для координат x_2 , y_2 можно еще ввести скорости v_{1x} и v_{1y} верхнего центра удара, и мы будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \frac{12}{49} \frac{V_a}{fg} \left(V_{1x} + \frac{5}{12} v_{1x} \right), \\ y_2 &= \frac{12}{49} \frac{V_a}{fg} \left(V_{1y} + \frac{5}{12} v_{1y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Из выражений (10) для x_2 и y_2 легко усмотреть, что если на прямой BF взять точку M в середине BE , то луч AM пройдет через точку с координатами x_2 , y_2 . Чтобы определить на этом луче положение искомой точки, достаточно будет уменьшить длину AM в отношении $\frac{2}{7} V_a$ к fg ¹⁾. Мы выполним это уменьшение, если про-

¹⁾ Напомним, что начальная скорость V_1 центра шара представлена вектором AB , а финальная скорость V_2 , т. е. скорость, соответствующая мгновению $t = \frac{2}{7} \frac{V_a}{fg}$, — вектором AE , отре-

ведем отрезок $AJ = fg$ параллельно FB , а через точку I проведем IL параллельно JM , причем точка I определяется равенствами $AI = BE = \frac{2}{7} V_a$ ¹⁾. Найденная таким образом на AM точка L и будет концом кривой, описанной центром шара. Если через эту точку L мы проведем прямую LV параллельно AE , то получим конечный путь шара.

Положение финального пути LV шара — единственная вещь, которую нужно знать, чтобы играть с уверенностью в успехе, — можно построить, если только отыскать точку, в которой эта прямая пересекает направление AG — вращательной скорости точки опоры. Это может быть выполнено следующим образом.

Так как прямая, пробегаемая шаром во время его финального движения, проходит через точку с координатами x_2 и y_2 и параллельна финальной скорости, составляющие которой суть V_{2x} и V_{2y} , то ее уравнение будет

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{V_{2x}}{V_{2y}}.$$

зок же BE является годографом вектора скорости центра шара. Вектор AM равен геометрической полусумме векторов начальной и финальной скоростей $\frac{V_1 + V_2}{2}$. Умножая этот вектор на скалярную величину (время $t = \frac{2}{7} \frac{V_a}{fg}$), получим конечную точку криволинейного отрезка траектории центра шара, лежащую где-то на прямой AM . (Прим. перев.)

¹⁾ В этом построении имеется некоторая неопределенность, зависящая от масштабов: координаты точки имеют размерность длины, отрезки AB , FB и др., выражающие скорости, имеют размерность скорости, отрезок же $AJ = fg$ имеет размерность ускорения. В зависимости от взятых масштабов для величин различных размерностей (длина, скорость, ускорение) мы будем получать различные чертежи (фиг. 1). Однако принцип построения чертежей останется тем же, изменятся только отношения размеров отрезков, выражающих механические величины различных размерностей. Чтобы при данном масштабе скорости получить траекторию шара в возможно более крупном масштабе, нужно выбрать меньшим масштаб, в котором откладывается отрезок AJ . (Прим. перев.)

Если начальное направление вращательной скорости опорной точки мы примем за ось y и положим в этом уравнении $x=0$, то значение y и будет искомым расстоянием; если мы обозначим его через ρ , то будем иметь:

$$\rho = y_2 - \frac{V_{2x}}{V_{2y}} x_2 \text{ } ^1).$$

В формулах (6') и (10), дающих выражения для V_{2x} , V_{2y} и x_2 , y_2 на основе выбранного нами направления осей координат, положим $v_{1x}=0$ и $v_{1y}=v_1$ и будем через v_1 попрежнему обозначать начальную вращательную скорость верхнего центра удара. Тогда

$$V_{2x} = \frac{5}{7} V_{1x},$$

$$V_{2y} = \frac{5}{7} (V_{1y} + v_1),$$

$$x_2 = \frac{12}{49} \frac{V_a V_{1x}}{fg},$$

$$y_2 = \frac{12}{49} \frac{V_a}{fg} \left(V_{1y} - \frac{1}{6} v_1 \right).$$

Отсюда получается:

$$\rho = - \frac{V_a v_1}{7fg}.$$

Знак этой величины показывает, что ее нужно отложить в сторону, противоположную v_1 . Мы построим ее, если через точку J (фиг. 2), взятую как на фиг. 1, проведем прямую JH , а через точку P —середицу

¹⁾ Таким образом автор отыскивает точку пересечения двух прямых: финального пути, выражаемого вышеприведенным уравнением, и направления начальной относительной скорости опорной точки, определяемого уравнением $x=0$; решая совместно два эти уравнения, автор находит расстояние ρ точки пересечения обеих прямых. (*Прим. перев.*)

AI — проведем PR параллельно JH ; точка R , в которой она пересечет прямую AH , даст нам длину $AR = \frac{V_a v_1}{7fg}$ ¹⁾.

Чтобы найти расстояние между A и прямой RLV , отсчитанное по направлению скорости BF , надо воспользоваться выражениями (10), положив $V_{ax} = 0$ и $V_{ay} = V_a$; тогда мы получим:

$$\rho = \frac{\left(\frac{2}{7} V_a\right)^2}{2fg}.$$

Это расстояние, которое должно быть отложено по AI , равно высоте для скорости $\frac{2}{7} V_a$, если помножить ее на $\frac{1}{f}$. Ее можно построить тоже очень легко.

Если, наконец, нужно иметь расстояние между A и точкой, в которой финальная линия LV , описанная шаром, пересекает прямую AB , то мы получаем:

$$\rho = \frac{V_a V_1}{7fg}.$$

Эту длину можно построить, проведя через P — середину AI — прямую PQ , параллельную JB , причем точка J определяется так, что расстояние $AJ = fg$. Финальная прямая LV должна проходить через полученную таким образом точку Q .

1) Напомним, что $AH = v = \frac{2}{5} AG$ представляет по величине и по направлению начальную относительную вращательную скорость нижнего центра удара.

Из подобия треугольников AJH и APR имеем:

$$AR = AH \cdot \frac{AP}{AJ},$$

но $AP = \frac{1}{7} V_a$ и $AJ = fg$, следовательно,

$$AR = \frac{1}{7} \frac{V_a v_1}{fg} = \rho.$$

(Прим. перев.)

Если мы хотим определить длину перпендикуляра из точки A на финальную прямую, то, обозначив ее через h' , мы получим, приравнявая момент финальной скорости алгебраической сумме моментов составляющих:

$$h' = \frac{x_2 V_{2y} - y_2 V_{2x}}{V_2};$$

подставляя вместо x_2, y_2 их выражения через V_{1x}, V_{1y} и V_{2x}, V_{2y} , найдем:

$$h' = \frac{V_a (V_{1y} V_{2x} - V_{1x} V_{2y})}{7fg V_2}.$$

Введя синус угла $(\alpha - \psi)$ между направлениями начальной и финальной скоростей, мы будем иметь:

$$h' = \frac{V_a V_1}{7fg} \sin(\alpha - \psi)^1. \quad (13)$$

Эту длину можно легко построить (см. фиг. 2), опустив из A на HB перпендикуляр AT ; он будет равен $V_1 \sin(\psi - \alpha)$. Через точку J , взятую как на фиг. 1, проводим JT и затем через точку P , середину AI , параллельно JT ведем PS ; эта прямая пересечет линию AT в точке S , которая и даст нам $AS = h'$.

Если вращательная скорость v центра удара направлена или по поступательной скорости V центра шара, или противоположно ей, то шар будет продолжать идти

¹⁾ В самом деле, направление начальной скорости определится равенством

$$\sin \alpha = \frac{V_{1y}}{V_1}; \quad \cos \alpha = \frac{V_{1x}}{V_1},$$

направление же финальной скорости — равенством

$$\sin \psi = \frac{V_{2y}}{V_2}; \quad \cos \psi = \frac{V_{2x}}{V_2}.$$

Отсюда синус угла между направлениями начальной и финальной скоростей будет

$$\sin(\alpha - \psi) = \frac{V_{1y}}{V_1} \cdot \frac{V_{2x}}{V_2} - \frac{V_{1x}}{V_1} \cdot \frac{V_{2y}}{V_2} = \frac{V_{1y} V_{2x} - V_{1x} V_{2y}}{V_1 V_2}.$$

(Прим. перев.)

по прямой линии, но его движение будет переменным, пока он не придет в финальное состояние; тогда линия AB пойдет или по AF , или в противоположном направлении и финальная скорость V_2 определится формулой

$$V_2 = \frac{5}{7}(V_1 + v_1).$$

В то же самое время для расстояния y_2 , пройденного шаром до перехода в финальное состояние, мы будем иметь:

$$y_2 = \frac{12}{49} \frac{V_1}{fg} \left(V_1 + \frac{5}{12} v_1 \right);$$

поскольку

$$V_a = V_1 - \frac{5}{2} v_1,$$

то

$$y_2 = \frac{12}{49} \frac{1}{fg} \left(V_1 - \frac{5}{2} v_1 \right) \left(V_1 + \frac{5}{12} v_1 \right). \quad (12')$$

В этом выражении знак y_2 определяется исключительно только знаком выражения $V_1 + \frac{5}{12} v_1$, так как множитель V_a в вышестоящих формулах сам по себе знака не имеет; знаки могут иметь только лишь составляющие V_x , V_y , v_x , v_y , которые при сложении дают V и v ¹⁾.

Если шар начал двигаться без вращения, то в таком случае

$$y_2 = \pm \frac{24}{49} \frac{V_1^2}{2fg},$$

причем знак будет одинаковым со знаком V_1 . Если бы шар начинал двигаться без поступательной скорости, то

$$y_2 = \pm \frac{25}{49} \frac{v_1^2}{2fg},$$

где знак будет одинаковым со знаком v_1 .

¹⁾ Здесь автор совершенно правильно указывает, что скорость V (вектор) не имеет знака, но V_x , V_y , v_x и v_y рассматриваются им в данном случае не как составляющие, а как проекции вектора, а потому они имеют знак. Определяя же геометрическую сумму, автор рассматривает V_x , V_y , v_x и v_y как компоненты скорости по осям координат. (Прим. перев.)

Общая зависимость пройденного до какого-либо мгновения расстояния y от скорости V центра в то же мгновение имеет вид

$$t = \pm \frac{V_1 - V}{fg} \quad \text{и} \quad y = V_1 t \pm \frac{fg t^2}{2},$$

причем нижний знак берется только в тех случаях, когда

$$V_1 - \frac{5}{2} v_1 < 0$$

и когда абсолютная скорость V_a опорной точки направлена противоположно скорости центра шара, так что трение стремится ускорить движение, вместо того чтобы замедлить его.

Из предыдущих уравнений получаем:

$$y = \pm \frac{V_1^2 - V^2}{2fg},$$

причем знак выбирается так, чтобы y было положительным.

Если расстояние $\frac{V_1^2}{2fg}$ обозначить через Y , то мы будем иметь:

$$V^2 = 2fg(Y - y),$$

если $V_1 - \frac{5}{2} v_1 > 0$, и

$$V^2 = 2fg(Y + y),$$

если $V - \frac{5}{2} v_1 < 0$.

Эти выражения показывают, что скорость как функция расстояния y представится ординатой некоторой параболы, фокальное расстояние которой есть $\frac{1}{2} fg$, а вершина находится на расстоянии Y , или $\frac{V_1^2}{2fg}$, от начальной точки движения шара или впереди игрока, когда $V_1 - \frac{5}{2} v_1 > 0$ (то есть скорость шара убывает), как представляет кривая CGK на фиг. 4, б или сзади него, когда $V_1 - \frac{5}{2} v_1 < 0$ (то есть скорость шара возрастает), как представляет кривая GCK на фиг. 5.

Что касается скорости v , то она определяется частью ординаты, заключенной между той или другой параболой и прямой, параллельной оси MK , проведенной на высоте $V_1 + v_1$, где v_1 представляет начальное значение v ¹⁾.

Когда мы будем разбирать действие удара кием, мы вернемся с большими подробностями к построению скоростей V и v при помощи фиг. 4 и 5.

Для того чтобы дать численные примеры на формулы, найденные в этой главе, я произвел опыты, имевшие целью определить скорость, которую может получить шар от удара кием, нанесенного по направлению, проходящему через центр.

Ударив горизонтально шар обычной величины, подвешенный на нити длиной около 2 м, я заметил, что при ударе кием, который дает средний игрок (но не при более сильном ударе, который могли бы дать некоторые игроки), шар поднимался по вертикали приблизительно на 1,20 м, причем для очень сильного удара кием высота подъема могла доходить до 2,50 м. Таким образом, если через V_0 обозначить начальную скорость центра шара, то для обычного удара будем иметь²⁾:

$$\frac{V_0^2}{2g} = 1,20, \quad \text{или} \quad V_0 = 4,86 \text{ м/сек},$$

а для сильного удара

$$\frac{V_0^2}{2g} = 2,50, \quad \text{или} \quad V_0 = 7,00 \text{ м/сек}.$$

Для определения коэффициента f я устроил прибор, при помощи которого шар передвигался горизонтально

¹⁾ Как уже было доказано, абсолютная скорость верхнего центра удара

$$V + v = \text{const.}$$

Если мы проведем параллельно оси x прямую, определяемую этим уравнением, то разность ординат графика скорости V и точек этой прямой даст нам относительную скорость v верхнего центра удара. (*Прим. перев.*)

²⁾ По известной формуле Галилея $V = \sqrt{2gh}$, где h — высота подъема (или падения), а V — скорость точки в наинизшем положении. (*Прим. перев.*)

по сукну при помощи нити, натянутой грузом. Сделав на сукне отметки, я смог прийти к заключению, что движение шара было приблизительно равномерным, когда на него действовала сила, равная 0,25 его веса в случае тонкого сукна или 0,30 его веса в случае сукна, более грубого или долго бывшего в употреблении.

Первое значение следует принять для бильярда, находящегося в хорошем состоянии. Хотя в опытах по определению трения скорость шара не превышала 1 м/сек, тогда как после удара кием шар может получить значительно большую скорость, однако другие опыты (между прочим, опыты, произведенные г. Мореном¹⁾ показали, что для всех тел трение не зависит от скорости, если она не превышает 4 м/сек; поэтому мы могли, не боясь ошибиться, допустить, что точно так же дело обстоит и в данном случае для трения шара о сукно и что величина его всегда остается постоянной независимо от скорости. Поэтому, взяв для приложений

$$f = 0,25,$$

мы получаем для обычного удара кием

$$\frac{V_0^2}{2fg} = 4,80 \text{ м},$$

а для сильного удара кием

$$\frac{V_0^2}{2fg} = 10,00 \text{ м}.$$

Таким образом, если шар начинает свое движение без вращения, как это происходит, когда кий ударяет его по направлению, проходящему через его центр, то расстояние y_2 от отправной точки до той точки, где шар начинает катиться без скольжения и приходит в состояние, которое мы назвали финальным, дается формулой

$$y_2 = \frac{24}{49} \frac{V_0^2}{2fg},$$

¹⁾ Артур Жюль Морен (1795—1880) — крупный французский механик. (Прим. перев.)

или приблизительно

$$y_2 = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{2fg};$$

оно для обычной скорости будет

$$y_2 = 2,40 \text{ м},$$

а для наибольшей скорости

$$y_2 = 5,00 \text{ м}.$$

В следующей главе мы увидим, как должны быть изменены эти расстояния в тех случаях, когда кий касается шара так, что линия удара не проходит через центр шара.





ГЛАВА II

О ДЕЙСТВИИ УДАРА ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ КИЕМ

Теперь мы приступим к рассмотрению действия на шар удара кием, предполагая в первую очередь, что удар направлен параллельно плоскости бильярда. Наклонному удару кием мы посвятим другую главу; теория наклонного удара кием является более сложной и менее необходимой для приложений в обычной игре, поэтому мы сочли целесообразным разобрать ее отдельно.

Употребляют два рода киев: одни заканчиваются на заостренной части кожаной наклейкой, имеющей вид выпуклой полусферы, другие оканчиваются плоскостью, перпендикулярной к их длине. При употреблении первых наклейку старательно натирают каким-нибудь веществом, увеличивающим трение о шар. Это делают для того, чтобы во время удара не произошло скольжения между кием и шаром даже в том случае, когда направленные скорости точек кия, ударяющих шар, образует достаточно заметный угол с нормалью к поверхности шара; действительно, скольжение не может иметь места, если этот угол будет меньше угла трения. Что касается киев без покрытия и обрезанных под прямым углом к оси, то (поскольку ими можно ударять только по направлению нормали к поверхности шара в точке удара), каким бы незначительным ни было трение, оно будет всегда достаточным для того, чтобы в мгновение удара не было скольжения между кием и шаром¹⁾.

¹⁾ В настоящее время кии без наклеек совершенно не применяются (*Прим. перев.*)

Уже только потому, что при ударе нет скольжения кия по шару, частицы шара, получившие удар кием, сцепляются с кием и, пока продолжается соприкосновение, не могут иметь скоростей, отличных от скоростей ударяющих точек кия. Кий направляется игроком так, чтобы во время удара точки кия сохраняли скорости, направленные по его геометрической оси, поэтому то же самое будет иметь место и по отношению к точкам шара, получившим удар; таким образом, нужно считать, что ударяемые точки шара во время удара получают от кия количество движения, направленное по оси кия.

Все это полностью подтверждается опытом. Действительно, если бы во время удара направление количества движения, сообщенного шару, не совпадало с осью кия и при соприкосновении имело бы место скольжение, то было бы совершенно невозможно наносить уверенно удар вследствие разного значения силы трения при употреблении того или другого кия. Такая разность имела бы место даже при игре одним и тем же кием в зависимости от того, больше или меньше кожаная наклейка покрыта мелом или каким-нибудь другим веществом, дающим сцепление с шаром. Когда кий при ударе скользит и трение, таким образом, изменяет направление количества движения, то говорят, что сделан кикс (*fausse queue*), а такого рода удар не принадлежит к числу тех, которыми можно выиграть бильярдную партию.

Далее, если бы вторая часть количества движения, получающаяся вследствие упругости, будучи прибавлена к той, которую получил шар при сжатии во время первой стадии удара, не имела того же самого направления, как упомянутая первая часть, то точно так же было невозможно играть с уверенностью, так как и в этом случае направление движения после удара зависело бы от относительной упругости шара и кия и не совпадало бы с направлением движения кия, как это бывает в действительности. Хотя при современном состоянии науки и невозможно прямым путем установить это положение при помощи теории, все же можно считать, что оно

в достаточной степени подтверждается опытом, и принять его за основу для вычислений.

Таким образом, основываясь на положении, что при ударе кия шар получает некоторое количество движения по направлению движения кия, приложенное в точке, где происходит соприкосновение, мы постараемся определить величину скорости, которую приобретет шар в функции количества движения¹⁾, полученного им в точке, где происходит удар; далее, мы увидим, каким образом в обычных случаях можно определить это количество движения, зная величину скорости, сообщенной кию.

Возьмем в центре шара начало прямоугольной системы координат и примем за ось y горизонтальную прямую, параллельную вертикальной плоскости, проходящей через ось кия, иными словами, через прямую, направленную по переносной поступательной скорости шара, а в качестве положительного направления этой оси выберем направление проекции переносной поступательной скорости шара на плоскость бильярда²⁾. Далее, как мы это уже делали, направим положительную ось x вправо, если смотреть от игрока, а положительную ось z вверх от плоскости бильярда. В дальнейшем *точкой удара* мы будем называть ту точку шара, которая получила удар кием; линией удара мы назовем прямую, проведенную через точку удара по направлению кия или по направлению скорости точек, ударяющих шар.

Так как удар предполагается горизонтальным, то нет надобности рассматривать действие трения о сукно во время удара; таким образом, шар остается как бы свободным. Он получит в направлении удара кия количество движения, которое будет измеряться произведением массы шара на скорость его центра.

Введем следующие обозначения:

M — масса шара;

¹⁾ Мы сказали бы «импульса силы». (*Прим. перев.*)

²⁾ Кориолис рассматривает движение шара как составное, состоящее из переносного поступательного движения вместе с центром шара и относительного вращательного движения шара вокруг его центра. (*Прим. перев.*)

R — его радиус;

V_1 — скорость, которую получает его центр в мгновение удара кием;

h — абсцисса точки, в которой произошел удар, иными словами, расстояние между центром шара и вертикальной плоскостью, проходящей через точку, где произошел удар, и через прямую, совпадающую с направлением удара, то есть через ось кия¹⁾;

l — высота точки удара над поверхностью бильярда.

Для того чтобы определить вращательное движение шара в зависимости от вышеприведенных данных, составим уравнения, согласно которым равны между собой взятые относительно центра шара моменты количеств движения²⁾, происшедших от удара, и моменты количеств движения от вращательных скоростей.

Если в качестве оси y мы возьмем направление удара кия, то это даст нам:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{5} MR^2 p_1 &= MV_1 (l - R), \\ \frac{2}{5} MR^2 q_1 &= 0, \\ \frac{2}{5} MR^2 r_1 &= -MV_1 h^3 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

¹⁾ Удары, при которых вертикальная плоскость, проведенная через ось кия, не проходит через центр шара ($h \neq 0$), часто применяются и при игре на русском бильярде (бильярд с лузами) и особенно часто при игре на французском карамбольном бильярде без луз, поэтому все такие удары у нас называют «французскими». (Прим. перев.)

²⁾ Мы бы сказали «моменты импульса силы». (Прим. перев.)

³⁾ Главный момент количеств движения шара относительно центральной оси равен произведению момента инерции шара ($J = \frac{2}{5} MR^2$) и проекции угловой скорости шара на эту ось, то есть

$$\begin{aligned} L_x &= J\omega_x = \frac{2}{5} MR^2 p_1, \\ L_y &= J\omega_y = \frac{2}{5} MR^2 q_1, \\ L_z &= J\omega_z = \frac{2}{5} MR^2 r_1. \end{aligned}$$

или, проще,

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{5} R p_1 &= V_1 \left(\frac{l-R}{R} \right), \\ \frac{2}{5} R q_1 &= 0, \\ \frac{2}{5} R r_1 &= -V_1 \frac{h}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (14')$$

В данном случае начальная вращательная скорость v верхнего центра удара направлена по оси y , поскольку $Rq_1 = 0$ ¹⁾. Если произведение Rp_1 положительно, иными словами, если $l > R$, то эту скорость нужно отложить по направлению положительной оси y , иными словами, по направлению движения, а скорость нижнего центра

С другой стороны, если направленный по оси кия импульс ударной силы сообщает шару количество движения MV_1 , направленное по оси y , и если (как это делает Кориолис) выбрать правую систему координат, а за положительное принять вращение по часовой стрелке, то главные моменты количеств движения относительно этих же осей могут быть определены по формулам

$$\begin{aligned} L_x &= zMV_y - yMV_z = (l-R)MV_1, \\ L_y &= xMV_z - zMV_x = 0, \\ L_z &= yMV_x - xMV_y = -hMV_1. \end{aligned}$$

Приравнявая друг другу правые части соответствующих равенств, получим искомое. (*Прим. перев.*)

¹⁾ В выбранной системе координаты верхнего центра удара будут

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{2}{5} R.$$

Тогда по известным формулам Эйлера найдем (принимая вращение по часовой стрелке за положительное) проекции вращательной скорости верхнего центра удара на оси координат при $q_1 = 0$:

$$\begin{aligned} v_x &= yr_1 - zq_1 = 0, \\ v_y &= zp_1 - xr_1 = \frac{2}{5} R p_1, \\ v_z &= xq_1 - yp_1 = 0. \end{aligned}$$

(*Прим. перев.*)

удара, которую мы на предыдущих фигурах обозначили через AH , должна быть отложена в противоположном направлении.

При сделанном нами предположении о горизонтальном ударе кия шар будет двигаться прямолинейно. Чтобы для каждой точки его траектории получить оба основных элемента V и v , то есть поступательную скорость его центра и относительную вращательную скорость его центра удара, возвратимся к уравнениям (5) предыдущей главы, которые дадут нам:

$$V + v = V_1 + v_1.$$

В этой формуле V_1 и v_1 представляют начальные значения скоростей V и v . Но мы имеем:

$$\frac{2}{5} R p_1 = v_1$$

или

$$v_1 = V_1 \left(\frac{l - R}{R} \right),$$

что дает нам:

$$V_1 + v_1 = V_1 \frac{l}{R}.$$

Таким образом, в любое мгновение мы будем иметь:

$$V + v = V_1 \frac{l}{R}.$$

На фиг. 4, б линия AD ¹⁾ представляет поступательную скорость V шара в то мгновение, когда он пришел в точку D , отправившись из точки M со скоростью, равной $MC = V_1$. Проведем горизонтальную прямую PE на высоте

$$MP = \frac{V_1 l}{R},$$

иными словами, так, что если MC представляет радиус шара, то MP представит высоту l удара над поверх-

¹⁾ Вернее, DA . (Прим. перев.)

ностью бильярда. Таким образом, расстояния точек параболы от этой прямой представят нам скорости v . Когда скорость v направлена в ту же сторону, что и V , то есть когда вращение прямое, то точка A параболы находится ниже PE ; если точки параболы расположены выше PE , то вращение, соответствующее v , будет обратным.

Скорость V_2 шара в финальном состоянии определяется формулой

$$V_2 = \frac{5}{7}(V_1 + v_1),$$

что в нашем случае дает:

$$V_2 = \frac{5}{7} V_1 \frac{l}{R}.$$

Таким образом, скорость V (фиг. 4, б) никогда не опустится ниже этого значения в случае, соответствующем нижней параболе, и не поднимется выше этой величины в случае верхней параболы. Мы укажем сейчас, как можно различить оба эти случая в зависимости от высоты точки удара кием.

Ординаты, соответствующие частям линий, проведенным сплошной линией на фиг. 4, б, указывают скорости шара; состояние переменного движения шара всегда прекращается, когда скорость V становится равной $\frac{5}{7} V \frac{l}{R}$, то есть когда парабола пересекает прямую GL , проведенную на соответствующей высоте. Эта прямая будет расположена тем выше, чем больше высота l точки удара, то есть чем выше точка удара.

В предыдущей главе мы сказали, что случай верхней параболы (фиг. 5) будет иметь место только при неравенстве

$$V_1 - \frac{5}{2} v_1 < 0,$$

что дает нам:

$$V_1 - \frac{5}{2} V_1 \left(\frac{l}{R} - 1 \right) < 0$$

или

$$l > \frac{7}{5} R.$$

Таким образом, скорость точки опоры будет противоположна движению шара, и трение будет увеличивать скорость только в том случае, когда удар кием нанесен на расстоянии, большем $\frac{2}{5}$ радиуса шара над центром, то есть выше верхнего центра удара шара.

Когда удар наносится как раз на высоте этой точки, шар сразу же переходит в свое финальное состояние, мы имеем $V = \frac{5}{7} V_1 \frac{l}{R}$ и прямая проходит через точку C ; в таком случае парабола больше уже не существует. Во всех других случаях, когда $l < \frac{7}{5} R$, трение уменьшает поступательную скорость и мы имеем случай, соответствующий нижней параболе (фиг. 4, б); тогда поступательная скорость центра шара и вращательная скорость центра удара представляются высотами DA и AH и определяются формулами

$$V = \sqrt{2fg(Y-y)} = \sqrt{V_1^2 - 2fgy}$$

и

$$v = V_1 \frac{l}{R} - V,$$

в которых $y = MD$, $Y = MK$ и $V_1 = MC$ — начальная скорость центра шара.

Для получения расстояния MQ , проходимого шаром от исходной точки до той, в которой шар переходит в финальное состояние, достаточно взять выражение для y из предыдущей главы и вместо V_1 и v_1 подставить их значения; мы будем иметь:

$$y_2 = \frac{V_1^2}{2fg} \left[1 - \left(\frac{5}{7} \frac{l}{R} \right)^2 \right],$$

или приблизительно

$$y_2 = \frac{V_1^2}{2fg} \left(1 - \frac{l^2}{2R^2} \right).$$

На траектории шара имеется одна точка, которую очень важно знать для оценки всех обстоятельств игры;

это — та точка, в которой точка опоры или центр удара не имеют вращательной скорости и в которой $v=0$; мы говорим, что в это мгновение шар находится в *состоянии скольжения*. Это состояние наступает в точке I , соответствующей точке E , где парабола пересекается горизонтальной прямой PE , проведенной на высоте $V_1 \frac{l}{R}$.

В этой точке мы имеем:

$$V = \frac{V_1 l}{R},$$

расстояние MI , пройденное к этому мгновению шаром, которое мы будем обозначать через y_0 , определяется формулой

$$y_0 = \frac{V_1^2}{2fg} \left(1 - \frac{l^2}{R^2} \right).$$

Можно заметить, что точки I и Q связаны друг с другом выше написанными формулами и что с очень большой точностью можно написать равенство

$$KQ = \frac{1}{2} KI.$$

Шар проходит через это состояние скольжения и y_0 существует только в том случае, когда $l < R$, так как в противном случае прямая PE будет находиться выше параболы и не пересечет ее. Такой случай будет всегда иметь место, когда кривая скоростей представлена верхней параболой $C'G'$; действительно, поскольку она обрывается на высоте $\frac{5}{7} \frac{V_1 l}{R}$ и обращается в прямую, она не может быть пересечена прямой PE , проходящей на высоте $\frac{V_1 l}{R}$.

Когда $l=R$, то есть когда шар ударяют в центр, состояние скольжения имеет место уже в исходной точке M ; этот случай представлен на фиг. 4, б.

Когда ударяют ниже центра, то вращение будет обратным на всем интервале от M до I (фиг. 4, б), до самой точки скольжения. На этом интервале вращательная скорость верхнего центра удара v , или $\frac{2}{5} Rv$, в соот-

ветствующих формулах берется отрицательной, за точкой скольжения l скорость v становится положительной, но по величине попрежнему равной $\frac{2}{5}Rp$.

Высота l , на которой дается удар кием, не должна быть ни слишком большой, ни слишком малой, если хотят нанести уверенный удар, потому что нужно, чтобы кий не скользил по шару; предел отклонения линии удара от центра шара устанавливается самым большим углом, какой направление удара может образовать с нормалью к поверхности шара без того, чтобы получалось скольжение. Этот угол равен тому, который называют *углом трения*. Опыт показал игрокам, что можно ударить шар без скольжения вплоть до расстояния от центра, равного $0,70R$; таким образом, если через a обозначить расстояние от центра шара до линии удара, то во избежание кикса нужно бить так, чтобы было

$$a < 0,70R, \quad \text{или} \quad \sqrt{h^2 + (l - R)^2} < 0,70R.$$

Если вертикальная плоскость удара проходит через центр шара (то есть если $h = 0$), то *минимальное* значение l будет

$$l = 0,30R,$$

а *максимальное*

$$l = 1,70R.$$

Таким образом, строго говоря, еще можно дать удар на высоте верхнего центра удара, соответствующей $l = 1,40R$; однако на этой высоте бьют очень редко из боязни, чтобы при уклоне немного вверх или в сторону, что увеличивает расстояние a от центра, не сделать кикс; таким образом, почти никогда не приходится рассматривать скорости шара, представленные ординатами параболы, расположенной, как это изображено на фиг. 4.

Теперь нам остается рассмотреть, каким образом скорость V_1 , сообщенная ударом кия центру шара, может быть определена по скорости кия и по расстоянию между линией удара и центром шара в том случае, когда удар не проходит через этот центр.

Сцепление между кием и шаром во время удара, как показывает опыт, приводит к тому, что количество движения, полученное шаром и вследствие удара и вследствие упругости, всегда имеет направление скорости кия, а эта скорость не меняет заметно своего направления во время удара. Это обстоятельство позволяет определить скорость, которую приобретает центр шара. Мы сначала предположим, что во время удара кий предоставлен самому себе не сжимается рукой и не получает толчка после удара. Точно так же нам нужно будет допустить, как это делается обычно, что шар во время удара отделяется от кия и не имеет с ним соприкосновения после удара. Дальше мы увидим, каких условий требует это допущение и что происходит, если оно не имеет места.

Обозначим через

M' — массу кия,

V' — его скорость до удара,

V'_1 — его скорость после удара,

M — массу шара и R — его радиус,

V_1 — скорость его центра после удара.

Прежде всего, согласно известному закону движения центра тяжести и закону площадей, в которые не входят сила упругости тел, мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} M'V' &= MV_1 + M'V'_1, \\ \frac{2}{5} MR^2 p_1 &= MV_1(l - R), \\ \frac{2}{5} MR^2 q_1 &= 0, \\ \frac{2}{5} MR^2 r_1 &= -MV_1 h^1. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

¹⁾ Первое из этих четырех соотношений показывает, что количество движения системы (кий и шар) до удара равно количеству движения системы после удара.

Три последних равенства представляют различные выражения моментов количества движения шара относительно осей координат и были уже получены раньше (стр. 58). (*Прим. перев.*)

Остается еще установить одно уравнение, относящееся к действию силы упругости. При современном состоянии науки невозможно вычислить à priori, что эта сила упругости произведет во время удара. Вследствие этого я должен был изучить опытным путем те явления, которые она вызывает при ударе кия с шаром. Для этой цели я подвесил кий таким образом, чтобы он мог совершать горизонтальные колебания по направлению своей длины, причем все его точки описывали бы одинаковые дуги. Чтобы получить это, достаточно было прикрепить концы кия к двум расходящимся нитям, которые спускались с потолка, находящегося над кием на высоте около двух метров. При отклонениях кия от наинизшего положения, он стремился возвращаться к нему, оставаясь горизонтальным. Шар был точно так же прикреплен к двум нитям, спускавшимся с потолка и прикрепленным к шару по концам горизонтального диаметра. Таким образом, этот шар мог колебаться и в то же самое время вращаться вокруг своего горизонтального диаметра. В своем положении равновесия он был расположен так, что тонкий конец кия касался его и ось кия проходила через его центр. У конца кия и около шара были помещены градуированные дуги окружностей для измерения отклонений нитей и, следовательно, для определения высот подъема кия и шара.

После отклонения кия от положения равновесия он ударял шар в центр, имея живую силу, пропорциональную высоте первоначального подъема. Шар, получивший удар в центр, приобретал поступательную скорость, которая определялась из высоты его подъема. Если бы живая сила сохранялась после удара, то на основании сохранения количества движения центра тяжести мы должны были бы получить:

$$V_1 = \frac{2M'V'}{M'+M}, \quad V'_1 = \frac{(M'-M)V'}{M'+M} \text{ } ^1).$$

¹⁾ Если предположить, что при ударе сохраняется не только количество движения

$$M'V' = M'V'_1 + MV_1,$$

Так как кий весил в точности в три раза больше, чем шар, то $M' = 3M$ и наши формулы дали бы:

$$V_1 = \frac{3}{2} V',$$

$$V_1' = \frac{1}{2} V'.$$

Однако по отклонениям кия и шара после удара было вычислено:

$$V_1 = \frac{5}{4} V', \quad V_1' = \frac{7}{12} V'.$$

Таким образом, живая сила после удара, вместо того чтобы быть равной $M'V'^2$, или $3MV'^2$, как было бы в случае ее сохранения, оказалась равной только $\frac{372}{144} MV'^2$, или $2,56 MV'^2$ ¹⁾.

но и живая сила системы, то есть что

$$M'V'^2 = M'V_1'^2 + MV_1^2,$$

то из двух написанных уравнений находим:

$$MV_1 = M'V' - M'V_1' = M'(V' - V_1'),$$

$$M_1V_1^2 = M'V'^2 - M'V_1'^2 = M'(V' - V_1')(V' + V_1') = \\ = MV_1(V' + V_1'),$$

откуда, независимо от соударяющихся масс,

$$V_1 - V' = V_1'.$$

Подставляя это значение скорости в правую часть первого из написанных уравнений, находим:

$$M'V' = M'V_1 - M'V' + MV_1,$$

откуда получаем значение V_1 :

$$V_1 = \frac{2M'V_1'}{M' + M}.$$

Чтобы найти скорость кия после удара, подставим в первое уравнение вместо V_1 его значение $V_1' + V'$, тогда будем иметь:

$$M'V' = M'V_1' + MV' + MV_1',$$

откуда

$$V_1' = \frac{(M' - M)V'}{M' + M}.$$

(Прим. перев.)

¹⁾ Во Франции (как и в некоторых других странах) живой силой называют произведение массы точки на квадрат ее скорости. (Прим. перев.)

Следовательно, потеря при ударе составляет 0,13 полной живой силы. При изменениях скоростей кия потери живой силы оставались приблизительно в том же самом отношении. Нельзя было получить скорости кия больше чем 2,80 м/сек и, следовательно, для шара 3,60 м/сек. Не оказалось возможным проделать опыты, в которых скорости удара приближались бы к скоростям, имеющим место в обычной игре, но, поскольку вышеприведенное отношение оставалось в опытах постоянным, мы могли применять его для скоростей, имеющих место во время игры.

Для того чтобы определить потерю живой силы в тех случаях, когда линия удара проходила немного выше или ниже центра шара, так что шар получал вращательную скорость вокруг горизонтальной оси подвеса, я рассматривал, во что обращалась скорость центра; так как она является следствием общей потери живой силы, которая имела место во время удара, то я вывел отсюда, что общая потеря живой силы с учетом той, которая пошла на сообщение вращения, всегда приблизительно остается одной и той же.

Без сомнения, эти опыты недостаточны для определения потери живой силы при очень сильных ударах кия; однако, поскольку, беря постоянно для потери живой силы ту же самую дробь 0,13, мы получили следствия, которые вполне согласуются с опытом, то, конечно, представит некоторый интерес попытка вывода этих установленных практикой правил из одного только предположения, что потеря живой силы находится в постоянном отношении к величине полной живой силы.

Итак, составим уравнение, относящееся к потере живой силы. Обозначив через θ долю живой силы $M'V'^2$, которая теряется после удара, мы будем иметь:

$$(1 - \theta)M'V'^2 = MV_1'^2 + MV_1^2 + \frac{2}{5}MR^2(p_1^2 + q_1^2 + r_1^2),$$

где p_1 , q_1 , r_1 представляют уже найденные выше значения угловых скоростей. Если положим

$$a^2 = h^2 + (l - R)^2,$$

где a обозначает расстояние линии удара от центра шара, то на основании уравнений (14) найдем:

$$(1 - \theta) M' V'^2 = M' V_1'^2 + M V_1^2 + \frac{5}{2} M V_1^2 \frac{a^2}{R^2},$$

или

$$(1 - \theta) M' V'^2 = M' V_1'^2 + M V_1^2 \left(1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2} \right).$$

Если мы присоединим к этому уравнению то, которое получается из закона сохранения количеств движения,

$$M' V' = M' V_1' + M V_1,$$

то получим:

$$V_1 = V' \frac{1 + \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M} \left(1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2} \right)}}{1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2} + \frac{M}{M'}}$$

$$V_1' = V' \frac{1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2} - \frac{M}{M'} \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M} \left(1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2} \right)}}{1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2} + \frac{M}{M'}}$$

Если в выражение для V_1 — скорости, которую шар получает после нецентрального удара, — мы хотим ввести ту скорость, которую шар получил бы от такого же центрального удара, то есть удара, произведенного с той же самой скоростью кия, но нанесенного так, чтобы линия удара проходила через центр, то, обозначив эту скорость через V_0 , будем иметь:

$$V_1 = \frac{V_0 \left(1 + \frac{M}{M'} \right) \left(1 + \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M} \left(1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2} \right)} \right)}{\left(1 + \frac{M}{M'} + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2} \right) \left(1 + \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M}} \right)}.$$

Здесь величина V_0 представляет скорость, которую мы определили экспериментально и максимальное значение которой приблизительно равно 7 м/сек. Если исходить из этого значения V_0 и определять скорость, которую получит шар при нецентральной ударе его кием, с той же самой скоростью, но при линии удара, отстоя-

шей на расстоянии от центра $a = 0,60R$, то, подставляя значение $\theta = 0,13$, $\frac{M'}{M} = 3$ и $\frac{a}{R} = 0,60$, будем иметь:

$$V_1 = 0,50V_0.$$

Значения V_1 построены на фиг. 3, где абсциссы OR , или $M''M$, представляют расстояния a ; окружность описана радиусом $OM' = R$. Ординаты MC представляют скорости V_1 центра шара.

Для того чтобы V_1 и V'_1 имели найденные выше значения, необходимо, чтобы удар кием о шар происходил именно так, как мы предполагали, то есть чтобы оба тела после удара отделились друг от друга и чтобы, таким образом, было

$$V_1 > V'_1,$$

что дает нам:

$$1 + \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M} \left(1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2}\right)} > 1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2} - \\ - \frac{M}{M'} \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M} \left(1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2}\right)}$$

или, проще,

$$\left(1 + \frac{M}{M'}\right) \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M} \left(1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2}\right)} > \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2}.$$

Если это условие не имеет места, то кий после удара продолжает касаться шара; получающееся при этом трение вызовет большое замедление вращательного движения шара; в результате значительно уменьшатся все те эффекты, которые зависят от этого вращения, как мы увидим в следующей главе.

Из написанного неравенства видно, что для того, чтобы при $\theta = 0$, то есть при абсолютно упругом ударе, отношение $\frac{a}{R}$ имело наибольшее возможное значение, и равнялось $0,70$ — пределу, допускаемому условием отсутствия скольжения во время удара, необходимо, чтобы было $\frac{M}{M'} = \frac{1}{3}$. Но поскольку θ имеет величину, отличную

от нуля, то следует взять $\frac{M}{M'} > \frac{1}{3}$. Если положить $\theta = 0,13$, то окажется, что отношение $\frac{M}{M'}$ должно быть немногим больше $\frac{1}{2}$. Таким образом, если пользоваться киями, несколько облегченными по сравнению с обычно употребляемыми, то можно будет бить шар ближе к краю, не опасаясь, что после удара будет иметь место трение между кием и шаром, которое уменьшит вращение шара. Следовательно, такие кии позволят получить большее отношение между величиной скорости обратного вращения и поступательной скоростью, поскольку это отношение непосредственно после удара равно дроби

$$\frac{5}{2} \left(\frac{R-l}{R} \right).$$

Чтобы получить предельное значение a , при котором можно наносить удар, не опасаясь трения после удара, в том случае, когда $\frac{M}{M'} = \frac{1}{3}$, как это имеет место обычно, мы находим сначала:

$$\frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2} = \left(1 + \frac{M}{M'} \right) \left\{ -\frac{\theta}{2} \left(1 + \frac{M'}{M} \right) + \sqrt{\frac{\theta^2}{4} \left(1 + \frac{M'}{M} \right)^2 + 1 - \theta \left(1 + \frac{M}{M'} \right)} \right\}.$$

Таким образом, если принять

$$\theta = 0,13 \quad \text{и} \quad \frac{M}{M'} = \frac{1}{3},$$

мы получим:

$$\frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2} = 0,906,$$

откуда

$$\frac{a}{R} = 0,60.$$

Таким образом, при употреблении обычных киев, весящих в три раза больше шара, для сохранения всего вращательного движения не следует наносить удар на

расстоянии от центра, превышающем 0,60 радиуса. С более легкими киями можно будет идти до 0,70 и таким образом получить большее значение вращательной скорости по сравнению с поступательной. Так как именно от отношения этих двух скоростей зависит легкость, с которой можно заставить шар игрока отходить назад, после того как он прикоснулся к другому шару (мы увидим это в следующей главе), то отсюда следует, что для получения хорошей оттяжки¹⁾ нужно пользоваться киями, немного более легкими, чем обычные.

Теперь можно заметить, что если вместо того, чтобы в мгновение удара предоставлять кий самому себе, иными словами, вместо того, чтобы держать кий свободно, игрок, напротив, будет сжимать его в руке, то доля массы руки присоединится к массе кия, отчего уменьшится упругость. Подобного рода манера удара может быть отражена в формулах, если предположить, что M' и θ имеют несколько большие значения. Рассматривая неравенство

$$\left(1 + \frac{M}{M'}\right) \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M} \left(1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2}\right)} > \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2},$$

можно видеть, что оно теперь не будет иметь места при достаточно больших значениях $\frac{a}{R}$, так как левая часть неравенства уменьшается с увеличением M' и θ . Теперь, если ударять на том же расстоянии a от центра, как в случае, когда рука не сжимает кия, то это неравенство может не иметь места, кий не отделится от шара после удара и получающееся отсюда трение уничтожит часть вращения шара. Таким образом, чтобы ударить шар на возможно большем расстоянии от центра, не уменьшая вращения, получающегося при ударе, нужно держать кий в руке свободно и после удара не толкать вперед.

Определим, как влияют различные способы нанесения удара на расстояние, которое будет пройдено шаром до

¹⁾ Оттяжкой в бильярдной игре называется явление (эффект), при котором свой шар (то есть шар, ударенный кием) после соударения с другим шаром получает возвратное движение. (Прим. перев.).

мгновения, когда обратное вращение будет полностью исчерпано (а это расстояние должно быть всегда известно, если хотят получить специальные эффекты при ударе двух шаров или при ударе о борт, как это мы покажем в следующей главе). Подставим в выражение для y_0 , полученное в начале этой главы (стр. 63), выражение V_1 в зависимости от скорости V' кия. Таким образом, мы будем иметь:

$$y_0 = \frac{V'^2}{2fg} \frac{\left(1 - \frac{l^2}{R^2}\right) \left(1 + \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M} \left(1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2}\right)}\right)^2}{\left(1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2} + \frac{M}{M'}\right)^2}.$$

Если мы сделаем то же и в выражении для y_2 , то получится:

$$y_2 = \frac{V_1'^2}{2fg} \frac{\left(1 - \frac{25}{49} \frac{l^2}{R^2}\right) \left(1 + \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M} \left(1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2}\right)}\right)^2}{\left(1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2} + \frac{M}{M'}\right)^2}.$$

Напомним, что для горизонтального удара, какой мы здесь предполагаем, будет

$$\frac{a^2}{R^2} = \frac{h^2}{R^2} + \left(1 - \frac{l}{R}\right)^2.$$

Чтобы исследовать *максимальные значения* y_0 и y_2 , следует положить $h=0$, так как, вследствие незначительности θ , h будет иметь влияние только в знаменателе. Поэтому предположим, что $h=0$, иными словами, будем заниматься только случаем, когда вертикальная плоскость удара проходит через центр шара. Вместо $\frac{a^2}{R^2}$ подставим его выражение для данного случая, а именно $\left(1 - \frac{l}{R}\right)^2$; мы будем иметь:

$$y_0 = \frac{V'^2}{2fg} \frac{\left(1 - \frac{l^2}{R^2}\right) \left(1 + \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M} \left[1 + \frac{5}{2} \left(1 - \frac{l}{R}\right)^2\right]}\right)^2}{\left[1 + \frac{M}{M'} + \frac{5}{2} \left(1 - \frac{l}{R}\right)^2\right]^2}$$

и

$$y_2 = \frac{V'^2 \left[1 - \left(\frac{5}{7} \frac{l}{R} \right)^2 \right] \left(1 + \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M} \left[1 + \frac{5}{2} \left(1 - \frac{l}{R} \right)^2 \right]} \right)^2}{2fg \left[1 + \frac{M}{M'} + \frac{5}{2} \left(1 - \frac{l}{R} \right)^2 \right]^2}.$$

Можно ввести в эти формулы скорость V_0 , которую получил бы шар от того же удара кием, если бы удар был центральным; в таком случае

$$V_0 = V' \frac{1 + \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M}}}{1 + \frac{M}{M'}},$$

откуда

$$V' = \frac{V_0 \left(1 + \frac{M}{M'} \right)}{1 + \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M}}}.$$

Подставляя это значение в предыдущие выражения, будем иметь:

$$y_0 = \frac{V_0^2}{2fg} \times \frac{\left(1 - \frac{l^2}{R^2} \right) \left(1 + \frac{M}{M'} \right)^2 \left(1 + \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M} \left[1 + \frac{5}{2} \left(1 - \frac{l}{R} \right)^2 \right]} \right)^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M}} \right)^2 \left[1 + \frac{M}{M'} + \frac{5}{2} \left(1 - \frac{l}{R} \right)^2 \right]^2}$$

и

$$y_2 = \frac{V_0^2}{2fg} \times \frac{\left(1 - \frac{25}{49} \frac{l^2}{R^2} \right) \left(1 + \frac{M}{M'} \right)^2 \left(1 + \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M} \left[1 + \frac{5}{2} \left(1 - \frac{l}{R} \right)^2 \right]} \right)^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M}} \right)^2 \left[1 + \frac{M}{M'} + \frac{5}{2} \left(1 - \frac{l}{R} \right)^2 \right]^2}.$$

Не следует терять из виду, что эти формулы имеют место только в том случае, когда после удара шар тотчас отделяется от кия, иными словами, когда расстояние a

не превосходит некоторой предельной величины, которая тем меньше, чем крепче кий сжимается рукой.

Оставаясь в этих пределах, когда вращение не изменяется, можно спросить, на каком расстоянии от центра надо ударить шар для того, чтобы получить наибольшие возможные значения для y_0 и y_2 . Действительно, можно сразу увидеть, что вышеприведенные выражения имеют максимальное значение в зависимости от l . Если мы положим для сокращения

$$\frac{a}{R} = z = 1 - \frac{l}{R}$$

и обозначим через A, B, C, D постоянные числа в наших формулах¹⁾, то придем к выражению вида

$$y_0 = \frac{(2z - z^2)(1 + \sqrt{A - Bz^2})^2}{(C + Dz^2)^2}.$$

Если вместо максимального значения y_0 мы будем отыскивать максимум $\sqrt{y_0}$, то получим уравнение

$$\begin{aligned} 2Dz(2z - z^2) &= \\ &= (C + Dz^2) \left[1 - z - \frac{Bz(2z - z^2)}{(1 + \sqrt{A - Bz^2})\sqrt{A - Bz^2}} \right]. \end{aligned}$$

Если взять $\frac{M'}{M} = 3$ и $\theta = 0,13$, то мы будем иметь $A = 0,48$, $B = 0,97$, $C = 1,33$, $D = 2,50$.

¹⁾ Эти постоянные числа имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} A &= 1 - \theta - \theta \frac{M'}{M}, \\ B &= \frac{5}{2} \theta \frac{M'}{M}, \\ C &= \frac{\sqrt{2fg}}{V_0} \left(1 + \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M}} \right), \\ D &= \frac{5}{2} \frac{\sqrt{2fg}}{V_0} \frac{1 + \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M}}}{1 + \frac{M'}{M}}. \end{aligned}$$

(Прим. перев.)

При помощи последовательных подстановок найдем, что величина z очень близка к 0,25; можно считать ее равной этой дроби. Таким образом, при определенной силе удара кием нужно бить шар приблизительно на расстоянии 0,25 радиуса ниже центра, для того чтобы точка скольжения шара получилась бы на возможно далеком расстоянии. Если при таком низком ударе кий крепко сжимать в руке, то он не мгновенно отделяется от шара, и таким образом уничтожается часть вращательной скорости, поэтому точка скольжения окажется на расстоянии, которое дает эта формула, только в том случае, если кий держать свободно.

Отыскивая максимум y_2 или, что сводится к тому же, $\sqrt{y_2}$, мы придем к уравнению

$$2Dz \left[1 - \frac{25}{49}(1-z)^2 \right] = \\ = (C + Dz^2) \left[\frac{25}{49}(1-z) - \frac{Bz \left[1 - \frac{25}{49}(1-z)^2 \right]}{(1 + \sqrt{A - Bz^2})\sqrt{A - Bz^2}} \right].$$

Буквы A , B , C , D обозначают в этом уравнении те же самые числа, что и выше. При помощи последовательных подстановок можно найти, что z заключается между 0,09 и 0,10; поэтому в приложениях можно считать эту величину равной 0,10. Таким образом, для того чтобы шар перешел в состояние качения на возможно более далеком расстоянии, нужно ударять его приблизительно на 0,10 радиуса ниже центра.

Максимальные значения y_0 и y_2 таковы:

$$y_0 = 0,33 \frac{V_0^2}{2fg} \quad \text{и} \quad y_2 = 0,57 \frac{V_0^2}{2fg}.$$

Выражение V_1 в функции расстояния a линии удара от центра шара нужно также и для того, чтобы знать, как нанести удар кием для получения возможно большей горизонтальной скорости вращения точек, находящихся на горизонтальном экваторе, иными словами, для получения максимально большей величины Rr , если мы уже положили $l = R$ и, следовательно, $a = h$.

В таком случае

$$Rr = \frac{5}{2} V_1 \frac{h}{R} =$$

$$= \frac{5}{2} \frac{h}{R} \frac{V_0 \left(1 + \frac{M}{M'}\right) \left(1 + \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M} \left(1 + \frac{5}{2} \frac{h^2}{R^2}\right)}\right)}{\left(1 + \frac{M}{M'} + \frac{5}{2} \frac{h^2}{R^2}\right) \left(1 + \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M}}\right)}.$$

Если в качестве постоянных возьмем те же самые числа, как и выше, то для определения $\frac{h}{R}$ из условия, что скорость Rr должна иметь максимальное значение, мы будем иметь уравнение

$$\frac{5h^2}{R} = \left(E + \frac{5}{2} \frac{h^2}{R^2}\right) \left[1 - \frac{B \frac{h^2}{R^2}}{\sqrt{A - B \frac{h^2}{R^2}} \left(1 + \sqrt{A - B \frac{h^2}{R^2}}\right)}\right]^{1)}.$$

Полагая $A = 0,48$, $B = 0,97$, $E = 1,33$, мы получим:

$$\frac{h}{R} = 0,50,$$

и тогда одновременно будем иметь:

$$Rr = 0,75 V_0.$$

Значения скорости Rr в функции h (в предположении $a = h$ и, следовательно, $l = R$) представлены ординатами PR кривой $R'RO$ (фиг. 6), абсциссы которой соответствуют значениям h^2 .

Можно еще поставить себе задачей получить максимальное значение финальной скорости и одновременно скорости в состоянии скольжения; эти скорости суть

$$\frac{5}{7} V_1 \frac{l}{R} \quad \text{и} \quad V_1 \frac{l}{R}.$$

1) Здесь введено обозначение $E = 1 + \frac{M}{M'}$. (Прим. перев.)

2) На графике (фиг. 6) ось абсцисс направлена по вертикали от центра, а ось ординат горизонтальна. (Прим. перев.)

Примем сначала в этом случае $h=0$, что дает:

$$a^2 = (l - R)^2,$$

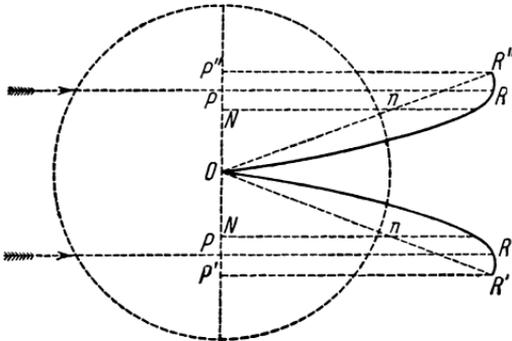
или

$$\frac{l}{R} = 1 + \frac{a}{R}.$$

Таким образом, для $V_1 \frac{l}{R}$ получается выражение

$$V_1 \frac{l}{R} = \frac{V_0 \left(1 + \frac{a}{R}\right) \left(1 + \frac{M}{M'}\right) \left(1 + \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M} \left(1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2}\right)}\right)}{\left(1 + \frac{M}{M'} + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2}\right) \left(1 + \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M}}\right)}.$$

Если взять для $\frac{M}{M'}$ и θ те же числовые значения, что и раньше, и положить, как всегда, $A=0,48$, $B=0,07$ и

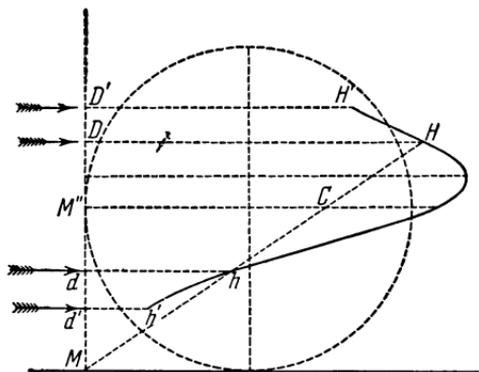


Фиг. 6.

$E=1,33$, то условие максимума по отношению к $\frac{a}{R}$ дается уравнением

$$\begin{aligned} 5 \frac{a}{R} \left(1 + \frac{a}{R}\right) &= \\ &= \left(E + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2}\right) \left(1 - \frac{B \left(1 + \frac{a}{R}\right) \frac{a}{R}}{\sqrt{A - B \frac{a^2}{R^2}} \left(1 + \sqrt{A - B \frac{a^2}{R^2}}\right)}\right). \end{aligned}$$

Корень этого уравнения есть $\frac{a}{R} = 0,19$; таким образом, для получения максимального значения величины $V_1 \frac{l}{R}$ надо бить шар на расстоянии приблизительно пятой части радиуса над центром.



Фиг. 7.

В этом случае мы имеем:

$$V_1 \frac{l}{R} = 1,09 V_0.$$

Переменные величины $V_1 \frac{l}{R}$ в предположении $a = l - R$ или $a = R - l$ представлены ординатами DH кривой $h'hHH'$ (фиг. 7); абсциссы, отсчитываемые от точки M , представляют величины l^1 .

¹⁾ На фиг. 7 ось абсцисс вертикальна, а ось ординат горизонтальна. (Прим. перев.)





ГЛАВА III

ОБ УДАРЕ ДВУХ ШАРОВ И КАРАМБОЛЕ ¹⁾ БЕЗ УЧЕТА ВЕСЬМА МАЛОГО ТРЕНИЯ МЕЖДУ ШАРАМИ ВО ВРЕМЯ УДАРА

Наиболее нужным для практики бильярдной игры является изучение того, что происходит после удара движущегося шара о неподвижный; этой проблемой мы теперь и займемся ²⁾.

Трение между шарами при ударе очень слабо; это признают все игроки и, кроме того, это вытекает из опытов, о которых я расскажу.

Чтобы определить трение двух шаров во время удара, я подвесил шар к нити и сделал на нем отметку, при помощи которой можно было бы наблюдать вращение, которое шар мог приобрести. Я сообщил шару равномерное вращение, для которого я точно определил длительность одного оборота; потом я сообщил подвешен-

¹⁾ В данном случае под карамболом Кориолис понимает удар своего шара последовательно по двум или нескольким шарам.

При игре в русскую пирамиду под карамболом понимают удар, при котором свой шар, ударившись предварительно о другой или несколько других шаров, ударяет назначенный шар и кладет его в лузу. (*Прим. перев.*)

²⁾ В этой главе исследуется главным образом движение своего шара после соударения с противостоящим. Изучение этого движения, действительно, является наиболее необходимым для практики так называемой карамбольной игры. Но и при игре в распространенную у нас пирамиду тоже нужно уметь «управлять» своим шаром после соударения, то есть уметь отвести свой шар и поставить в такое место, куда это желательно игроющему. (*Прим. перев.*)

ному шару сбоку горизонтальный косой¹⁾ удар другим шаром так, чтобы посредством трения сообщить ударяемому шару вращение в направлении, противоположном существующему; я постепенно менял силу удара так, чтобы почти полностью уничтожить все существующее вращение или по крайней мере оставить настолько малое вращение, чтобы можно было его измерить во время качаний шара на нити. Без влияния трения во время удара шар получил бы колебательное движение на нити, которое никак не отразилось бы на вращении, существовавшем до удара; но так как в результате трения, кроме радиального удара, проходящего через центр тяжести, происходит тангенциальный удар, то вследствие этого получалось изменение вращения шара.

Пусть MV будет количество движения, сообщенное шару во время удара при наличии трения, и пусть φ будет угол трения; тогда $MV \sin \varphi$ будет количество движения, обусловленное силой трения; его отношение к количеству движения по нормали в точке удара или к $MV \cos \varphi$ будет равно $\operatorname{tg} \varphi$; именно этот тангенс и обозначается буквой f .

Если через h мы обозначим высоту, на которую поднялся шар во время своих колебаний, то будем иметь:

$$V^2 = 2gh.$$

Называя буквой Ω разность угловых скоростей до и после удара и обозначая через R радиус шара, мы будем иметь для вращательного движения

$$\frac{2}{5} R\Omega = V \sin \varphi.$$

Таким образом,

$$\sin \varphi = \frac{\frac{2}{5} R\Omega}{\sqrt{2gh}}.$$

¹⁾ Косым ударом в данном случае является такой удар, при котором скорость ударяющей точки составляет острый угол с касательной плоскостью, проведенной к шару в точке удара. (*Прим. перев.*)

В произведенных опытах мы имели $R=0,025$ м¹), шар при ударе поднимался на высоту $h=0,25$ м и при этом уничтожалась угловая скорость в один оборот в секунду; таким образом, $\Omega=2\pi$. Следовательно, значение $\sin \varphi$ равно

$$\sin \varphi = 0,028,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi = 0,028.$$

Таким образом, в данном случае коэффициент трения f равнялся 0,028.

Так как трение между шарами очень незначительно, то мы сначала рассмотрим действие удара, пренебрегая этим трением.

Опыты с ударами бильярдных шаров, подвешенных на нитях, свидетельствуют о почти абсолютной упругости удара; поэтому в практике игры можно с очень большой степенью приближения считать удар шаров абсолютно упругим. Кроме того, далее, для завершения теории мы будем рассматривать трение между шарами. Мы укажем тогда же, как учесть и неабсолютную упругость шаров. Но, повторяем, оба эти влияния в обычных условиях можно и не рассматривать; поэтому мы сначала будем ими пренебрегать.

Начнем с рассмотрения обычного в игре случая, когда свой шар, получив горизонтальный удар кием, движется по прямой линии, имея элементы движения, определенные в предыдущей главе.

Если MD (фиг. 4,б) представляет расстояние y , пройденное шаром от отправной точки M , а MC — скорость V_1 , которую получил центр шара от удара кием, то переносная скорость V центра шара и вращательная скорость v его центра удара изобразятся линиями AD и AH .

Действие удара шаров при их абсолютной упругости и равенстве масс, как известно, заключается в том, что ударяющиеся шары обмениваются нормальными скоростями

¹) В русском бильярде шары обычно бывают крупнее, а именно 0,0325 — 0,0365 м. (Прим. перев.)

центров. Таким образом, свой шар потеряет скорость, нормальную к общей касательной к шарам в точке удара, и сохранит только тангенциальную.

Пусть α будет угол, который касательная к поверхности шара в точке удара образует с направлением движения своего шара до удара, иными словами, с направлениями скорости V и скорости v , которая до удара шаров направлена так же, как и скорость V , или противоположно.

После удара, если пренебрегать трением между шарами, вращение не изменится: скорость v сохранит ту же самую величину и направление, но скорость V , изменившись, получит значение $V \sin \alpha$ и будет направлена по горизонтальной касательной в точке удара, иными словами, она образует угол α с направлением скорости V до удара¹⁾. Поэтому, если скорость V до удара была представлена отрезком AD (фиг. 8), то после удара она будет изображаться проекцией AB линии AD на направление касательной в точке удара. Если мы сделаем то же построение, что и на фиг. 1, то получим (фиг. 8) все элементы движения шара после удара, принимая за начальную скорость центра шара отрезок AB , а за начальную относительную скорость нижнего центра удара отрезок AH .

Исследуем изменение пути шара в зависимости от изменения угла α в пределах от $\frac{\pi}{2}$ до нуля, но при условии, что скорости AD и AH в начале удара остаются теми же самыми. Таким образом, свой шар может касаться противостоящего шара в точке, более или менее удаленной от тыльной точки; в таком случае достаточно будет построить круг на $AD = V$, как на диаметре. Будем рассматривать этот круг как представляющий горизонтальный экватор противостоящего шара, и пусть T представляет точку этого шара, в которую был нанесен удар; проведем хорду AB перпендикулярно к радиусу RT ; эта

¹⁾ Таким образом, согласно принятой терминологии угол α является углом первоначального отклонения своего шара. (Прим. перев.)

скоростью AH и ей противоположной $AF = \frac{5}{2} AH = V_r$, мы построим все элементы движения своего шара после удара.

Таким образом направление финальной скорости определится направлением секущей, проведенной из H в точку B круга. Чтобы получить точку, через которую должна пройти прямая финального движения, направление которой параллельно этой секущей HB , уменьшим расстояния FA и FD на одну седьмую со стороны точек A и D ; на остающейся длине $D'A'$, как на диаметре, опишем круг; искомая точка находится на радиусе-векторе, проведенном из A в точку M пересечения FB с этим кругом. Около A , как центра, описываем дугу круга радиусом, равным fg , или $2,45 m$; проведем радиус AJ , параллельный FB ; потом через точку I , в которой этот радиус встречает HB , ведем IL параллельно JM ; полученная на AM точка L будет концом параболы, описанной шаром, до того мгновения, когда он перейдет на прямую LV его финального движения, начинающегося от этой точки L .

Где бы ни находилась точка, в которой происходит удар двух шаров, направление финального пути будет всегда совпадать с направлением секущей HB , выходящей из постоянной точки H ; это направление будет несколько изменяться, когда точка H будет находиться вне круга, иными словами, когда вращение будет прямым, и отрезок AH , представляющий скорость нижнего центра удара, должен откладываться в сторону, противоположную V или AD ¹⁾.

Если через ϕ мы назовем максимально возможный угол отклонения финального пути своего шара от направления

¹⁾ Эти построения аналогичны построениям фиг. 1. Обращаем внимание читателя, что здесь, как и во многих других местах, Кориолис остроумно совмещает на одном и том же чертеже построения, сделанные в различных масштабах. Так, отрезок AD изображает и скорость своего шара до удара, и диаметр противоположащего шара, отрезок же AJ , по размеру на чертеже приблизительно равный радиусу шара, сделан опять в ином масштабе и представляет длину $2,45 m$ и т. д. (*Прим. перев.*)

AD его скорости V до удара о противостоящий шар, то будем иметь:

$$\sin \psi = \frac{\frac{1}{2} V}{\frac{1}{2} V + v} = \frac{V}{V + 2v} \text{ } ^1).$$

В то же самое время угол γ , определяющий точку, в которой должен быть произведен удар для получения этого отклонения, будет

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \psi \right) \text{ } ^2),$$

откуда

$$\cos 2\gamma = \sin \psi = \frac{V}{V + 2v}.$$

¹⁾ Формула приведена Кориолисом без вывода, что требует некоторых пояснений. $AD = V$ — скорость своего шара до соударения с другим шаром, направление же отрезка HB совпадает с направлением финального пути своего шара после соударения. Следовательно, отклонение финального пути своего шара от скорости до соударения определяется углом DAB , при максимальном значении которого секущая HB превращается в касательную. В этом случае она будет перпендикулярна к ненанесенному на чертеже радиусу $BR = \frac{V}{2}$ и из прямоугольного треугольника HBR имеем:

$$\sin \psi = \frac{RB}{HR} = \frac{RB}{AR + AH} = \frac{\frac{1}{2} V}{\frac{1}{2} V + v}.$$

(Прим. перев.)

²⁾ Определяется центральный угол $ART = \gamma$ на противостоящем шаре между тыльной точкой A и точкой удара T ; из прямоугольного треугольника HBR имеем:

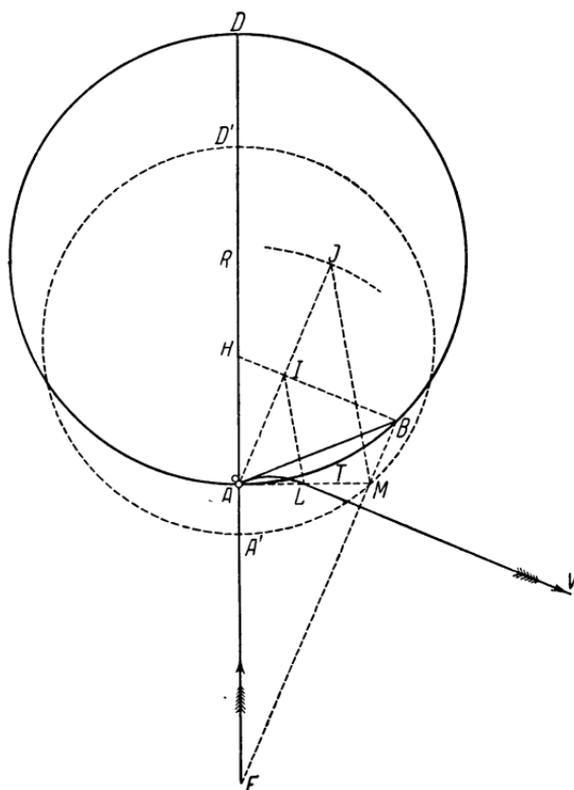
$$\angle HRB = \frac{\pi}{2} - \psi,$$

откуда

$$\gamma = \frac{1}{2} \angle HRB = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \psi \right).$$

Нетрудно видеть, что этот угол дополняет до прямого угла угол начального отклонения α , (Прим. перев.)

Если в мгновение удара вращение будет обратным и таким образом AH откладывается в сторону AD , что изменяет положение точек F и J , как это видно на фиг. 9, то финальное направление, от внутренней точки H круга,



Фиг. 9.

может пойти в любую сторону. Свой шар в финальном движении пойдет назад, если точка B будет находиться ниже проведенного через H перпендикуляра к прямой AD . Круг, на котором находятся точки M и который имеет своим диаметром $A'D'$, в таком случае будет выходить за пределы круга с диаметром AD .

Наконец, построение точки L , конца криволинейной траектории и начала финального пути, через которую нужно провести финальную прямую LV , получится, как это видно на фиг. 9, аналогично построениям фиг. 8.

Условие получения оттяжки при обратном вращении будет очевидно:

$$V \cos^2 \alpha < v, \quad \text{или} \quad \cos \alpha < \sqrt{\frac{v}{V}}.^1)$$

Скорость V центра шара и скорость v центра удара находятся всегда при помощи фиг. 4 для всякой точки траектории шара.

Точки D и H должны оставаться неподвижными по мере продвижения шара вперед. Если шар еще не достиг своего финального состояния, то точка A приближается к D и удаляется от H . Если шар начал свое движение, имея обратное вращение, вследствие удара кием, нанесенного ниже центра, то точка A будет сначала находиться ближе точки H , потом она продвигается вперед, и когда она достигнет точки H , то шар будет находиться в состоянии скольжения; в этом случае после удара шар уже не описывает криволинейной траектории.

При помощи фиг. 4 можно сразу определить, в каком направлении пойдет свой шар после удара в какой-нибудь точке D траектории: для этого нужно построить на AD полукруг; будем его сначала рассматривать как экватор противостоящего шара, и пусть T будет точкой удара на этом экваторе, а точка A — тыльной точкой; берем дугу AB вдвое большую, чем AT , и соединяем B с точкой H , где AD пересекает горизонтальную прямую PE ; тогда линия NB дает финальный путь шара. Таким образом можно определить, как следует выбрать точку соударения T , чтобы после удара можно было отвести свой шар.

¹⁾ Напомним, что $AB = AD \cos \alpha = V \cos \alpha$; следовательно, условием получения оттяжки является:

$$AB \cos \alpha < AH$$

или

$$V \cos^2 \alpha < v. \quad (\text{Прим. перев.})$$

угол ψ максимального отклонения дается формулой

$$\sin \psi = \frac{V}{V+2v} = \frac{5}{9},$$

что соответствует

$$\psi = 33^{\circ}44'.$$

Так как

$$\cos 2\gamma = \sin \psi = \frac{5}{9},$$

то

$$\cos \gamma = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\gamma}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{5}{9}}{2}},$$

или

$$\cos \gamma = \frac{1}{3} \sqrt{7} = 0,882,$$

откуда

$$\gamma = 28^{\circ}6',$$

что дает для угла начального отклонения

$$\alpha = 90^{\circ} - \gamma = 61^{\circ}54'.$$

В этом случае максимального отклонения расстояние, на котором скорость V центра своего шара проходит от центра противостоящего шара, вообще равная $2R \cos \alpha$, получает значение

$$2R \sin \gamma = 0,946 R.$$

Этот результат показывает, что, когда удар происходит в финальном состоянии своего шара, то для получения наибольшего возможного отклонения своего шара после удара, т. е. угла отклонения в 33° , нужно, чтобы его центр был направлен приблизительно к видимому краю противостоящего шара.

Если нужно получить выражение для кратчайшего расстояния финальной прямой от центра A опять в предположении, что удар произошел в финальном состоянии и при максимальном угле отклонения ψ , то согласно

формуле (13) первой главы будем иметь:

$$h' = \frac{V_a V_1}{7fg} \sin(\alpha - \psi), \quad \text{или} \quad h' = \frac{v V_a}{7fg} \sin \psi.$$

Здесь следует положить

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \frac{5}{9}, \\ v &= \frac{2}{5} V, \\ V_a &= V \sqrt{\frac{7}{3}}, \end{aligned}$$

что приблизительно дает:

$$h = \frac{1}{18} \frac{V^2}{2fg};$$

иными словами, на фиг. 4

$$V = \frac{1}{18} MK.$$

Если мы вспомним, что для финального состояния

$$V = \frac{5}{7} V_1 \frac{l}{R},$$

где V_1 представляет скорость центра тотчас после удара кием, то будем приближенно иметь:

$$h' = \frac{1}{36} \frac{\left(V_1 \frac{l}{R} \right)^2}{2fg}.$$

Если взять самые большие значения V_1 , соответствующие

$$\frac{V_1^2}{2g} = 2,50 \text{ м},$$

то есть очень сильному удару кием, и положить $l = R$, то будем иметь:

$$h' = 0,27 \text{ м}.$$

Это значение h' , соответствующее самому большому отклонению, может быть рассматриваемо без заметной

ошибки как максимальное значение этого расстояния, поскольку вблизи максимального значения ψ множитель $V_a \sin \psi$ изменяется очень мало.

Можно заметить, что если удар совершается, когда вращательная скорость верхнего центра удара направлена в ту же сторону, что и скорость V , то $v = \frac{V}{2}$. Тогда на фиг. 8 точка F попадает в центр круга, диаметр которого есть AD . В этом случае, поскольку FB остается постоянным для всех положений точки удара, финальная прямая LV выходит из точки, взятой на прямой AH на постоянном расстоянии, и точка L , конец параболы, находится на круге.

Когда удар совершается до перехода своего шара в состояние скольжения, то есть, когда он еще имеет обратное вращение, то для одной и той же точки удара свой шар будет тем больше отходить назад, чем больше отношение $\frac{v}{V}$. Это отношение будет тем больше, чем ближе мы будем к исходной точке A , как это видно из фиг. 4.

При соударении шаров вблизи исходной точки своего шара отношение $\frac{v}{V}$ равно $\frac{R-l}{R}$, и максимум этого выражения соответствует самой низшей точке, в которой можно произвести удар без того, чтобы кий после удара следовал за шаром; в предыдущей главе мы нашли, что эта точка соответствует $\frac{R-l}{R} = 0,60$, что дает нам $l = 0,40 R$.

Посмотрим, что дает нам выражение перпендикуляра h' при этом значении l .

Мы имеем:

$$h' = \frac{v V_a \sin \psi}{7fg}.$$

Максимальное значение $\sin \psi$ для всех углов γ , то есть для всех положений точки удара на противоположном шаре, будет равно единице. Этому значению приблизительно соответствует и максимум h' вследствие незначительности изменений V_a около точки, соответствующей $\sin \psi = 1$.

Для $l=0,40 R$ мы имеем $v=0,60 V$ и, следовательно,

$$V_a = 2,15 V,$$

откуда получается, что максимальное значение h' очень близко к

$$h' = 0,36 \frac{V^2}{2fg}.$$

Но во второй главе мы видели, что при ударе кием на расстоянии $0,60 R$ ниже центра получающаяся скорость центра V по сравнению со скоростью V_0 , которую получил бы шар от центрального удара такой же силы, выражается формулой

$$V_1 = 0,50 V_0.$$

Таким образом, для приближенного значения максимума h будем иметь:

$$h' = 0,09 \frac{V_0^2}{2fg};$$

для очень сильного удара кием мы имеем:

$$\frac{V_0^2}{2fg} = 10,00 \text{ м.}$$

Таким образом, приблизительно будем иметь:

$$h' = 0,90 \text{ м.}$$

Для обычного удара кием, соответствующего $\frac{V_0^2}{2fg} = 4,80 \text{ м}$, мы получили бы приблизительно:

$$h' = 0,43 \text{ м.}$$

Итак, мы видим, что если шар отступает после удара (обстоятельство, при котором криволинейность его траектории выражается наиболее ярко), то расстояние h' является достаточно большим.

Что касается движения противостоящего шара после удара, то, если пренебречь трением между этими шарами,

не приходится делать никаких вычислений для его определения; ясно, что это движение будет всегда происходить по направлению нормали в точке удара с поступательной скоростью центра, равной $V \sin \alpha$. Вращательная скорость этого шара в начальное мгновение будет равна нулю, а при переходе его в финальное состояние примет значение $\frac{5}{7} V \sin \alpha$.





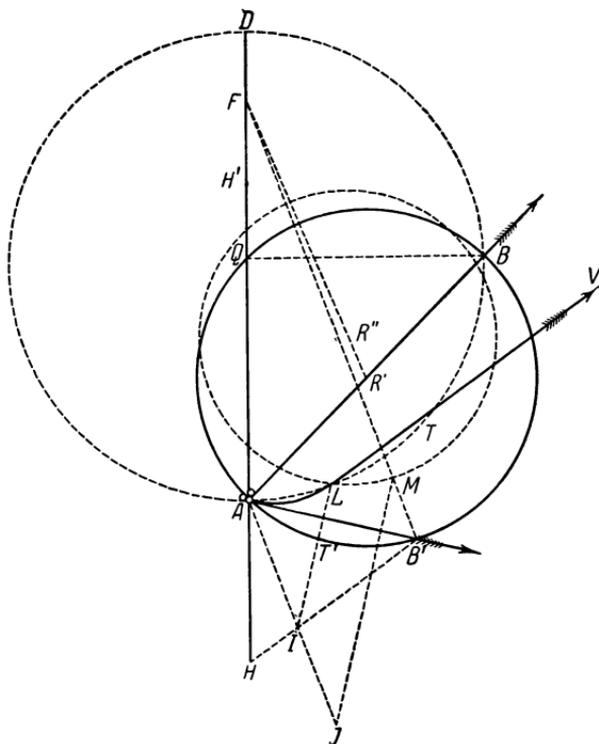
ГЛАВА IV

О ЯВЛЕНИЯХ ПРИ ВТОРОМ УДАРЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ШАРАМИ, ПРОИСШЕДШЕМ НА НЕБОЛЬШОМ РАССТОЯНИИ ОТ ПЕРВОГО УДАРА

Посмотрим, что произойдет, если свой шар, ударив один шар, ударит еще и второй, в то время, когда сам он еще не находится в финальном состоянии и описывает некоторую кривую, а следовательно, скорости V и v различны не только по величине, как мы уже предполагали в предыдущих задачах, но и по направлению; в таком случае будет достаточно обратиться к общему построению первой главы, беря для V и v значения, которые имели место в мгновение второго удара. Предположим, что второй шар, получивший удар, достаточно близок к первому, так что элементы V и v своего шара еще не изменились заметно между первым и вторым ударом. Тогда будет достаточно заметить, что если пренебречь трением во время удара и считать удар абсолютно упругим, как это можно сделать для обыкновенных бильярдных шаров, находящихся в хорошем состоянии, то направление вращательной скорости AH (фиг. 11) нижнего центра удара не изменится. Скорость V перед вторым ударом изобразится хордой AB , проведенной перпендикулярно к радиусу RT , идущему в точку T первого удара, если круг $ATBD$ представляет горизонтальный экватор шара.

Для того чтобы изобразить все пути своего шара после второго удара, если при прочих равных условиях будет меняться только точка второго удара, опишем на AB ,

как на диаметре, круг, который будет сначала представлять горизонтальный экватор второго шара¹⁾, проведем хорду AB' перпендикулярно к радиусу $R'T'$, идущему



Фиг. 11.

в точку удара T' на этом втором шаре, и линия NB' будет направлением конечного пути своего шара. После этого остается только получить точку L — конец криволинейной части траектории своего шара — точку, через которую нужно провести параллель NB' , что-

¹⁾ Масштабы, в которых изображены на фиг. 11 горизонтальные экваторы шаров, получаются различными. (Прим. перев.)

к этому малому кругу, то шар в своем финальном ходе может принять все возможные направления.

Если мы будем изменять точку удара на первом шаре, а, кроме того, и на втором, то финальные пути еще могут быть ограничены крайними касательными, проведенными к кривой, огибающей все возможные положения малого круга, описанного на последовательных хордах AB , как на диаметрах (фиг. 12).

Чтобы получить уравнение этой огибающей, обозначим через ξ и η координаты центра подвижного круга; этот центр в свою очередь будет также находиться на некотором круге; если через R мы обозначим его радиус, равный $\frac{V}{4}$, то получим:

$$\xi^2 + \eta^2 - 2rR = 0. \quad (15)$$

Уравнение подвижного круга будет

$$\xi x + \eta y = \frac{\rho^2}{2}, \quad (16)$$

если мы положим для сокращения $x^2 + y^2 = \rho^2$. Таким образом, мы будем иметь:

$$x d\xi + y d\eta = 0$$

и

$$\xi d\xi + (\eta - R) d\eta = 0^1),$$

откуда после исключения $\frac{d\eta}{d\xi}$ получается:

$$\xi y - r x = -R x;$$

поскольку же мы имеем

$$\xi x + \eta y = \frac{\rho^2}{2},$$

то из этих двух уравнений получатся значения для ξ и η ; они даются уравнениями

$$\rho^2 \xi = -R x y + \frac{\rho^2 x}{2},$$

$$\rho^2 \eta = R x^2 + \frac{\rho^2 y}{2}.$$

¹⁾ Для получения этих двух равенств Кориолис дифференцирует два предыдущих. (*Прим. перев.*)

Подставляя их в уравнение (15), помноженное на ρ^4 , получим:

$$\left(Rxy - \frac{\rho^2 x}{2}\right)^2 + \left(Rx^2 + \frac{\rho^2 y}{2}\right)^2 - 2R\rho^2 \left(Rx^2 + \frac{\rho^2 y}{2}\right) = 0.$$

Если раскрыть скобки в этом уравнении, то после сокращения на множитель ρ^2 и замены x^2 через $\rho^2 - y^2$ мы получим:

$$\left(\frac{\rho^2}{2} - Ry\right)^2 = R^2 \rho^2,$$

или после извлечения корня, который мы берем с положительным знаком, единственно пригодным для искомой обертывающей, мы будем иметь:

$$2R(\rho + y) = \rho^2.$$

Это уравнение могло бы дать легкий способ построения искомой кривой по точкам. Однако здесь достаточно будет заметить, что наша кривая представляет эпициклоиду с вершиной в точке A и центром на прямой AD (фиг. 12), образованную качением круга радиуса R или $\frac{V}{4}$ по такому же кругу.

Действительно, уравнение этой эпициклоиды получается исключением угла δ из уравнений

$$x = 2R \sin \delta + R \sin 2\delta,$$

$$y - R = 2R \cos \delta + R \cos 2\delta.$$

Если вместо $\sin 2\delta$ и $\cos 2\delta$ подставить их выражение, то эти уравнения принимают вид

$$\frac{x}{2R} = \sin \delta + \sin \delta \cos \delta,$$

$$\frac{y}{2R} = \cos \delta + \cos^2 \delta,$$

что дает нам

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{x}{y},$$

откуда, полагая попрежнему $\rho^2 = x^2 + y^2$,

$$\sin \delta = \frac{x}{\rho}, \quad \cos \delta = \frac{y}{\rho}.$$

Подставляя величину $\cos \delta$ в выражение для y , мы получим после деления на y :

$$2R(\rho + y) = \rho^2$$

— уравнение, тождественное предыдущему. Таким образом, эта эпициклоида действительно является огибающей для движущегося круга.

Согласно известному построению касательной к эпициклоиде мы легко найдем, что в случае, если при первом ударе шаров свой шар имел прямое вращение, максимальное конечное отклонение ψ после двух последовательных ударов дается формулой

$$\sin \psi = \frac{3V}{V + 4v} \sqrt{\frac{3v}{V + 4v}}.$$

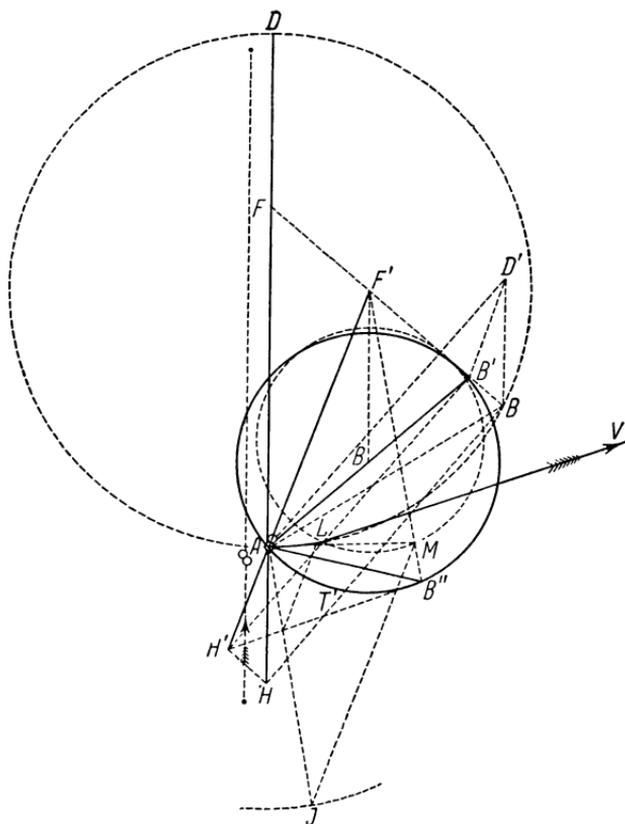
Если свой шар находится в финальном состоянии, то самый большой угол отклонения, получающийся после двух последовательных ударов, равен $51^\circ 34'$; это получается из предыдущего выражения, если положить в нем $v = \frac{2}{5} V$.

Из фиг. 11 можно видеть, что если при первом ударе свой шар имел обратное вращение (иными словами, если точка H должна перейти в H' , двигаясь в сторону точки D), то когда эта точка H' упадет выше точки Q , в которой малый круг пересекает AD , т. е. куда попадает опущенный из B перпендикуляр BQ (в чем заключается условие оттяжки после первого удара в финальном состоянии), и играющий, сохраняя постоянной точку удара на первом противстоящем шаре, будет менять ее на втором, то финальное отклонение после второго удара будет заключено между крайними касательными, проведенными к малому кругу через эту точку H' .

Если в том же самом случае точка удара будет перемещаться по первому противстоящему шару, то для

финальных отклонений не будет никаких пределов ни после первого удара, ни после второго.

Если второй противостоящий шар будет находиться не в непосредственной близости первого, но на расстоя-



Фиг. 13.

нии, достаточном для того, чтобы при переходе от первого шара ко второму существовавшие после удара элементы движения могли значительно измениться, то скорость $AB = V \cos \alpha$ должна будет измениться в AB' (фиг. 13), а скорости AF и AH в AF' и AH' . Можно

вом ударе надо действовать так, как это будет объяснено в следующей главе. Круг ADB (фиг. 14) должен быть сначала заменен немного меньшим кругом $A'B'D$, исходящим из той же точки D ; прямая AB переходит в AB' . Затем малый круг описывают не на диаметре AB' , но на диаметре AB , равном $(1 - \alpha) AB'$, где α — коэффициент, выражающий долю нормальной скорости, которую свой шар сохраняет после удара, или, как это будет показано в следующей главе, приблизительно ту долю живой силы, которая теряется при ударе шаров.

То же самое видоизменение применяется и в случае небольшого неравенства масс, но только, если более легким является свой шар, то поправка BB' должна быть произведена в противоположном смысле, так что круг $A'B'D$ будет не меньше, а больше круга ABD .





ГЛАВА V

ОБ УДАРЕ ДВУХ ШАРОВ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ МЕЖДУ ШАРАМИ ВО ВРЕМЯ УДАРА, НЕАБСОЛЮТНОЙ УПРУГОСТИ И НЕРАВЕНСТВА МАСС

Хотя бильярдные шары можно считать абсолютно упругими, но все же, поскольку это свойство может не быть вполне совершенным в некоторых шарах, можно для завершения теории предусмотреть случай несовершенной упругости. Все то, что мы скажем, можно с такой же легкостью применить и к неравенству масс обоих шаров, потому что она приводит к совершенно аналогичным результатам.

Если шары не являются абсолютно упругими, то свой шар, вместо того чтобы отдать всю нормальную составляющую скорости, сохранит некоторую ее часть; если допустить, что потеря живой силы при ударе будет оставаться в постоянном отношении с живой силой до удара, то это же самое будет иметь место и по отношению к нормальной составляющей скорости, которая до удара равнялась $V \sin \alpha$, а после удара обратилась в $k V \sin \alpha$, где k представляет весьма малый коэффициент, значение которого будет

$$k = 1 - \sqrt{1 - 2\theta},$$

или приблизительно $k = \theta^1$), где θ представляет потерю живой силы при ударе.

¹⁾ Если в предыдущем равенстве перенести 1 влево и возвести обе части в квадрат, то получим:

$$1 - 2k + k^2 = 1 - 2\theta,$$

Скорость своего шара после удара будет не $V \cos \alpha$, а геометрической суммой $V \cos \alpha$ и $kV \sin \alpha$. Легко видеть, что если на прямой AD взять точку A' (фиг. 15, а) на расстоянии $AA' = kV$ и описать окружность на $A'D$, как на диаметре, то для учета неабсолютности упругости достаточно будет вместо круга ABD взять этот круг $A'B'D$ и произвести все те же построения, что и на фиг. 8. Действительно AB' будет тогда скоростью, получающейся от сложения $AB = V \cos \alpha$ и $BB' = kV \sin \alpha$.

Таким образом, видно, что неабсолютность упругости шаров вызывает уменьшение угла, образованного скоростью AD перед ударом и финальным направлением.

Точно так же должен быть уменьшен и круг ABD на фиг. 4, б, а конец A диаметра AD немного понижен.

Будем теперь учитывать влияние не упругости, а неравенства масс обоих шаров. Если более тяжелым является свой шар и его вес превышает вес противостоящего шара на некоторую часть k , достаточно малую для того, чтобы можно было пренебрегать k^2 , то после удара мы будем иметь:

$$BB' = kV \sin \alpha.$$

Если значение k отрицательно, иными словами, если свой шар является менее тяжелым, то BB' (фиг. 15, б) откладывается в противоположную сторону и мы будем иметь:

$$BB' = -kV \sin \alpha,$$

в таком случае точка A' будет находиться вне AD и круг $A'B'D$ будет обнимать круг ABD .

Мы сказали, что обычно возможно пренебрегать трением, имеющим место между шарами во время удара;

откуда

$$k + \frac{k^2}{2} = 0.$$

Пренебрегая половиной квадрата малой величины k , находим

$$k \approx 0.$$

(Прим. перев.)

однако поскольку этого нельзя делать при некоторых ударах и, кроме того, не все шары одинаково гладки и имеются такие, для которых это трение более значительно, то мы в этой главе учтем его влияние.

Формулы и построения, которые мы установим, послужат, кроме того, с очень небольшими изменениями при исследовании удара о борт, где трением никогда не приходится пренебрегать.

Учитывая взаимное трение шаров, мы можем совершенно пренебрегать тем трением, которое во время удара производится между сукном и опорными точками шаров, поскольку это трение может получиться только от вертикальной составляющей количества движения, но эта вертикальная составляющая происходит только лишь от трения между шарами, которое является очень малым, как это следует из опытов, описанных нами выше. С еще большим правом мы пренебрежем весьма малой вертикальной скоростью, которую центры шаров могут приобрести вследствие этого трения, так как получающийся результат или уничтожается сопротивлением бильярдного сукна, или делается неощутимым вследствие веса шаров, заставляющего их сейчас же опускаться на сукно, которое они, таким образом, по существу и не покидают.

Сначала займемся вообще действием трения при ударе двух шаров. Напишем уравнения движения каждого шара и возьмем сначала координатную плоскость zx параллельной касательной плоскости к обоим шарам в точке удара; это всегда возможно, если допустить, что за время удара эта точка почти не изменяет своего положения.

Обозначим через Φ силу, производимую трением в точке соприкосновения; эта сила действует по направлению противоположному относительной скорости. Пусть буквы V_x, V_y, p, q, r обозначают те же самые величины, которые мы рассматривали выше при изучении движения одного шара; мы добавим к ним скорость V_z по направлению оси z . Через $V'_x, V'_y, V'_z, p', q', r'$ обозначим аналогичные величины, относящиеся ко второму шару. Индексом 1 внизу всех этих букв мы будем обозначать начальные значения этих величин в то мгновение, когда начинается удар.

Наконец, через X , Y , Z обозначим составляющие силы в точке соприкосновения; при этом Y и Z будут относиться к одному лишь трению Φ , а X — к нормальному давлению между шарами.

Возьмем положительные направления координатных осей для каждого шара в одну и ту же сторону и заметим, что сила, развивающаяся при ударе и действующая на один шар вместе с трением, действует так же в противоположном направлении и на другой шар; тогда вследствие такой взаимности сил мы будем иметь:

$$M \frac{dV_x}{dt} = -X = -M \frac{dV'_x}{dt},$$

$$M \frac{dV_y}{dt} = -Y = -M \frac{dV'_y}{dt},$$

$$M \frac{dV_z}{dt} = -Z = -M \frac{dV'_z}{dt},$$

что дает нам:

$$\left. \begin{aligned} V_x + V'_x &= V_{1x} + V'_{1x}, \\ V_y + V'_y &= V_{1y} + V'_{1y}, \\ V_z + V'_z &= V_{1z} + V'_{1z}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Вследствие того, что точка, в которой происходит удар, весьма мало перемещается за время удара и, таким образом, по существу остается на одном месте по отношению к координатным плоскостям, мы будем иметь для уравнений моментов:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} MR^2 dp &= 0, & \frac{2}{5} MR^2 dp' &= 0, \\ \frac{2}{5} MR^2 dq &= -RZ, & \frac{2}{5} MR^2 dq' &= +RZ, \\ \frac{2}{5} MR^2 dr &= +RY, & \frac{2}{5} MR^2 dr' &= -RY^1), \end{aligned}$$

¹⁾ Эти уравнения записаны автором не вполне строго, так как в левых частях мы видим дифференциалы, а в правых (на первый взгляд) — конечные величины. Здесь нужно под величинами X , Y и Z понимать не проекции силы, а проекции импульса мгновенной силы. (Прим. перев.)

что дает нам:

$$\left. \begin{aligned} p + p' &= p_1 + p'_1, \\ q + q' &= q_1 + q'_1, \\ r + r' &= r_1 + r'_1. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Исключая Z и Y из дифференциальных уравнений и интегрируя их, находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{5} R(p - p_1) &= 0, \\ \frac{2}{5} R(q - q_1) &= V_z - V_{1z}, \\ \frac{2}{5} R(r - r_1) &= -(V_y - V_{1y}) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{5} R(p' - p'_1) &= 0, \\ \frac{2}{5} R(q' - q'_1) &= -(V'_z - V'_{1z}), \\ \frac{2}{5} R(r' - r'_1) &= V_y - V'_{1y}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Три последних уравнения, конечно, являются следствием девяти предыдущих.

Заметим, что в уравнениях моментов в качестве Z и Y нужно брать только составляющие силы трения, поскольку момент нормальной силы равен нулю.

Заметим еще, что это трение действует по той же прямой что и относительная скорость; таким образом, составляющие силы трения, действующей на первый шар, будут:

$$Y = \frac{V_y + Rr - V'_y - Rr'}{\sqrt{(V_y + Rr - V'_y - Rr')^2 + (V_z - Rq - V'_z + Rq')^2}} \Phi,$$

$$Z = \frac{V_z - Rq - V'_z + Rq'}{\sqrt{(V_y + Rr - V'_y - Rr')^2 + (V_z - Rq - V'_z + Rq')^2}} \Phi,$$

или если обозначить для сокращения через U радикал,

выражающий относительную скорость:

$$Y = \frac{V_y + Rr - V'_y - Rr'}{U} \Phi,$$

$$Z = \frac{V_z - Rq - V'_z + Rq'}{U} \Phi.$$

Возьмем теперь уравнения, относящиеся только к одному из шаров; тогда во время удара будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} M \frac{dV_x}{dt} &= -X, \\ M \frac{dV_z}{dt} &= -\frac{V_z - V'_z - Rq + Rq'}{U} \Phi, \\ M \frac{dV_y}{dt} &= -\frac{V_y - V'_y + Rr - Rr'}{U} \Phi, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

или, если разделить почленно два последних уравнения:

$$\frac{dV_y}{V_y - V'_y + Rr - Rr'} = \frac{dV_z}{V_z - V'_z - Rq + Rq'}.$$

Вследствие существования девяти линейных соотношений (17), (18), (19) между двенадцатью неизвестными $V_x, V_y, V_z, V'_x, V'_y, V'_z, p, q, r, p', q', r'$ делитель у dV_y будет линейной функцией от V_y , а делитель у dV_z — линейной функцией от V_z ; таким образом, это дифференциальное уравнение интегрируется в логарифмах, и если перейти к числам, получится постоянное отношение между знаменателями во время удара. Но знаменатели пропорциональны косинусам углов, которые сила трения образует с осями, а следовательно, *сила трения во время удара сохраняет постоянное направление.*

Это предложение значительно облегчает введение силы трения в исследование удара шаров, поскольку для того, чтобы знать направление силы трения во время удара, достаточно знать его для начала удара.

Теперь мы рассмотрим трение при ударе движущегося шара о другой, находящийся в покое.

Будем постоянно обозначать через V скорость центра движущегося шара, а через α угол, который направ-

ление этой скорости образует с касательной плоскостью в точке удара.

Направление трения на касательной плоскости определится так, как мы определяли направление силы трения между шаром и сукном. Достаточно вспомнить, что величины Rp , Rq , Rr могут быть рассматриваемы как проекции на координатные плоскости вращательных скоростей точек, расположенных на больших кругах, параллельных этим плоскостям.

Возьмем за ось y направление горизонтальной касательной к поверхности шаров в точке удара, то есть направление скорости $V \cos \alpha$ центра шара непосредственно после удара.

Примем во внимание, что точка, в которой происходит удар, находится на горизонтальном экваторе, а следовательно, горизонтальная проекция вращательной скорости этой точки будет Rr . Но если ту же самую точку рассматривать как расположенную на вертикальном меридиане, проходящем через точку удара, то есть перпендикулярном к горизонтальной касательной в этой точке, нетрудно видеть, что вертикальная составляющая вращательной скорости равна $-Rq$, если считать положительным направление снизу вверх.

Таким образом, если для сокращения ввести обозначение

$$S = \sqrt{(Rr + V \cos \alpha)^2 + (Rq)^2},$$

то угол ϑ , который скорость в точке удара образует с направлением скорости $V \cos \alpha$, направленной в этой точке горизонтально по касательной к поверхности шара, определится формулами

$$\sin \vartheta = -\frac{Rq}{S},$$

$$\cos \vartheta = \frac{Rr + V \cos \alpha}{S},$$

причем угол ϑ считается положительным вверх от сукна.

Обозначим здесь через f' отношение между трением и получающимся в точке соприкосновения количеством движения.

Действие трения будет заключаться в том, что центру шара сообщится горизонтальная скорость

$$- f' V \sin \alpha \cos \vartheta,$$

направленная против скорости $V \cos \alpha$, и вертикальная скорость

$$- f' V \sin \alpha \sin \vartheta.$$

Мы не будем рассматривать эту последнюю скорость, поскольку она не может оказать заметного влияния на горизонтальное движение. Кроме того, в восьмой главе мы увидим, что эта вертикальная скорость ничуть не меняет направления финального пути и что во всяком случае можно определить ее влияние на описанную шаром кривую.

Трение дает, кроме того, вращательные моменты: относительно оси z

$$- f' V \sin \alpha \cos \vartheta \cdot R$$

и относительно оси y , параллельной скорости $V \cos \alpha$,

$$+ f' V \sin \alpha \sin \vartheta \cdot R.$$

Скорость $V \cos \alpha$ сохранит свое направление и станет равной

$$V \cos \alpha - f' v \sin \alpha \sin \vartheta,$$

а величины $\frac{2}{5} R^2 p$, $\frac{2}{5} R^2 q$, $\frac{2}{5} R^2 r$, представляющие моменты вращательных скоростей относительно осей после удара, станут:

$$\frac{2}{5} R^2 p,$$

$$\frac{2}{5} R^2 q + f' R V \sin \alpha \sin \vartheta,$$

$$\frac{2}{5} R^2 r - f' R V \sin \alpha \cos \vartheta.$$

Таким образом, если обозначить через V' и Rp' , Rq' , Rr' значения этих элементов после удара, то мы будем иметь:

$$V' = V \cos \alpha - f' V \sin \alpha \cos \vartheta,$$

$$\frac{2}{5} Rp' = \frac{2}{5} Rp,$$

$$\frac{2}{5} Rq' = \frac{2}{5} Rq + f' V \sin \alpha \sin \vartheta,$$

$$\frac{2}{5} Rr' = \frac{2}{5} Rr - f' V \sin \alpha \cos \alpha.$$

Если мы для сокращения положим

$$f' V \sin \alpha = u,$$

то вышеприведенные уравнения примут вид

$$V' = V \cos \alpha - u \cos \vartheta,$$

$$\frac{2}{5} Rp' = \frac{2}{5} Rp,$$

$$\frac{2}{5} Rq' = \frac{2}{5} Rq + u \sin \vartheta,$$

$$\frac{2}{5} Rr' = \frac{2}{5} Rr - u \cos \vartheta.$$

Обозначим через v_x и v_y составляющие скорости верхнего центра удара, тогда будем иметь:

$$-v_x = \frac{2}{5} Rq,$$

$$v_y = \frac{2}{5} Rp.$$

Если штрихами мы будем обозначать величины v_x и v_y после удара, то получим:

$$v'_x = v_x - u \sin \vartheta,$$

$$v'_y = v_y$$

и всегда будет иметь место равенство

$$V' = V \cos \alpha - u \cos \vartheta.$$

Вводя в формулу для $\sin \vartheta$ соотношение $-v_x = \frac{2}{5} Rq$, а в формулу для $\cos \vartheta$ выражение $Rr = -\frac{5}{2} V_1 \frac{h}{R}$, которое имеет место после горизонтального удара кием, по абсолютной величине и по знаку мы будем иметь равенства

$$\sin \vartheta = \frac{5}{2} \frac{v_x}{S},$$

$$\cos \vartheta = \frac{V \cos \alpha - \frac{5}{2} V_1 \frac{h}{R}}{S}$$

и

$$S = \sqrt{\left(\frac{5}{2} v_x\right)^2 + \left(V \cos \alpha - \frac{5}{2} V_1 \frac{h}{R}\right)^2}.$$

При помощи этих выражений, а также выражения для u

$$u = f' V \sin \alpha$$

и выражений для V' , v'_x , v'_y

$$V' = V \cos \alpha - u \cos \vartheta,$$

$$v'_x = v_x - u \sin \vartheta,$$

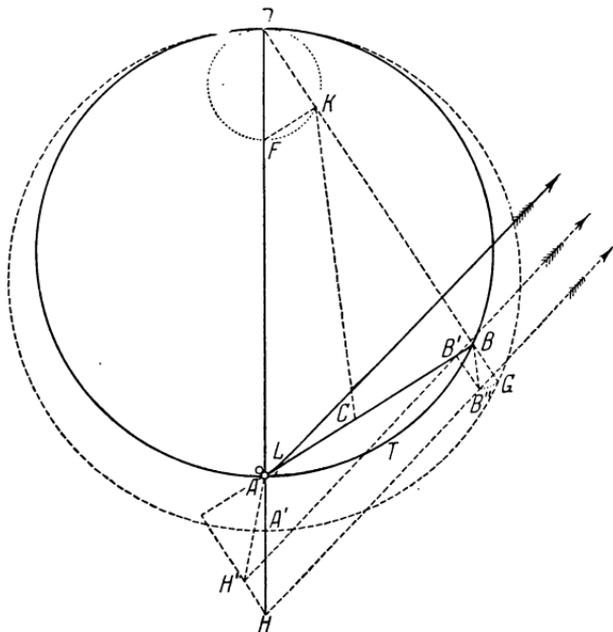
$$v'_y = v_y,$$

легко произвести все построения, относящиеся к пути шара после удара.

Если бы мы имели величину u и угол ϑ , то потребовалось бы только уменьшить $V \cos \alpha$, или AB (фиг. 16), на $u \cos \vartheta$ (при отрицательном $\cos \vartheta$ это уменьшение переходит в увеличение) и изменить отрезок AH таким образом, чтобы его проекция v_y на AB не изменилась, а его проекция на перпендикуляр к AB уменьшалась на $u \sin \vartheta$. Так как $\sin \vartheta$ имеет одинаковый знак с v_x , то отсюда следует, что величина v_x должна всегда быть уменьшенной, каков бы ни был ее знак.

Таким образом, остается рассмотреть, как построить $\sin \vartheta$ и $\cos \vartheta$.

и если откладывать эту величину в сторону B при положительном h и в противоположную при h отрицательном, то есть если удар кием нанесен со стороны, противоположной той, где происходит удар о противостоящий шар, то расстояние от C до B , взятое в направлении от



Фиг. 17.

C и B , иными словами отрицательное, если точка C упадет за B , будет всегда равным и по величине, и по знаку выражению

$$V \cos \alpha - \frac{5}{2} V_1 \frac{h}{R}.$$

Имея обе величины $\frac{5}{2} v_x$ и $V \cos \alpha - \frac{5}{2} V_1 \frac{h}{R}$, представляющие числители в выражениях для $\sin \vartheta$ и $\cos \vartheta$, мы видим, что угол ϑ будет тем углом, который образует с AB прямая CK , идущая от C к точке K , взятой на

перпендикуляре BD к AB , на том же расстоянии от AB , что и точка F , то есть в основании перпендикуляра FK , опущенного из F на DB . Действительно, этот угол будет тупым, когда $\cos \vartheta$ должен быть отрицательным, а его синус будет иметь знак v_x , то есть знак $\sin \vartheta$.

Если описать окружность на диаметре $DA' = DA + f'DA$ (фиг. 17) и продолжить DB до пересечения с нею в G , то мы получим, что $BG = f'V \sin \alpha$; эта длина BG и будет той, которую мы обозначали буквой u в предыдущих формулах. Если повернуть прямую BG вокруг точки B так, чтобы она заняла положение BB'' , при котором направление от B к B'' будет параллельно направлению от K к C , то, спроектировав BB'' на AB , мы получим точку B' и расстояние AB' даст нам значение V после удара, поскольку мы будем иметь:

$$V' = AB' = V \cos \alpha - u \cos \vartheta,$$

и это при любом знаке $\cos \vartheta$.

Новое значение скорости AN' мы получим, перенеся точку H в H' , приближая ее к AB по перпендикулярному направлению на расстояние HN' , равное $u \sin \vartheta$, то есть $B''B'$, поскольку в таком случае, действительно,

$$v'_x = v_x - v \sin \vartheta.$$

Таким образом, мы получаем элементы AB' и AN' движения своего шара после удара с учетом действия трения между обоими шарами во время удара.

Нужно заметить, что для получения финального направления $H'B'$ можно вместо переноса обеих точек H и B сохранить точку H ; тогда, вместо того чтобы пользоваться для проведения $H'B'$ точкой B' (концом AB'), можно взять точку B'' , поскольку, как это легко видеть, HB'' параллельна $H'B'$.

Если в мгновение удара вращение будет не прямым, а обратным и V изменит направление, так что точка H будет над A со стороны D , а точка F — под A , то легко видеть, что построение принимает вид, показанный на фиг. 18; здесь BB'' взято равным BG и параллельным

правление образует с AD ; в случае же обратного вращения, как это видно на фиг. 18, оно уменьшает этот угол. Таким образом, вообще его действие заключается в уменьшении острого угла, который финальное направление NB образует с начальным направлением AB , иными словами, уменьшает общую кривизну параболы.

На фиг. 17 и 18 можно также видеть, как изменяется этот угол в зависимости от того, будет ли дан удар кием с той стороны, где происходит удар о противостоящий шар, или же с противоположной ¹⁾.

Если вместо того, чтобы рассматривать первый удар шаров после горизонтального удара, нанесенного кием, мы будем рассматривать второй удар шаров, то скорости V и v в мгновение второго удара уже не будут находиться на одной прямой: они разойдутся и будут составлять между собой некоторый угол. Это будет угол DAB фиг. 11, если T будет точкой первого удара, и второй шар, получивший удар, будет находиться в непосредственной близости от первого. Если он находится на сколько-нибудь заметном расстоянии, которое делает возможным сближение обоих элементов AF и AD , то сначала получаем это изменение, как было указано в предыдущей главе, где было разобрано явление второго удара. Затем, чтобы учесть трение при втором ударе, остается только применить предыдущие построения, давая в них какое-нибудь направление для AN . После этого, поскольку равенство

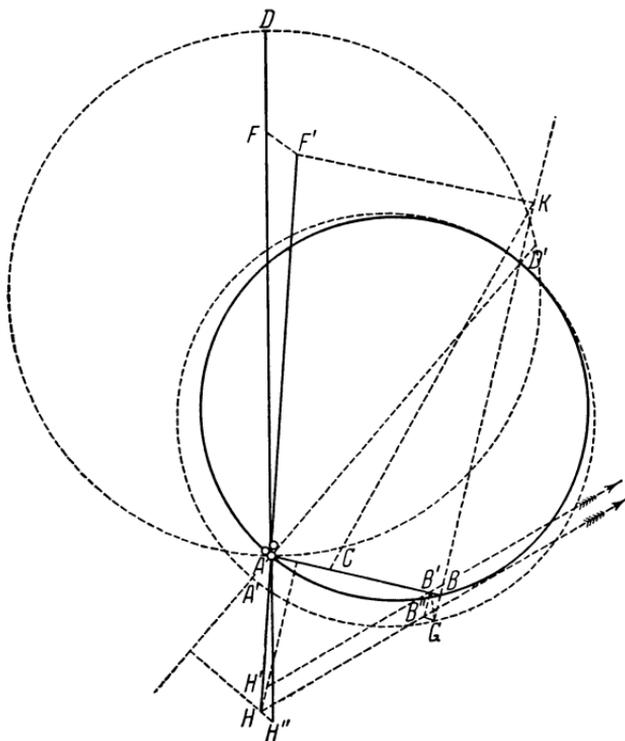
$$\sin \vartheta = \frac{5}{2} \frac{v_x}{S}$$

является всегда справедливым, понадобится только вместо $\frac{5}{2} v_x$ брать всегда проекцию $\frac{5}{2} v$, или AF' (фиг. 19), на перпендикуляр к AB . Таким образом, мы видим, что

¹⁾ Напомним, что удар кием может быть нанесен шару не только в плоскости вертикального большого круга, но также правее или левее этой плоскости (так называемые «французские удары»). (Прим. перев.)

построение угла ϑ будет производиться совершенно подобно тому, как мы только что указали.

Проведем $F'K$ параллельно AB до пересечения в точке K с хордой $D'B$; если на AB мы отложим отрезок $CA = \frac{5}{2} V \frac{h}{R}$, то прямая CK составит с AB угол ϑ .



Фиг. 19.

Теперь для получения действия трения при всевозможных положениях точки T второго удара остается только построить полукруг $D'GA'$ на диаметре $(1 + f')AD'$ и отрезок BG хорды $D'B$ повернуть так, чтобы новое его положение BB'' было параллельно и противоположно CK .

Прямая NB'' даст направление финального пути своего шара после второго удара.

Если мы хотим иметь в отдельности оба элемента AB' , AH после второго удара, чтобы вычертить криволинейную часть траектории и положение финального пути, то нужно поступать, как выше: спроектировать B'' на AB в точку B' и затем сместить H на расстояние $NN' = B''B'$ параллельно $B''B'$, приближая его к прямой AB ; скорости AB' и AH' будут как раз теми, которые придется применять при определении криволинейной части траектории, описанной своим шаром после второго удара, с учетом трения между шарами.

Из полученного выше уравнения

$$\frac{2}{5} Rr' = \frac{2}{5} Rr - u \cos \vartheta,$$

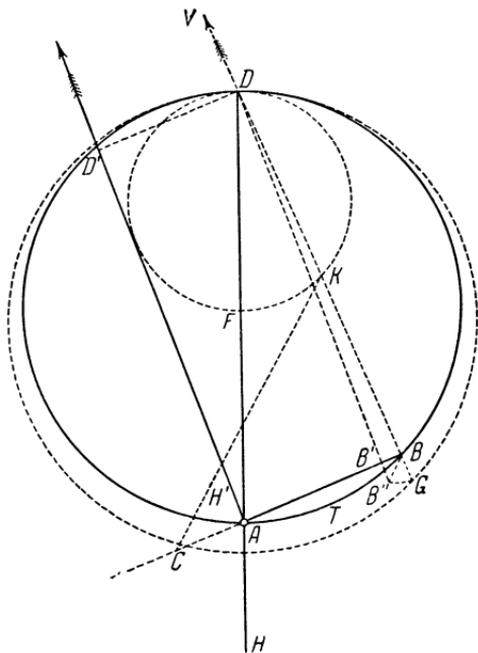
или

$$Rr' = Rr - \frac{5}{2} u \cos \vartheta$$

видно, что горизонтальная вращательная скорость точек, лежащих на горизонтальном экваторе, которая не меняется существенно во время движения шара по сукну, в результате удара несколько изменится. Ее нужно будет отнести назад в направлении, противоположном $\frac{5}{2} \cos \vartheta$, или $\frac{5}{2} BB'$, если $\cos \vartheta$ положителен, и по этому направлению, если $\cos \vartheta$ отрицателен. Таким образом, если бы мы захотели разобрать второй удар о другой шар, то вместо AC (фиг. 17 и 18) следовало бы взять AC' , таким образом точка C сместится из C к C' по направлению от B к B' на расстояние CC' , равное $\frac{5}{2}$ расстояния BB' .

Противостоящий шар, который до удара был неподвижен, всегда будет идти по прямой линии, направленной по нормали в точке касания, если не обращать внимания на небольшое влияние трения между шарами во время удара. Чтобы получить движение этого шара с

учетом трения, нужно заметить, что его поступательная скорость была бы представлена хордой BD (фиг. 20), а его вращательная скорость равнялась бы нулю, если бы не было влияния трения. Поскольку же трение, действующее на противостоящий шар, будет равно и прямо



Фиг. 20.

противоположно трению, действующему на свой шар, то финальный ход противостоящего шара получится, если соединить точку D с точкой B'' , построенной, как на фиг. 17, только этот путь будет иметь направление от B'' к D . Если желательно получить не только направление этого пути, но и значения элементов V и v после удара для того, чтобы вычертить криволинейную часть траектории и поместить параллельный $B''D$ финальный путь в его истинное положение, то в качестве численного значения и

направления скорости V центра надо взять $B'D$, а в качестве значения и направления вращательной скорости, которую мы выше обозначали через AH (это будет вращательная скорость нижнего центра удара), надо взять $B''B'$, или же $B'B''$, если хотим иметь вращательную скорость верхнего центра удара.

Предыдущее построение показывает, что финальное направление $B''D$ отклоняется от начального направления $B'D$ на угол, который весьма мал по отношению к уже весьма малому углу BDB' начального отклонения. Таким образом, кривизна траектории, описываемой противостоящим шаром, вследствие трения во время удара будет незаметной.

Ясно, что действие трения при ударе сообщает противостоящему шару вращательную скорость ω , или AH , равную изменению вращательной скорости своего шара и направленную в противоположную сторону.

Таким образом, если бы мы пожелали учесть влияние этой вращательной скорости при ударе противостоящего шара или о другой шар, или о борт, то ее следовало бы брать обратной, если скорость своего шара прямая, и прямой, если скорость своего шара обратная.

Если скорость ω в мгновение удара является обратной, как на фиг. 18, то для финального пути противостоящего шара можно будет применить такое же построение; это направление будет дано прямой $B''D$. В этом случае $B'D$ даст по величине и направлению скорость V этого шара, а $B''B'$ даст по величине и направлению скорость ω , т. е. скорость центра удара противостоящего шара.

Если свой шар ударяет противостоящий шар через небольшой промежуток времени после первого удара, иными словами, когда скорости V и ω образуют некоторый угол в мгновение второго удара, как на фиг. 19, то финальное направление движения противостоящего шара определится прямой $D'B''$ этой фигуры.

Горизонтальная вращательная скорость Rr точек горизонтального экватора противостоящего шара, очевидно,

будет равна $\frac{5}{2} u \cos \vartheta$ или $\frac{5}{2} BB'$, и ее придется взять в направлении, противоположном BB' , иными словами, отложить в направлении от B' к B .

Как мы уже сказали все эти влияния трения будут очень незначительны для хорошо отполированных шаров, но имело смысл определить, в какую сторону они будут отклонять пути шаров, если величиной трения уже нельзя будет пренебрегать в случае несколько изношенных шаров.





ГЛАВА VI

ОБ УДАРЕ О БОРТ ИЛИ НЕПОСРЕДСТВЕННО, ИЛИ ПОСЛЕ ДРУГОГО УДАРА

Рассмотрим, что происходит, когда свой шар ударяется о борт, причем его центр имеет скорость V , образующую с бортом угол α , а вращательное движение определяется элементами Rp , Rq , Rr , отнесенными к системе осей, в которой ось y идет по борту, а ось x направлена в сторону бильярда.

Чтобы получить элементы движения после удара, обозначим через ϵ некоторый дробный числовой коэффициент, такой, что нормальная скорость шара, восстановленная после удара о борт, будет определяться выражением

$$\epsilon V \sin \alpha^1).$$

Количество движения, сообщенное шару от борта во время удара, будет

$$V \sin \alpha (1 + \epsilon)^2).$$

Если f_1 представляет коэффициент трения во время удара о борт, то количество движения, происходящее от трения при ударе, будет

$$f_1 (1 + \epsilon) V \sin \alpha.$$

¹⁾ Таким образом, ϵ является коэффициентом восстановления при ударе бильярдного шара о борт. (*Прим. перев.*)

²⁾ Кориолис берет разность проекций на ось x количества движения шара после удара и до удара, причем массу шара здесь, как и в дальнейшем, он принимает равной единице. (*Прим. перев.*)

Положим для сокращения $f_1(1 + \epsilon) = f''$, тогда это количество движения будет

$$f''V \sin \alpha.$$

Далее мы укажем способ, при помощи которого можно определить коэффициент f_1 из опытов на бильярде.

Из этих опытов мы нашли, что коэффициент f_1 нужно взять несколько меньшим того, который получается в случае простого давления от веса шара при его движении по сукну, и равным приблизительно пятой части количества движения, произведенного во время удара.

Подвесив шар к нити и заставляя его ударять в борт, к которому он подходил, когда нить находилась в вертикальном положении, мы нашли из более чем пятидесяти опытов, что для скоростей от 0,20 м/сек до 7,00 м/сек коэффициент ϵ остается достаточно близким к значению 0,55. Для небольших скоростей он близок к 0,60, затем он несколько уменьшается и доходит до 0,50 для скорости 7,00 м/сек. Изменение его величины в зависимости от скорости изображено в нижней части фиг. 59, где начерченная кривая имеет своими абсциссами скорости V нормального удара, а ординатами — скорости, восстановленные при ударе о борт, то есть значения ϵV ¹⁾.

Так как вследствие формы бортов точка удара находится приблизительно на высоте центра шара, то направление трения определится углом ϑ , который скорость в точке удара составляет с направлением борта с той его стороны, где находится составляющая скорости шара по направлению борта; мы будем считать этот угол положительным вверх от сукна и отрицательным вниз. Значения $\sin \vartheta$ и $\cos \vartheta$ выражаются здесь совершенно так же, как и в случае удара двух шаров. Таким образом, если α представляет угол, которой скорость V составляет с бортом перед ударом, v_x — проекция вращательной скорости верхнего центра удара на перпендикуляр к борту,

¹⁾ Исследования Кориолиса относятся к бортам французского карамбольного бильярда. Борты русского бильярда с лузами несколько менее упруги. (Прим. перев.)

а Rr , как всегда, горизонтальная скорость вращения точек, лежащих на горизонтальном экваторе, то мы будем иметь:

$$\cos \vartheta = \frac{V \cos \alpha + Rr}{S},$$

$$\sin \vartheta = \frac{Rq}{S} = \frac{\frac{5}{2} v_v}{S},$$

где

$$S = \sqrt{\left(\frac{5}{2} v_x\right)^2 + (V \cos \alpha + Rr)^2}.$$

Если, как обычно, будем обозначать через V_x, V_y, Rp, Rq, Rr элементы движения до удара, а через $V'_x, V'_y, Rp', Rq', Rr'$ эти же элементы после удара и направим ось y вдоль борта в сторону скорости до удара, а ось x перпендикулярно к борту в сторону бильярда, то мы будем иметь:

$$V'_x = -\epsilon V \sin \alpha,$$

$$V'_y = V \cos \alpha - f'' V \sin \alpha \cos \vartheta$$

и

$$\frac{2}{5} Rp' = \frac{2}{5} Rp,$$

$$\frac{2}{5} Rq' = \frac{2}{5} Rq + f'' V \sin \alpha \sin \vartheta,$$

$$\frac{2}{5} Rr' = \frac{2}{5} Rr - f'' V \sin \alpha \cos \vartheta.$$

Если мы введем составляющие скорости центра удара, которые мы обозначали через v_x и v_y и которые связаны с Rp и Rq соотношениями

$$v_x = -\frac{2}{5} Rq,$$

$$v_y = \frac{2}{5} Rp,$$

то получим:

$$\begin{aligned}v'_x &= v_x - f'' V \sin \alpha \sin \vartheta, \\v'_y &= v_y, \\ \frac{2}{5} Rr' &= \frac{2}{5} Rr - f'' V \sin \alpha \cos \vartheta.\end{aligned}$$

Полагая, как выше, $f'' V \sin \alpha = u$, будем иметь:

$$\begin{aligned}V'_x &= -\epsilon V \sin \alpha, \\V'_y &= V \cos \alpha - u \cos \vartheta, \\v'_x &= v_x - u \sin \vartheta, \\v'_y &= v_y, \\Rr' &= Rr - \frac{5}{2} u \cos \vartheta.\end{aligned}$$

Если бы мы имели $V'_x = 0$, то эти уравнения оказались бы полностью тождественными с теми, которыми определялось движение после удара двух абсолютно упругих шаров; таким образом, построения, разобранные в предыдущей главе, изменятся только в том отношении, что к начальной поступательной скорости шара *после* удара придется добавить составляющую $\epsilon V \sin \alpha$, перпендикулярную к борту и направленную в сторону бильярда.

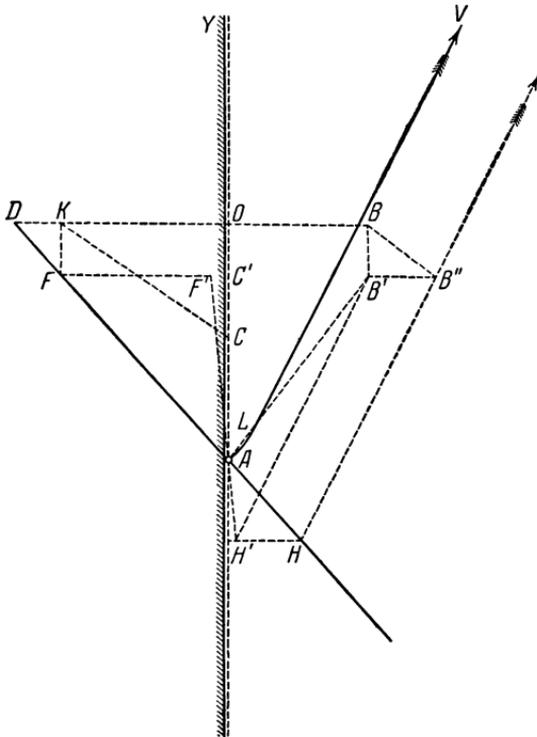
Таким образом, построив направление и величину скорости AD до удара, опустим перпендикуляр DO на борт (фиг. 21) и продолжим его в сторону сукна на длину $OB = \epsilon DO$, где DO представляет скорость $V \sin \alpha$; тогда AB будет той скоростью, которую шар получит после удара, если не учитывать влияния трения.

Если удар о борт произошел после горизонтального удара кием и свой шар предварительно ни обо что не ударялся, то точка H будет или на направлении скорости AD , или с противоположной стороны, если вращение будет прямым.

Чтобы получить движение после удара, достаточно будет изменить скорости AB и AH в связи с учетом трения о борт совершенно таким же образом, как это

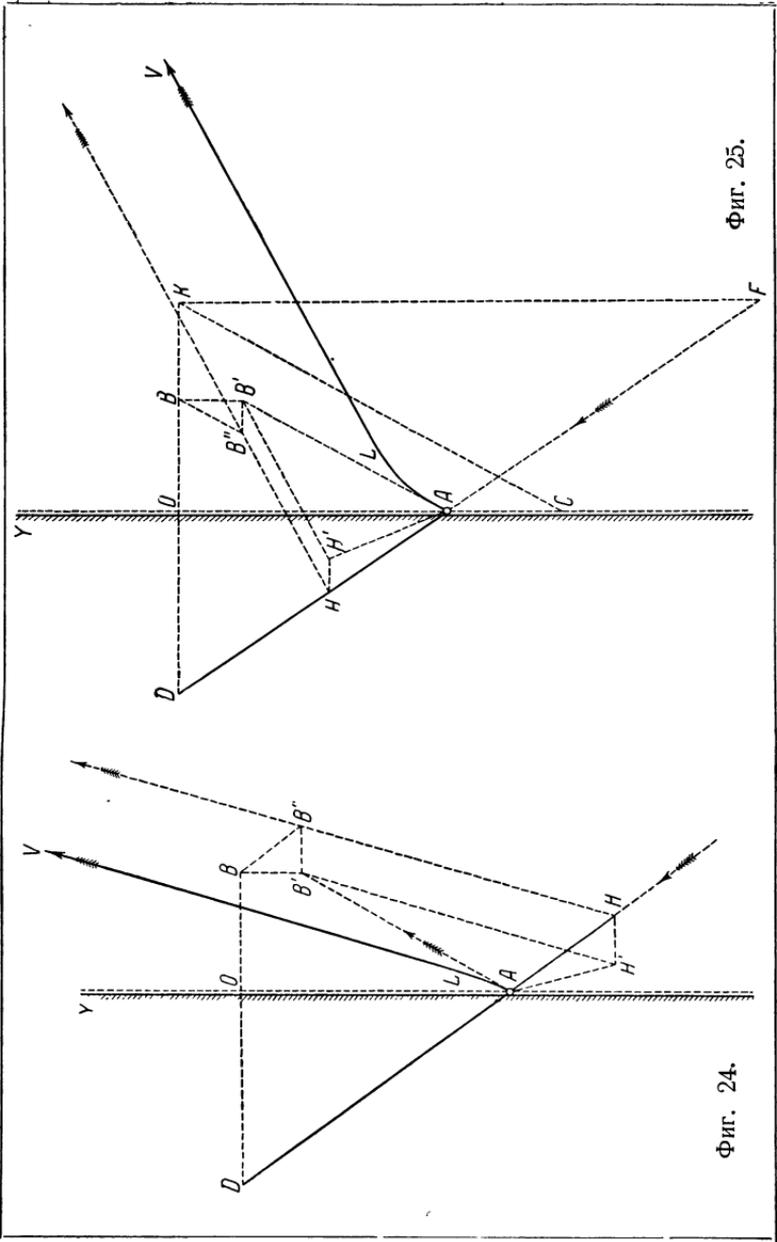
было сделано, когда мы учитывали трение при ударе двух шаров.

На AD берем длину $AF = \frac{5}{2}v = \frac{5}{2}AH$ со стороны, противоположной точке H ; через полученную точку F



Фиг. 21.

ведем линию FK параллельно борту, а через точку D — линию DK , перпендикулярную к борту. Если отложить длину Rr , или $\frac{5}{2}V_1 \frac{h}{R}$, от A к C , если h положительно, и в противоположном направлении, если h отрицательно, и соединить C с K , то прямая CK составит с бортом угол ϑ .



Фиг. 24.

Фиг. 25.

зают, если в мгновение удара скорость v , или AH , равняется нулю.

Фигура 57 (см. стр. 220) показывает, как происходит второй удар о борт после первого удара о шар. Она построена в предположении, что удар кием был дан слева и достаточно высоко для того, чтобы в мгновение удара о борт основные элементы движения были $AD=V$ и $AH=v$. Из построения финального пути и положения точки L — конца криволинейной части — видно, что свой шар рикошетирует в борт.

Учитывая результаты этой главы, можно определить опытным путем коэффициент трения f_1 при ударе о борт, если коэффициент ϵ уже известен.

Для этого нужно играть шаром перпендикулярно к борту, давая удар сбоку и на высоте центра и помещая шар достаточно близко к борту, чтобы он подошел к нему в состоянии скольжения. Если удар кием дается несколько дальше от борта, то достаточно будет ударить шар немного ниже центра, для того чтобы шар подошел к борту в состоянии скольжения. Если через ψ обозначить угол, который обратный ход образует с нормалью к борту, то легко видеть из формул или построений, что

$$\operatorname{tg} \psi = f_1 \frac{(1 + \epsilon)}{\epsilon}.$$

Этот тангенс можно будет получить из опыта, наблюдая точку, в которой шар коснется противоположного борта. Таким образом, зная ϵ , можно будет получить значение f_1 . Так как трудно быть уверенным в том, что шар подходит к борту в состоянии скольжения, то опыт нужно повторять большое число раз, определяя каждый раз тангенс угла ψ с нормалью. Так как ϵ меняется достаточно мало для различных скоростей, то мы ошибемся незначительно, если будем считать ϵ постоянным для различных ударов кием, которые нужно давать с возможно постоянной силой; таким образом, $\operatorname{tg} \psi$ будет изменяться лишь вследствие горизонтального вращения, то есть от значения v . Но так как максимальное значение $\operatorname{tg} \psi$ получает

при $\nu = 0$, как это показывают разобранные в этой главе построения, то, следовательно, наблюдая это максимальное значение среди большого числа ударов, мы сможем действительно получить

$$\operatorname{tg} \psi = f_1 \frac{(1 + \varepsilon)}{\varepsilon},$$

что даст f_1 , при помощи ε . Именно таким образом я и пришел к значению $f_1 = 0,20$.



ГЛАВА VII

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ, КОГДА НУЖНО ВИДОИЗМЕНИТЬ ФОРМУЛЫ И ПОСТРОЕНИЯ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ДЕЙСТВИЮ ТРЕНИЯ ВО ВРЕМЯ УДАРА

Если точка своего шара, которая ударяет или в другой шар, или в борт, имеет собственную скорость, направление которой с нормалью в точке удара образует угол, меньший некоторого предела, то явления движения изменят свой характер. Действие трения во время удара уже не будет состоять в сообщении шару некоторого количества движения в постоянном отношении f_1 к количеству движения, которое получилось по направлению нормали в точке соприкосновения обоих тел; оно будет заставлять точку движущегося шара, коснувшуюся другого тела, сцепляться с этим телом и отделяться от него не в результате скольжения, а только при вращении. В этом случае трение можно будет уподобить количеству движения, которое способно уничтожить касательную скорость в точке соприкосновения.

Обозначим это количество движения через Q ; пусть V_z представляет небольшую вертикальную скорость, которую центр шара получает вследствие удара; этой скоростью мы пренебрегали в предыдущих расчетах, поскольку она не оказывает существенного влияния на ход шара, но в данном случае ее необходимо учесть. Через V_y и V_x будем всегда обозначать другие составляющие скорости центра, а именно, по касательной и по нормали в точке удара; пусть V представляет геометрическую сумму скоростей V_x и V_y , α — угол, который V образует

с касательной. Обозначим через $p', q', r', V'_x, V'_y, V'_z$ основные элементы движения после удара, относя их постоянно к координатным осям, ось y которых направлена по касательной в точке удара; в таком случае, обозначая, как всегда, массу шара через M , мы будем иметь:

$$\begin{aligned}\frac{2}{5} R^2 p' &= \frac{2}{5} R^2 p, \\ \frac{2}{5} R^2 q' &= \frac{2}{5} R^2 q + R \frac{Q}{M} \sin \vartheta, \\ \frac{2}{5} R^2 r' &= \frac{2}{5} R^2 r - R \frac{Q}{M} \cos \vartheta, \\ V'_y &= V \cos \alpha - \frac{Q}{M} \cos \vartheta, \\ V'_z &= - \frac{Q}{M} \sin \vartheta.\end{aligned}$$

Для того чтобы составляющая скорости, касательная к шару в точке удара, обратилась в нуль, необходимо соблюдение равенств

$$\begin{aligned}V'_y + Rr' &= 0, \\ V'_z - Rq' &= 0,\end{aligned}$$

что дает нам

$$\frac{Q}{M} \cos \vartheta = \frac{2}{7} (V \cos \alpha + Rr)$$

и

$$\frac{Q}{M} \sin \vartheta = - \frac{2}{7} Rq,$$

где Rq относится к касательной в точке удара, взятой в качестве оси y . Теперь оба члена двух этих уравнений представляют скорости, которые как раз являются числителями тех выражений, которыми мы пользовались при построении $\cos \vartheta$ и $\sin \vartheta$; значит, их геометрическая сумма $\frac{Q}{M}$ будет изображаться $\frac{2}{7}$ расстояния CK на всех чертежах, которые относились к действию трения, будь то трение о борт или трение между шарами.

Но поскольку эта результирующая $\frac{Q}{M}$ достаточна для того, чтобы задержать точку удара и помешать ей сколь-

зять, то скольжения не будет всякий раз, когда при ударе о борт мы будем иметь

$$f_1(1 + \varepsilon) V \sin \alpha > \frac{Q}{M},$$

иными словами,

$$f_1(1 + \varepsilon) V \sin \alpha > \frac{2}{7} \sqrt{(V \cos \alpha + Rr)^2 + R^2 q^2}.$$

Если принять во внимание фигуры от 21 до 27, то вышеприведенное условие обращается в следующее:

$$BB'' > \frac{2}{7} CK.$$

Таким образом, начиная с мгновения, когда это неравенство удовлетворяется, расстояние BB'' надо брать равным не

$$f_1(1 + \varepsilon) V \sin \alpha,$$

а просто

$$BB'' = \frac{2}{7} CK.$$

Это применимо как к удару шаров, так и к удару о борт; на фиг. 19 и 20 всякий раз как

$$\frac{2}{7} CK < BG \quad \text{или} \quad BB'',$$

длину $BG = BB''$ надо брать равной $\frac{2}{7} CK$.





ГЛАВА VIII

О ДЕЙСТВИИ УДАРА НАКЛОННЫМ КИЕМ

Если кию дать некоторый наклон по отношению к сукну, то происходит двойной удар: один между кием и шаром, другой между шаром и сукном. Если мы хотим определить движение шара, то нужно иметь в виду оба этих одновременных удара.

Мы сошлемся здесь на то, что в начале второй главы мы сказали о направлении количества движения, происходящего при ударе; в соответствии со сказанным мы берем его по направлению удара, иными словами, совпадающим с продольной осью кия.

Мы назовем *линией удара* прямую, проведенную через ту точку, в которой кий ударяет шар, по направлению оси кия, а *вертикальной плоскостью удара* — вертикальную плоскость, проведенную через линию удара.

Введем следующие обозначения.

Q — количество движения, возникшее от удара кием по направлению линии удара. Если через V_1 обозначить скорость, которую получил бы центр шара под действием того же самого удара кием, данного в той же самой точке, при условии, что удар о сукно не изменяет этой скорости, то $Q = MV_1$.

μ — угол, который направление удара образует с плоскостью сукна.

h — горизонтальное расстояние между центром шара и вертикальной плоскостью удара (расстояние считается положительным, если эта плоскость проходит вправо от центра, и отрицательным, если она проходит влево).

k — расстояние между линией удара и горизонталью, проведенной через центр перпендикулярно вертикальной плоскости удара; k считается положительным, когда линия удара проходит выше этой горизонтали, и отрицательным, когда она проходит ниже нее.

F — количество движения, получившееся в результате трения между шаром и сукном во время удара¹⁾.

V_{1x} , V_{1y} , p_1 , q_1 , r_1 — обычные элементы поступательного и вращательного движения шара после удара.

Скорость точки опоры имеет составляющие по осям, равные

$$V_{1x} + Rq_1 \quad \text{и} \quad V_{1y} - Rp_1.$$

Обозначим эту скорость через θ_1 , тогда

$$\theta_1 = \sqrt{(V_{1x} + Rq_1)^2 + (V_{1y} - Rp_1)^2}.$$

Моменты количества движения Q относительно трех координатных осей будут:

$$\begin{aligned} \text{относительно оси } x & \quad + Qk, \\ \text{относительно оси } y & \quad - Qh \sin \mu, \\ \text{относительно оси } z & \quad - Qh \cos \mu, \end{aligned}$$

причем положительными всегда считаются моменты сил или количеств движения, соответствующие вращению слева направо вокруг координатных осей со стороны их положительных направлений²⁾.

Моменты мгновенной силы трения в точке опоры будут:

$$\begin{aligned} \text{относительно оси } x & \quad + FR \frac{V_{1x} - Rp_1}{\theta_1}, \\ \text{относительно оси } y & \quad - FR \frac{V_{1y} + Rq_1}{\theta_1}, \\ \text{относительно оси } z & \quad 0. \end{aligned}$$

¹⁾ Иными словами, F является импульсом силы трения между шаром и сукном за время удара. (Прим. перев.)

²⁾ Таким образом, положительным считается направление вращения по часовой стрелке. (Прим. перев.)

Пользуясь принципом эквивалентности ¹⁾ между количествами движения, получившимися в результате действия движущих сил, и произведенными ими скоростями, мы будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} MV_{1x} &= -\frac{V_{1x} + Rq_1}{\theta_1} F, \\ MV_{1y} &= Q \cos \mu - \frac{V_{1y} - Rp_1}{\theta_1} F, \\ \frac{2}{5} MR^2 p_1 &= Qk + FR \frac{V_{1y} - Rp_1}{\theta_1}, \\ \frac{2}{5} MR^2 q_1 &= -Qh \sin \mu - FR \frac{V_{1x} + Rq_1}{\theta_1}, \\ \frac{2}{5} MR^2 r_1 &= Qh \cos \mu. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Здесь мы не пишем уравнения, относящегося к вертикальной скорости, которую мог бы получить шар вследствие упругости сукна. Эта упругость достаточно мала и можно пренебрегать получающейся от нее скоростью при обычных ударах кием, когда угол удара не слишком велик и сам удар не очень силен. Но, кроме того, при подсакивании шара скорости V_{1x} , V_{1y} , p_1 , q_1 , r_1 одинаково относятся как к мгновению, когда шар снова падает на плоскость, так и к тому мгновению, когда он покидает ее, поскольку за соответствующий промежуток времени эти количества не изменились бы. Упругость может только увеличить трение при ударе, потому что она связана с количеством движения, потерянным в результате вертикального удара. Но так как (мы увидим это далее) величина трения не влияет на основные результаты, которые мы дадим, то же самое можно сказать и об упругости бильярдной плоскости, которая возвратила бы шару некоторое количество движения по вертикали. Таким образом, действие этой упругости, если она заставит шар подскочить, будет заключаться в том, что она не-

¹⁾ Мы бы сказали «пропорциональности». (Прим. перев.)

сколько изменит координаты точки начала движения шара, которая должна будет теперь совпадать с той точкой, где шар снова падает на сукно; кроме того, она изменит то, что специально определяется величиной трения во время удара. Опыт показывает, что подскакивания не бывает при ударах кием обычной силы, когда кий не держат слишком наклонно; поэтому мы сначала отвлечемся от этого, чтобы разобрать действие обыкновенных ударов кием.

Хотя уравнения (22) вследствие наличия радикала θ_1 кажутся уравнениями второй степени, однако величины V_{1x} , V_{1y} , p_1 , q_1 получаются очень просто: вычисление показывает, что они находятся при помощи подстановки в дроби

$$\frac{V_{1x} + Rq_1}{\theta_1} \quad \text{и} \quad \frac{V_{1y} - Rp_1}{\theta_1}$$

вместо V_{1x} , V_{1y} , p_1 и q_1 их значений, которые получились бы при отсутствии трения между шаром и сукном, иными словами, при помощи подстановки

$$\begin{aligned} V_{1x} &= 0, & V_{1y} &= \frac{Q}{M} \cos \mu, \\ Rp_1 &= \frac{5}{2} \frac{Qk}{MR}, & Rq_1 &= -\frac{5}{2} \frac{Q}{M} \frac{h \sin \mu}{R}, \\ Rr_1 &= -\frac{5}{2} \frac{Q}{M} \frac{h \cos \mu}{R}. \end{aligned}$$

Этот результат получается, если пять вышеприведенных неизвестных выразить через θ_1 и подставить в уравнение

$$\theta_1^2 = (V_{1x} + Rq_1)^2 + (V_{1y} - Rp_1)^2,$$

которое дает значение θ_1 .

Если положить для сокращения

$$\rho = \sqrt{h^2 + \frac{\left(\frac{2}{5} R \cos \mu - k\right)^2}{\sin \mu}},$$

то получатся следующие значения этих неизвестных:

$$\left. \begin{aligned} V_{1x} &= \frac{F h}{M \rho}, \\ V_{1y} &= \frac{Q}{M} \cos \mu - \frac{F}{M} \frac{\frac{2}{5} R \cos \mu - k}{\rho \sin \mu}, \\ R p_1 &= \frac{5}{2} \frac{Q k}{M R} + \frac{5}{2} \frac{F}{M} \frac{\frac{2}{5} R \cos \mu - k}{\rho \sin \mu}, \\ R q_1 &= -\frac{5}{2} \frac{Q h \sin \mu}{M R} - \frac{5}{2} \frac{F h}{M \rho}, \\ R r_1 &= -\frac{5}{2} \frac{Q h \cos \mu}{M R}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

В сущности, нет необходимости в решении указанных уравнений, так как полученные величины можно было бы предугадать. Достаточно было бы заметить, что трение развивается только в результате уже начавшегося движения; оно первоначально должно получить направление, зависящее от значений, которые принимают отношения $\frac{V_x + Rq}{\theta_1}$ и $\frac{V_y - Rp}{\theta_1}$, если дать V_x , V_y , p , q значения, которые они получили бы без влияния трения; и так как легко установить, что оно не меняет направления в течение удара, то отсюда следует, что общее произведенное количество движения, разложенное по осям на плоскости сукна, дает значения

$$F \frac{V_x + Rq}{\theta_1} \quad \text{и} \quad F \frac{V_y - Rp}{\theta_1}$$

или

$$-F \frac{h \sin \mu}{\rho \sin \mu} \quad \text{и} \quad F \frac{\frac{2}{5} R \cos \mu - k}{\rho \sin \mu}.$$

То обстоятельство, что трение действительно не может изменить своего направления в течение удара, можно будет доказать следующим образом.

Обозначим через Π силу, произведенную кием, а через Φ силу трения о сукно; тогда согласно общим принципам динамики мы будем иметь:

$$\begin{aligned} M \frac{dV_x}{dt} &= -\Phi \frac{V_x + Rq}{\theta}, \\ M \frac{dV_y}{dt} &= -\Phi \frac{V_y - Rp}{\theta} + \Pi \cos \mu, \\ \frac{2}{5} MR^2 \frac{dp}{dt} &= \Pi k + R\Phi \frac{V_y - Rp}{\theta}, \\ \frac{2}{5} MR^2 \frac{dq}{dt} &= -\Pi h \sin \mu - R\Phi \frac{V_x + Rq}{\theta}, \\ \frac{2}{5} MR^2 \frac{dr}{dt} &= -\Pi h \cos \mu. \end{aligned}$$

Так как величины k , h и μ не меняются заметно в течение удара, то можно производить интегрирование, считая их постоянными. Таким образом, если взять интегралы, имея нижним пределом начало удара, иными словами, начиная с мгновения, когда все скорости равны нулю, и до конца удара, когда мы имеем $V_x = V_{1x}$, $V_y = V_{1y}$, $p = p_1$, $q = q_1$, $r = r_1$, то мы получим:

$$\begin{aligned} MV_{1x} &= - \int \Phi \frac{V_x + Rq}{\theta} dt, \\ MV_{1y} &= - \int \Phi \frac{V_y - Rp}{\theta} dt + \cos \mu \int \Pi dt, \\ \frac{2}{5} MR^2 p_1 &= k \int \Pi dt + R \int \Phi \frac{V_y - Rp}{\theta} dt, \\ \frac{2}{5} MR^2 q_1 &= -h \sin \mu \int \Pi dt - R \int \Phi \frac{V_x + Rq}{\theta} dt, \\ \frac{2}{5} MR^2 r_1 &= -h \cos \mu \int \Pi dt. \end{aligned}$$

Для того чтобы эти уравнения могли бы нас привести к какому-нибудь результату, то есть чтобы они дали нам те уравнения, которые обыкновенно употребляются в качестве применения принципа Даламбера, или, иными словами, чтобы показать, что этот принцип имеет место, если принять за направление силы трения направление

скорости скольжения в точке опоры в конце удара, необходимо показать, что интегралы

$$\int \Phi \frac{V_x + Rq}{\theta} dt,$$

$$\int \Phi \frac{V_y - Rp}{\theta} dt$$

могут быть заменены выражениями

$$\frac{V_{1x} + Rq_1}{\theta} \int \Phi dt,$$

$$\frac{V_{1y} - Rp_1}{\theta} \int \Phi dt,$$

иными словами, что отношения $\frac{V_x + Rq}{\theta}$ и $\frac{V_y - Rp}{\theta}$ остаются постоянными во все время удара; если бы это не имело места, то никоим образом нельзя было бы узнать отношения этих интегралов и, следовательно, принцип Даламбера не мог бы ничего дать нам для решения вопроса.

Действительно, по форме написанных дифференциальных уравнений можно видеть, что они допускают следующее соотношение в качестве интеграла:

$$V_x + Rq = A (V_y - Rp),$$

где A представляет некоторую постоянную, которую надо определить.

В самом деле, это уравнение удовлетворяет начальным условиям: $V_x = 0$, $V_y = 0$, $p = 0$, $q = 0$; далее, дифференцируя его, мы получаем:

$$dV_x + R dq = A (dV_y - R dp).$$

Подставляя сюда значения dV_x , dV_y , Rdp , Rdq , полученные из вышеприведенных уравнений, мы будем иметь:

$$-\frac{7}{2} \frac{\Phi (V_x + Rq)}{\theta} - \frac{5}{2} \frac{\Pi h \sin \mu}{MR} =$$

$$= A \left(-\frac{7}{2} \frac{\Phi (V_y - Rp)}{\theta} + \frac{\Pi}{M} \cos \mu - \frac{5}{2} \frac{\Pi k}{MR} \right).$$

Теперь, если мы положим

$$A = \frac{-h \sin \mu}{\frac{5}{2} R \cos \mu - k},$$

то это уравнение примет вид

$$V_x + Rq = A(V_y - Rp).$$

Это как раз наше исходное соотношение; таким образом, оно представляет собой интеграл дифференциальных уравнений задачи. Этот интеграл имеет большое значение для динамического решения вопроса; действительно, можно было бы легко показать, что не существует двух аналитических решений с начальными условиями $V_1 = 0$, $V_y = 0$, $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, потому что при этих начальных условиях не существует особого решения.

Установив, что отношение $\frac{V_x + Rq}{V_y - Rp}$ является постоянным во время удара, мы можем сказать то же самое и об отношениях

$$\frac{V_x + Rq}{\theta} \text{ и } \frac{V_y - Rp}{\theta},$$

потому что

$$\theta = \sqrt{(V_x + Rq)^2 + (V_y - Rp)^2}.$$

Таким образом, в эти отношения можно подставить как начальные, так и конечные скорости, имевшие место при ударе, и вынести их за знак интеграла; таким путем получаем:

$$MV_{1x} = -\frac{V_{1x} + Rq_1}{\theta_1} \int \Phi dt,$$

$$MV_{1y} = \cos \mu \int \Pi dt - \frac{V_{1y} - Rp_1}{\theta_1} \int \Phi dt,$$

$$\frac{2}{5} MR^2 p_1 = k \int \Pi dt + R \frac{V_{1y} - Rp_1}{\theta_1} \int \Phi dt,$$

$$\frac{2}{5} MR^2 q_1 = -h \sin \mu \int \Pi dt - R \frac{V_{1x} + Rq_1}{\theta_1} \int \Phi dt,$$

$$\frac{2}{5} MR^2 r_1 = h \cos \mu \int \Pi dt.$$

Следовательно, мы видим, что обычные уравнения, даваемые принципом Даламбера, оправдываются. Выражения $\int \Phi dt$, $\int \Pi dt$ представляют то, что называется коли-

чествами движения¹⁾, возникшими от удара кием и от трения. Во время удара отношения $\frac{V_x + Rq}{\theta}$ и $\frac{V_y - Rp}{\theta}$ остаются постоянными и определяются из равенств

$$\frac{V_x + Rq}{V_y - Rp} = \frac{-h \sin \mu}{\frac{2}{5} R \cos \mu - k}.$$

Следовательно, вместо того чтобы заменить через V_{1x} , V_{1y} , p_1 , q_1 величины V_x , V_y , p , q в отношениях $\frac{V_x + Rq}{\theta}$, $\frac{V_y - Rp}{\theta}$, мы можем подставить известные и постоянные величины этих отношений, полученные из написанного выше уравнения, а это как раз и дает нам уравнения (23), полученные после решения уравнений (22).

Мы немного упростим уравнения (23), если положим $\int \Pi dt$, или Q , равным MV_1 , иными словами, если назовем V_1 скорость, которую получил бы центр шара от того же самого удара кием, если бы сукно не изменило этой скорости. Обозначим через f_1 коэффициент, на который нужно умножить нормальное к поверхности сукна количество движения, чтобы получить то, которое возникло от трения; это сводится к тому, что мы положим $\int \Phi dt$, или F равным $f_1 MV \sin \mu$.

Таким образом, выражения (23) примут вид

$$\left. \begin{aligned} V_x &= f_1 V_1 \sin \mu \frac{h}{\rho}, \\ V_y &= V_1 \cos \mu - f_1 V_1 \frac{\frac{2}{5} R \cos \mu - k}{\rho}, \\ \frac{2}{5} R p_1 &= V_1 \frac{k}{R} + f_1 V_1 \frac{\frac{2}{5} R \cos \mu - k}{\rho}, \\ \frac{2}{5} R q_1 &= V_1 \sin \mu \frac{h}{R} - f_1 V_1 \sin \mu \frac{h}{\rho}, \\ \frac{2}{5} R r_1 &= -V_1 \cos \mu \frac{h}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

¹⁾ Мы бы сказали «импульсом силы». (Прим. пер. ед.)

Если бы удар был произведен очень наклонным кием и сукно обладало упругостью, достаточной для того, чтобы шар немного подскочил после удара, то следовало бы рассмотреть и вертикальную скорость, получившуюся после удара; если мы обозначим ее через V_z и положим, что ε представляет ту долю вертикальной составляющей скорости, которая восстановилась после удара, то будем иметь:

$$V_z = \varepsilon V_1 \sin \rho.$$

Коэффициент f_1 в этом случае должен быть изменен в $f_1(1 + \varepsilon)$.

Кроме того, нужно заметить, что значения основных элементов V_x , V_y , p , q , r , имевшие место непосредственно после удара в то мгновение, когда шар, подпрыгивая, покидает сукно, не испытают никакого изменения во время пребывания шара в воздухе и что в той точке, куда упадет шар, он будет обладать теми же самыми основными элементами движения. Поэтому достаточно будет взять их же в той точке, куда упадет шар, и учесть новый удар, происшедший при этом падении, для того, чтобы определить также и путь шара, начиная от этой точки. В построениях, которые будут указаны дальше для получения пути шара при помощи этих элементов, новым будет лишь то, что их придется производить, исходя из той точки сукна, куда упадет шар. Эта точка будет находиться на направлении геометрической суммы величин V_{1x} и V_{1y} ; способ построения этого направления мы дадим далее.

Если мы хотим только получить конечные скорости, которые мы обозначили в первой главе через V_{2x} , V_{2y} , p_2 , q_2 , r_2 , и рассмотреть направление движения шара в его конечном пути, то нет надобности иметь значения величин, зависящих от трения. Действительно, мы нашли:

$$V_{2x} = \frac{2}{7} \left(\frac{5}{2} V_{1x} - Rq_1 \right),$$

$$V_{2y} = \frac{2}{7} \left(\frac{5}{2} V_{1y} + Rp_1 \right).$$

Подставляя сюда значения величин V_{1x} и V_{1y} , полученные из первых двух уравнений (22), мы видим, что все члены, зависящие от трения, исчезают и что, таким образом, получается:

$$V_{2x} = \frac{5}{7} \frac{Q}{M} \frac{h \sin \mu}{R},$$

$$V_{2y} = \frac{5}{7} \frac{Q}{M} \frac{R \cos \mu + k}{R}.$$

Эти значения будут также иметь место и в том случае, когда шар подскочит вследствие упругости сукна, потому что это несколько не изменит формы выражений для начальных скоростей V_{1x} , V_{1y} , Rp_1 , Rq_1 , Rr_1 ; отсюда получится только некоторое увеличение трения; но члены, зависящие от трения, исчезают из выражений для V_{2x} и V_{2y} , а потому эти выражения остаются без изменений.

Величина $R \cos \mu + k$ есть не что иное, как длина перпендикуляра, опущенного из точки опоры шара на плоскость, проходящую через линию удара и через перпендикулярную к этой линии горизонталь; можно также сказать, что она представляет собой расстояние между линией удара и горизонталью, проведенной через опорную точку перпендикулярно к направлению удара. Если, как мы уже делали, обозначим через l высоту точки, в которой линия удара пересекает вертикальную плоскость xz , то есть плоскость, проведенную через центр шара перпендикулярно к вертикальной плоскости удара, то, мы, очевидно, будем иметь:

$$R \cos \mu + k = l \cos \mu.$$

Вышеприведенные выражения можно будет тогда переписать в виде

$$V_{2x} = \frac{5}{7} \frac{h \sin \mu}{R} V_1,$$

$$V_{2y} = \frac{5}{7} \frac{l \cos \mu}{R} V_1.$$

Из этих выражений вытекает несколько замечательных следствий, касающихся действия удара кием.

Для того чтобы шар шел по прямой и не отклонялся, необходимо, чтобы было $V_{2y} = 0$, что требует равенств $\mu = 0$, или $h = 0$. Таким образом, шар пойдет по прямой линии в направлении кия в том случае, если это направление будет горизонтальным, или же в случае, если оно не будет горизонтальным, то только тогда, когда вертикальная плоскость удара будет проходить через центр шара.

Шар будет двигаться криволинейно всякий раз, когда кий не будет горизонтальным и вертикальная плоскость удара не будет проходить через центр шара.

Знак V_{2x} покажет, в какую сторону пойдет в своем конечном состоянии шар по отношению к вертикальной плоскости, проведенной через его центр в направлении удара кием. Поскольку знак V_{2x} одинаков со знаком h , то следует, что всякий раз, когда кий держат наклонно и вертикальная плоскость удара не проходит через центр шара, последний будет описывать кривую линию, уводящую его от направления удара в ту сторону, где расположена точка удара, или, короче говоря, шар отклонится от направления удара в ту сторону, с которой был нанесен удар.

Тангенс угла ψ финального отклонения шара равен отношению финальных скоростей $\frac{V_{2x}}{V_{2y}}$; таким образом,

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{h \operatorname{tg} \mu}{l}.$$

Можно видеть, что представляет это выражение, если рассмотреть точку R (фиг. 28), в которой линия удара пересекает плоскость сукна. Верхняя часть этого чертежа представляет проекцию на вертикальную плоскость удара, а нижняя — проекцию на плоскость сукна. Окружности представляют шар в пропорциях, увеличенных по отношению к длине DB , которая представляет скорость V_1 .

Расстояние hR от точки R до той, в которой вертикальная плоскость удара PR пересекает перпендикуляр

Ah к ее направлению, проведенный на бильярдном сукне через точку опоры A ¹⁾, имеет величину

$$hR = \frac{l}{\operatorname{tg} \mu}.$$

Расстояние Ah на фиг. 28 равно h ; таким образом,

$$\frac{hR}{Ah} = \frac{h \operatorname{tg} \mu}{l} = \operatorname{tg} \psi.$$

Следовательно, угол ψ финального отклонения как раз представляет угол, который AR образует с направлением AB . Таким образом, линия AR параллельна финальному пути шара.

Мы приходим к очень простому следствию, что *финальное направление движения шара параллельно линии, идущей от его точки опоры к той точке, в которой линия удара пересекает плоскость бильярдного сукна.*

На основании этой теоремы шар в конечном счете должен будет пойти назад, то есть возвратиться, двигаясь в направлении, противоположном направлению начальной скорости, если линия удара пересечет плоскость бильярда по эту сторону опорной точки. В этом последнем случае, как мы покажем дальше, при обычных условиях игры такое движение невозможно, потому что оно требует, чтобы после удара кий уже не касался шара, а это обстоятельство не будет иметь места, если удар произведен очень наклонно и не нанесен слишком низко, в непосредственной близости от горизонтального экватора или если игрок не проявляет очень большой ловкости для того, чтобы убрать кий назад сейчас же после удара ²⁾. На этом мы остановимся более детально немного дальше.

¹⁾ Не следует смешивать точку h на данном чертеже с расстоянием между центром шара и плоскостью удара, которое в начале этой главы было также обозначено h . Совершенно очевидно, что перпендикуляр Ah равен этому расстоянию h . (Прим. перев.)

²⁾ Кориолис совершенно правильно теоретически доказал возможность такого движения своего шара, осуществленного впо-

В данном случае, само собой разумеется, найденные нами результаты будут зависеть от коэффициентов трения f_1 и f во время и после удара.

Нужно заметить, что при наличии упругости количество движения по вертикали, или интеграл от сил давления на бильярдную плоскость, будет более $MV_1 \sin \mu$; в случае абсолютно упругого удара оно равнялось бы $2MV_1 \sin \mu$ ¹⁾. В этом случае для количества движения, получившегося в результате трения, мы имели бы $2f_1MV_1 \sin \mu$, но в действительности по причине небольшой упругости бильярдной плоскости следует взять только $f_1MV_1 \sin \mu$, где f_1 мало отличается от 0,20 — значения, которое было найдено нами для удара о борт.

Вернемся к выражениям (23), которые были найдены выше для V_{1x} , V_{1y} , Rp_1 , Rq_1 , Rr_1 , отбрасывая теперь как не нужные некоторые индексы этих величин; будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= f_1 V_1 \sin \mu \cdot \frac{h}{\rho}, \\ V_y &= V_1 \cos \mu + f_1 V_1 \sin \mu \frac{\frac{2}{5} R \cos \mu - k}{\rho \sin \mu}, \\ \frac{2}{5} Rp &= V_1 \frac{k}{R} + f_1 V_1 \sin \mu \frac{\frac{2}{5} R \cos \mu - k}{\rho \sin \mu}, \\ \frac{2}{5} Rq &= -V_1 \frac{h \sin \mu}{R} + f_1 V_1 \sin \mu \frac{h}{\rho}, \\ \frac{2}{5} Rr &= -V_1 \frac{h \cos \mu}{R}. \end{aligned} \right\} (25)$$

Расстояние ρ дается формулой

$$\rho = \sqrt{h^2 + \left(\frac{k - \frac{2}{5} R \cos \mu}{\sin \mu} \right)^2}.$$

¹⁾ Само собой разумеется, что под упругостью сукна подразумевается только свойство восстанавливать после удара вертикальную скорость, причем это свойство не рассматривается как исключительно зависящее от упругости покрытия бильярда. (Прим. автора.)

На фиг. 28 N есть верхний центр удара шара, то есть точка, находящаяся над центром O на высоте $\frac{2}{5} R$. Легко видеть, что если провести через N горизонтальную плоскость до пересечения в P' с линией удара, то расстояние $P'N$ (в вертикальной проекции), которое в этой плоскости идет от центра удара N до указанной точки P' и которое равно своей проекции AP на сукно, будет как раз величиной ρ ; таким образом,

$$\rho = AP.$$

Далее, если через γ обозначить угол, который направление этой линии ρ , или AP , образует с направлением AB вертикальной плоскости удара, считая его от A к B , то мы будем иметь:

$$\cos \gamma = \frac{k - \frac{2}{5} R \cos \mu}{\rho \sin \mu},$$

$$\sin \gamma = \frac{h}{\rho}.$$

Вводя ρ и угол γ и полагая для сокращения

$$\delta = f_1 V_1 \sin \mu,$$

получим:

$$V_x = \delta \sin \gamma,$$

$$V_y = V_1 \cos \mu + \delta \cos \gamma,$$

$$\frac{2}{5} R p = V_1 \frac{h}{R} - \delta \cos \gamma,$$

$$\frac{2}{5} R q = - V_1 \frac{h \sin \mu}{R} + \delta \sin \gamma,$$

$$\frac{2}{5} R r = - V_1 \frac{h}{R} \cos \mu.$$

Для того чтобы знать криволинейную часть траектории шара, надо сперва найти начальную скорость AB' , направление которой дает первую касательную к этой кривой, то есть надо найти геометрическую сумму V_x и V_y . Для этого по направлению от B к B' по прямой BB' ,

образующей с AB угол γ , иными словами, по направлению AP , откладываем длину $BB' = \delta = f_1 V_1 \sin \mu$. Эта длина $f_1 V_1 \sin \mu$ получится, если спроектировать на вертикаль длину $f_1 V_1 = f_1 DB = BS$, что дает нам $f_1 V_1 \sin \mu = BG$; эту проекцию BG мы перенесем в положение BB' , соединив A и B' , получим начальную скорость AB' после удара кием.

Если мы уже знаем на основании всего изложенного выше направление AR финальной скорости, то для построения криволинейной части траектории шара будет достаточно найти величину AE этой финальной скорости и затем обратиться к построению фиг. 1, где можно получить все выводы из скоростей AB и AE .

Направление EB' есть направление скорости в точке опоры (на фиг. 1 это — направление FB); оно дается отношением составляющих этой скорости. Эти составляющие суть

$$V_x + Rq, \quad V_y - Rp.$$

Придадим найденным выражениям такой вид:

$$\frac{7}{2} \delta \sin \gamma - \frac{5}{2} V_1 \frac{h \sin \mu}{R}$$

и

$$\frac{7}{2} \delta \cos \gamma + \frac{5}{2} V_1 \frac{\frac{2}{5} R \cos \mu - k}{R}.$$

При помощи же значений $\sin \gamma$ и $\cos \gamma$, а именно

$$\begin{aligned} \rho \sin \gamma &= h, \\ \rho \cos \gamma &= \frac{k - \frac{2}{5} R \cos \mu}{\sin \mu}, \end{aligned}$$

выражения для этих составляющих преобразуем так:

$$\left. \begin{aligned} \sin \gamma \left(\frac{7}{2} \delta - \frac{5}{2} V_1 \sin \mu \frac{\rho}{R} \right), \\ \cos \gamma \left(\frac{7}{2} \delta - \frac{5}{2} V_1 \sin \mu \frac{\rho}{R} \right). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Наличие общего множителя показывает, что направление скорости EB' в точке опоры после удара тоже определяется углом γ ; таким образом, это направление будет PA , или $B'B$. Следовательно, остается только через точку B параллельно AP провести BE и точка пересечения E с продолжением AR даст отрезок AE для финальной скорости. После этого построение заканчивается, как на фиг. 1, то есть посередине $B'E$ берется точка M и проводится прямая AM , на которой будет находиться крайняя точка L кривой. Для получения этой точки берут расстояние AL так, чтобы оно относилось к AM как $B'E$ к fg , или как $B'M$ к $\frac{1}{2} fg$.

Это построение показывает, что трение о сукно во время удара переводит элемент AB в AB' , совершенно так же как это случилось бы для некоторой части кривой, описанной шаром, если бы он начал движение после удара кием, не испытывая влияния трения во время удара, и стал бы двигаться по сукну, испытывая влияние трения во время движения по кривой. Таким образом, влияние трения во время удара только уничтожает первую часть кривой, оставляя последнюю ее часть и финальный путь в таком виде, как будто бы этого влияния не существовало.

Заметим, что в случае подпрыгивания шара достаточно будет сделать все те же построения, начиная от новой точки A , в которую шар снова падает на сукно. Эта точка будет удалена от первой точки опоры A , соответствующей мгновению удара кием, на расстояние λ , определяемое формулой

$$\lambda = \frac{\epsilon V_1 \sin \mu \sqrt{V_x^2 + V_y^2}}{g},$$

или

$$\lambda = \frac{\epsilon V_1}{g} \sin \mu \sqrt{(V_1 \cos \alpha - \delta \cos \gamma)^2 + \dot{c}^2 \sin^2 \gamma}.$$

При этих новых построениях коэффициент f_1 нужно заменить через $f_1(1 + 2\epsilon)$. Действительно, первый удар кием произведет в рассматриваемом случае вертикальное

количество движения $(1 + \epsilon) V_1 \sin \mu$, а удар о сукно в мгновение обратного падения шара дает другое вертикальное количество движения $\epsilon V_1 \sin \mu$.

Установленное выше предложение, что финальный путь шара после наклонного удара кием не зависит от величины трения, или, иными словами, от величины вертикального количества движения $V_1 \sin \mu$, с которым шар ударяется о сукно, может быть без затруднений распространено и на случай удара о борт. Таким образом, мы убеждаемся в том, что в случае удара шара о борт мы не сделали никакой ошибки в определении направления финального пути шара, отвлекшись от вертикального количества движения, обусловленного трением во время удара. Что касается криволинейной части траектории шара, то на нее это вертикальное количество движения оказывает небольшое влияние.

Таким образом, в случае, когда вращение прямое, скорость u положительна и $\sin \vartheta$ отрицателен, произойдет небольшое подсакивание шара. Тогда начало A кривой надо немного сместить в направлении от A к B' на расстояние λ , определяемое формулой

$$\lambda = \frac{\epsilon V^2 \sin \vartheta \sin \alpha \sqrt{\epsilon^2 \sin^2 \alpha + (\cos \alpha - f_1 \sin \alpha \cos \vartheta)^2}}{g},$$

где углы α и ϑ сохраняют то значение, которое было им придано в шестой главе. В то же самое время нужно элементам AB' и AH' сообщить небольшое изменение, приближающее их к конечным значениям, для того чтобы учесть удар шара о сукно в мгновение обратного падения при помощи построения фиг. 28. Только в данном случае скорость, потерянная от трения, которая изображается отрезком BB' , должна быть взята равной

$$f_1 V \sin \vartheta \sin \alpha;$$

построить эту величину на чертеже очень легко.

В случае обратного вращения и когда u будет отрицательным, а $\sin \vartheta$ положительным, нужно, не меняя начальной точки A , немного изменить AB' и AH' , чтобы приблизить их к конечным значениям, пользуясь опять по-

строением фиг. 28 для того, чтобы учесть небольшой вертикальный удар, происходящий от трения шара о борт. Это можно сделать, заменив на фиг. 28 расстояние BB' через

$$f_1 V \sin \vartheta \sin \alpha.$$

В практике игры этими изменениями можно совершенно пренебрегать, в особенности для обычных скоростей, которые имеют шары в мгновение удара о борт.

Однако есть один удар, при котором нельзя пренебрегать этим вертикальным количеством движения, — это когда шар идет в среднюю лузу. Тогда можно видеть, что в случае прямого вращения шар, немного приподнимаясь от действия удара, не упадет в лузу, если скорость в мгновение удара была несколько велика. Наоборот, если вращение является обратным, то шар, не опираясь на сукно в то мгновение, когда он отражается от борта, будет стремиться упасть еще быстрее; он может попасть в лузу, обладая скоростью, которая в предыдущем случае заставила бы его перескочить через лузу. Таким образом, при равных скоростях свой шар всегда больше рискует попасть в среднюю лузу, если он подходит к ней, имея обратное вращение¹⁾.

Имеется один частный случай, когда при изучении удара наклонным кием нужно видоизменить построения, совершенно так же как согласно уже сказанному нами выше нужно было это делать при ударе шара о борт.

Этот случай представляется тогда, когда трение сукна о шар во время удара достаточно для того, чтобы задержать точку опоры шара и заставить шар сцепиться с сукном без скольжения во время удара.

Количество движения, необходимое для устранения скольжения опорной точки, может быть легко найдено из условий

$$\begin{aligned} V_{1x} + Rq_1 &= 0, \\ V_{1y} - Rp_1 &= 0; \end{aligned}$$

¹⁾ Из этого замечания видно, что Кориолис исследовал движение шаров не только на французском карамбольном бильярде, но и на шестилузном русском бильярде. (*Прим. перев.*)

они выражают, что абсолютная скорость $B'E$ в точке опоры равна нулю, иными словами, $BB' = BE$. Эти уравнения, если привести их левые части к виду (26), могут оба быть сведены к такому уравнению

$$\delta - \frac{7}{5} V_1 \sin \mu \frac{R}{\rho} = 0$$

или на основании значения величины δ

$$f_1 = \frac{5}{7} \frac{\rho}{R}.$$

Таким образом, видно, что если ρ , или AP (фиг. 28), сделалось настолько малым, что имеет место равенство

$$f_1 = \frac{7}{5} \frac{\rho}{R}$$

или неравенство

$$\rho < \frac{7}{5} f_1 R,$$

то трение изменит свое значение и будет действовать, только препятствуя скольжению. Величина его не будет выше той, которая получается из уравнения

$$\rho = \frac{7}{5} f_1 R.$$

Таким образом, в этом случае нужно всегда брать $BB' = BE$ и шар сейчас же после удара кием будет в финальном состоянии.

Для того чтобы шар после удара кием обладал скоростями, найденными при помощи предыдущих построений, будет ли это в общем случае или в только что упомянутом частном случае, необходимо, чтобы после удара кий отделялся от шара и не изменял, продолжая касаться шара, скоростей, найденных в предположении, что шар получил только количество движения MV по направлению удара кием.

Для того чтобы определить а priori скорость V_1 и узнать, будет ли отделение иметь место в действительности, мы заметим, что бильярдное сукно вследствие своей толщины обладает некоторой сжимаемостью, и шар, должен опуститься на очень малое рас-

стояние, прежде чем он получит от покрытия очень большую силу, которая может возникнуть только, когда сукно будет сжато ударом. Но если удар кием сделан не очень наклонно, то шар уже пройдет некоторое расстояние, прежде чем сжатие сукна достигнет своего максимума, а в течение времени, необходимого для этого перемещения, как бы малó это перемещение ни было, можно допустить, что удар кием уже кончился. Одним словом, почти одновременный удар шара кием и удар о сукно можно рассматривать как два последовательных удара.

Таким образом, исследуя удар кия и шара, как во второй главе, и называя попрежнему V' скорость кия до удара, V'_1 — его скорость после удара, V_1 — скорость шара после удара кием, M' — массу кия, a — расстояние линии удара от центра шара и θ — долю полной живой силы, которая теряется при ударе этих двух тел, можно написать, как это было установлено во второй главе:

$$V_1 = V' \frac{1 + \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M} \left(1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2}\right)}}{1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2} + \frac{M'}{M}},$$

$$V'_1 = V' \frac{1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2} - \frac{M'}{M} \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M} \left(1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2}\right)}}{1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2} + \frac{M'}{M}}.$$

Второй удар о сукно, в самом общем предположении, когда он заставит шар немного подпрыгнуть, а скорость V_1 измениться в скорость, горизонтальные составляющие которой по направлению удара кием и по направлению, перпендикулярному к нему, будут иметь данные выше значения, а именно:

$$V_y = V_1 \cos \mu - f_1 V_1 \sin \mu \cos \gamma,$$

$$V_x = f_1 V_1 \sin \mu \sin \gamma.$$

Третья составляющая по вертикали, которую мы будем обозначать через V_z , определится формулой

$$V_z = \varepsilon V_1 \sin \mu,$$

где ϵ обозначает небольшую долю вертикальной скорости, восстановленной после удара о сукно.

Для того чтобы кий и шар разделились после удара, необходимо, чтобы при определении скоростей обоих этих тел в направлении нормали, проведенной в точке удара, скорость первого была бы меньше скорости второго.

Если через NV_1 и NV'_1 обозначать углы, образуемые с нормалью скоростями V_1 шара и V'_1 кия, то для разделения после удара необходимо иметь:

$$-V_1 \cos(NV_1) > V'_1 \cos(NV'_1).$$

Если через $-\eta$ и ζ мы обозначим координаты точки удара по осям y и z , причем координата этой точки по оси x будет h , то мы получим:

$$-V_1 \cos(NV_1) = \frac{\eta V_y - h V_x - \zeta V_z}{R}.$$

Подставив в это уравнение вместо V_x , V_y и V_z их выражения, будем иметь:

$$-V_1 \cos(NV_1) = V_1 \frac{\eta \cos \mu - \sin \mu [f_1 (h \sin \gamma + \eta \cos \gamma) + \epsilon \zeta]}{R}.$$

С другой стороны,

$$-\cos(NV'_1) = \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R} = \frac{\eta \cos \mu + \zeta \sin \mu}{R}.$$

Таким образом, условием разделения шара и кия будет

$$\frac{\eta \cos \mu - \sin \mu [f_1 (h \sin \gamma + \eta \cos \gamma) + \epsilon \zeta]}{\eta \cos \mu + \zeta \sin \mu} > \frac{V'_1}{V_1},$$

или, если вместо V'_1 и V_1 подставить их выражения в функции расстояния a ,

$$\begin{aligned} & \frac{\eta \cos \mu - \sin \mu [f_1 (h \sin \gamma + \eta \cos \gamma) + \epsilon \zeta]}{\eta \cos \mu + \zeta \sin \mu} > \\ & > \frac{1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2} - \frac{M'}{M} \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M} \left(1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2}\right)}}{1 + \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M} \left(1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2}\right)}}. \end{aligned}$$

Величины a , η , ζ и h связаны соотношениями

$$\begin{aligned} a^2 &= (\eta \sin \mu - \zeta \cos \mu)^2 + h^2, \\ \eta &= \cos \mu \sqrt{R^2 - a^2} - \sin \mu \sqrt{a^2 - h^2}, \\ \zeta &= \cos \mu \sqrt{a^2 - h^2} + \sin \mu \sqrt{R^2 - a^2}. \end{aligned}$$

Если в приведенном выше неравенстве оба члена первой части разделить на $\eta \cdot \cos \mu$, то получится:

$$\frac{1 - \operatorname{tg} \left[f_1 \left(\frac{h}{\eta} \sin \gamma + \cos \gamma \right) + \varepsilon \zeta \right]}{1 + \frac{\zeta}{\eta} \operatorname{tg} \mu} > \frac{V'_1}{V_1},$$

где в правой части оставлено для краткости отношение $\frac{V'_1}{V_1}$ вместо его выражения в зависимости от расстояния a .

Разберем сначала случай, когда $a = 0$, что дает нам:

$$h = 0, \quad \eta \sin \mu = \zeta \cos \mu, \quad \cos \gamma = 1 \quad \text{и} \quad \sin \gamma = 0.$$

Если взять числовое значение, которое принимает вторая часть неравенства при $\theta = 0,13$ и $\frac{M}{M'} = \frac{1}{3}$, то получится:

$$\frac{1 - \operatorname{tg} \mu (f_1 + \varepsilon \operatorname{tg} \mu)}{1 + \operatorname{tg}^2 \mu} > 0,48;$$

если пренебрежем величиной ε и примем f_1 равным 0,20, то из этого неравенства следует:

$$\operatorname{tg} \mu < 1,24.$$

Таким образом, шар и кий еще разойдутся после удара, когда наклон кия будет несколько больше половины прямого угла.

В случае, когда кий касается шара в тыльной точке, то есть когда $\eta = R$, $\zeta = 0$ и $h = 0$, то, замечая, что

$$\cos \mu = \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}},$$

неравенству можно придать вид

$$1 - \operatorname{tg} \mu \cdot f_1 > \frac{V'_1}{V_1}.$$

Вследствие незначительности члена $f_1 \operatorname{tg} \mu$ это условие является приблизительно таким же, когда удар происходит горизонтально, поскольку в таком случае условие разделения требует:

$$1 > \frac{V'_1}{V_1}.$$

В случае наклонного удара, когда кий бьет в тыловую точку, угол μ ограничен расстоянием a , поскольку оно не может превзойти $0,60 R$; таким образом, самое большее мы можем иметь:

$$\cos \mu = \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}} = 0,80,$$

что соответствует углу μ , равному 36° .

Если мы ударяем немножко выше тыльной точки и немного сбоку ее, то при a не слишком большом можно брать угол μ до 45° . Но если μ и a будут достаточно большими, то условие разделения уже не удовлетворяется и удар уже никоим образом не может быть верным, потому что шар и кий не разделятся тотчас после удара и основные величины движения будут зависеть от трения и не будут уже получаться при помощи построения фиг. 28. Однако опытные игроки умеют так быстро отводить назад кий во время удара, что эта причина ошибки отпадает при наклонных и эксцентрических ударах кия, так что они могут с уверенностью получать желаемые результаты и вне пределов, указанных приведенным неравенством. В таком случае им достаточно только для расстояния a не превышать предела $0,70 R$, что остается всегда необходимым для того, чтобы кий не скользил по шару в самое мгновение удара.



ОТДЕЛЬНОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ
ПРАВИЛ И ПОСТРОЕНИЙ,
ПОЛУЧАЮЩИХСЯ ИЗ ТЕОРИИ,
ОБОСНОВАННОЙ
В ПРЕДЫДУЩИХ ГЛАВАХ



О ДВИЖЕНИИ ШАРА ПО БИЛЬЯРДНОМУ СУКНУ БЕЗ УЧЕТА ПРИЧИНЫ, ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ЭТО ДВИЖЕНИЕ

Бильярдный шар, получив некоторое начальное движение, в котором ось вращения имеет любое положение по отношению к направлению движения центра, описывает кривую линию под действием трения между бильярдным сукном и точкой опоры. *Какова бы ни была природа этого трения, результирующая скорости центра шара и скорости верхнего центра удара (относительно центра шара)¹⁾ остается во время движения всегда постоянной по величине и направлению.* Это направление является тем, которое мы назвали *финальным*, то есть тем, которое имеет центр шара, когда шар перестает испытывать трение в точке опоры и начинает только катиться по сукну.

Если пренебречь трением качения, которое является незначительным, то направление скорости точки опоры и, следовательно, направление трения скольжения будет постоянным во время движения; таким образом, поскольку величина силы трения не зависит от скорости, кривая, описываемая центром шара, будет параболой.

Пусть AB (фиг. 1) представляет переносную скорость центра, AG — относительную вращательную скорость точки опоры, отложенную в ее направлении, и AF — скорость, равную и противоположную вращательной скорости точки опоры, иными словами, относительную

¹⁾ Мы сказали бы «абсолютная скорость верхнего центра удара». (Прим. перев.)

вращательную скорость верхней точки шара, диаметрально противоположной точке опоры. Сила трения всегда действует по направлению от B к F , и, таким образом, скорость шара по направлению, перпендикулярному к BF , остается постоянной, а ускорение или замедление может получаться только по направлению BF .

Для того чтобы шар двигался прямолинейно, необходимо, чтобы ось вращения лежала в вертикальной плоскости, перпендикулярной к направлению движения, или, что сводится к тому же, чтобы линия AG , представляющая относительную вращательную скорость опоры, была направлена по прямой AB , представляющей переносную скорость центра. Когда эти две скорости образуют угол, движение первоначально будет происходить по кривой, пока эти скорости, направления которых будут постоянно расходиться, не сделаются равными и противоположными. Начиная с этого мгновения, бильярдный шар будет катиться без трения скольжения и двигаться прямолинейно так, что и вращательная скорость и ось вращения не будут менять ни величины, ни направления.

Во время движения шара скорости AB и AF будут сближаться друг с другом так, что если обращать внимание только на эти скорости, отвлекаясь от движения центра A , который на фиг. 1 занимает одно и то же место, то концы B' и F' новых переменных скоростей AB' и AF' будут оставаться на прямой FB и пойдут навстречу друг другу, пока не соединятся в точке E , расположенной так, что $EB = \frac{2}{7} FB$.

Если по направлению прямой AG — относительной скорости точки опоры — отложить $AH = \frac{2}{5} AG$, то линия AH будет относительной вращательной скоростью нижнего центра удара; конец H этой скорости, который будет очень часто встречаться в дальнейших построениях, будет перемещаться, подвигаясь на отрезок HN' , равный и параллельный отрезку BB' , на который за то же время переместилась точка B . Если мы отложим AN' в противоположном направлении от B' к D , то точка D

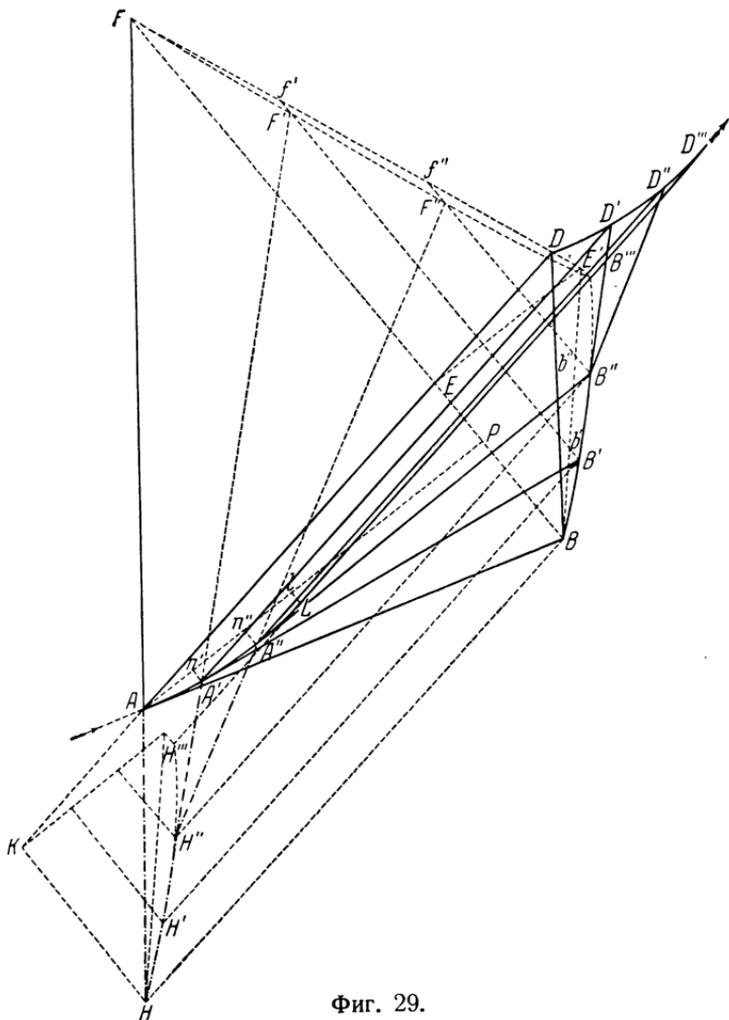
будет оставаться постоянной, то есть не будет перемещаться, в то время как B' пойдет от B к E ; таким образом, DB' ¹⁾ будет относительной вращательной скоростью верхнего центра удара, тогда как AH' будет таковой же скоростью для нижнего центра удара. Это построение связано с высказанным выше предложением, а именно, что направление конечной скорости является всегда направлением результирующей скорости центра шара, принятой за переносную скорость шара, и вращательной относительной скорости верхнего центра удара. Но нужно иметь в виду, что величина AE финальной скорости составляет только $\frac{5}{7}$ этой результирующей AD , или HB .

Если величина трения f постоянна, то точка B' приближается к своему конечному положению E , проходя в секунду расстояние fg , или $2,45$ м; здесь $g = 9,809$ м/сек² и f согласно различным опытам приблизительно равно $0,25$.

Чтобы найти точку L , в которой окажется на сукне бильярдный шар в то мгновение, когда он достигнет своего финального состояния, сделаем следующее построение на том же чертеже (фиг. 1). Соединим точку A с точкой M — серединой отрезка EB . Точка L будет находиться на прямой AM на расстоянии AL от точки A . Это расстояние AL относится к AM , как BM к $\frac{1}{2}fg$ или как BE к fg . Для того чтобы получить точку L построением, проведем отрезок AJ , параллельный FB и равный fg ; эта прямая пересечет HB в точке I ; соединим прямолинейным отрезком точки J и M и проведем через точку I прямую, параллельную JM до пересечения в точке L с прямой AM . В полученной точке L и окажется центр шара в то мгновение, когда он переходит в свое финальное состояние. Чтобы получить финальный путь шара, проведем через точку L прямую LV по направлению прямой HB или параллельной ей AD . Криволинейное движение шара будет происходить по параболе AL , касательной в точках A и L к прямым AB и LV ,

¹⁾ Мы бы сказали не DB' , а $B'D$, учитывая направление скорости. (Прим. перев.)

которые представляют начальное и финальное направления движения центра шара.



Фиг. 29.

Для того чтобы знать, что произойдет при ударе о другой шар, достаточно иметь лишь переменные скоро-

сти V, V_r и v , то есть отрезки AB', AF' или AG' и AH' или DB' фиг. 1. Если нужно их получить для каждого положения шара на описываемой им кривой AL (фиг. 29), то заметим, что вследствие постоянства переносной скорости по направлению AP , перпендикулярному к BF , достаточно будет отложить на этом перпендикуляре равные отрезки $An', n'n'', n''l$ и заметить, что если обе скорости AB' и AF отложены от точек n', n'', l , то их концы b', b'', f', f'' окажутся на прямых BE' и FE' , проведенных из точек B и F к точке E' , то есть к концу перпендикуляра EE' к прямой BF ; эта прямая EE' должна быть равна Al — проекции кривой AL на направление AP . Но вследствие того, что эти скорости откладываются от точек A', A' и L , требуется точки b', b'', f', f'' и E' сместить к кривой AL параллельно BF на расстояния $b'B', f'F'$ и $b''B'', f''F''$ и $E'B'''$, соответственно равные ординатам $n'A', n''A''$ и lL этой кривой. В результате этого построения направления $A'B'$ и $A''B''$ станут направлениями касательных к кривой AL , поскольку они являются направлениями скоростей центра шара, описывающего эту кривую.

Что касается точки H , которая является концом скорости нижнего центра удара, то она описывает кривую $HH' H'' H'''$, равную и параллельную кривой $BB' B'' B'''$, описанной точкой B . Точка D — конец скорости $BD = AH$, отложенной от B' , описывает кривую $DD' D'' D'''$, в точности равную кривой $AA' A'' L$, пройденной шаром ¹⁾ при этом движении. Прямая AD — результирующая скоростей AB и BD — перемещается, оставаясь равной и параллельной самой себе ²⁾.

Что касается горизонтальной скорости $R \cdot r$ точек, лежащих на горизонтальном экваторе шара, то она остается приблизительно постоянной во время движения шара.

¹⁾ Мы бы сказали «траектории центра шара». (Прим. перев.)

²⁾ Иными словами, абсолютная скорость верхнего центра удара во время движения шара не изменяется. (Прим. перев.)



ОБ УДАРЕ ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ КИЕМ

Напомним сначала следующие определения.

Линия удара — линия, проведенная через ту точку, в которой кий ударяет шар, по направлению движения этого кия, которое всегда предполагается совпадающим с его геометрической осью.

Вертикальная плоскость удара — вертикальная плоскость, проведенная через линию удара.

Хотя бы линия удара и не прошла через центр шара, направление начального движения шара не зависит от трения между кием и шаром, если только линия удара не находится на расстоянии от центра, превосходящем предел, при котором трение не может воспрепятствовать скольжению конца кия по шару во время удара; направление начального движения зависит только от направления удара кием или, иными словами, от направления линии удара; это обстоятельство и является причиной того, что можно давать верные удары. Если расстояние линии удара от центра будет больше этого предельного расстояния, то удар уже не будет верным и получится кикс (*fausse queue*); указанный предел будет еще меньше или даже исчезнет совсем, если конец кия будет обладать хотя бы небольшой поперечной (то есть перпендикулярной к оси кия) скоростью. Предельное расстояние a от центра, на котором можно ударять шар кием с кожаной наклейкой, хорошо натертой мелом, составляет самое большее $0,70 R$, если удар нанесен уверенно и без поперечной скорости.

Всякий раз, когда линия удара (ось кия), будет горизонтальной, а также когда вертикальная плоскость удара

пройдет через центр шара, этот центр пойдет по прямой линии. Таким образом, в обычной игре, когда кий держат горизонтально и не делают кикса, шар пойдет по прямой линии в направлении удара, в какой бы точке шара ни был нанесен удар.

Движение по прямой обычно начинается с переменного движения, которое становится равномерным лишь с мгновения достижения шаром финального состояния качения. Переменное движение будет замедленным, если линия удара проходит ниже горизонтальной плоскости, проведенной через центр удара; если линия удара находится в этой плоскости, то движение шара сразу же принимает свое финальное состояние; если линия удара будет выше этой плоскости, то переменное движение будет ускоренным вплоть до финального состояния. Правда, этот последний случай не встречается в обычной игре, так как для этого следовало бы нанести удар по шару очень близко от той точки, где можно сделать кикс.

Пусть V_0 обозначает скорость, которую получил бы центр шара от того же самого удара кием, то есть при той же скорости кия, но при дополнительном условии, что линия удара проходит через центр и a представляет расстояние линии удара от центра; тогда скорость V_1 , которую получит центр шара в результате удара кием выразится формулой

$$V_1 = \frac{V_0 \left(1 + \frac{M}{M'}\right) \left[1 + \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M} \left(1 + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2}\right)}\right]}{\left(1 + \frac{M}{M'} + \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2}\right) \left(1 + \sqrt{1 - \theta - \theta \frac{M'}{M}}\right)}.$$

Эта скорость делается равной V_0 при $a=0$.

В пределах, в которых можно брать расстояние a , то есть от $a=0$ до $a=0,60 R$, и в предположении, что $\frac{M}{M'} = \frac{1}{3}$ и $\theta = 0,13$, значение V_1 представлено на фиг. 3 ординатами кривой $C'CC'C'$, абсциссы OR или $M''M$ которой представляют расстояния точки удара от центра O шара.

Допустим, что круг, начерченный на фигуре, представляет большой круг шара, перпендикулярный к направлению удара (однако в значительно более крупном масштабе по сравнению с масштабом скоростей ¹⁾), а T является точкой, в которой линия удара пересекает вертикальную плоскость упомянутого круга; повернем отрезок OT так, чтобы он оказался абсциссой OR ; тогда соответствующая ордината MC будет скоростью V_1 центра. Наибольшая ордината $M''C''$ кривой представляет скорость V_0 , которая получилась бы при ударе в центр. Так как в дальнейшем будет видно, что удар кием не может быть нанесен на расстоянии a от центра, превышающем $0,60 R$, то кривая не была продолжена далее этого расстояния.

Вращательные скорости точек горизонтального большого круга шара, будучи спроектированы на плоскость этого круга, дают величину $R \cdot r$, остающуюся постоянной во все время движения. Она определяется формулой

$$R \cdot r = V_1 \frac{h}{\frac{2}{5} R}.$$

Чтобы получить ее при помощи скорости V_1 — скорости центра шара, иными словами, через ординату кривой $C'CC''C'$, достаточно будет изменить эту ординату в отношении $h : \frac{2}{5} R$, где h представляет расстояние ET между вертикальной плоскостью удара и центром шара.

Если удар кием (который предполагается горизонтальным) дан на высоте центра, то $a = h$. Если теперь изменять h , то величина $R \cdot r$ будет изменяться, как показывают ординаты PR обеих кривых ORR' (фиг. 6). Исходя из вышеприведенной формулы, представляющей V_1 в функции V_0 , можно найти, что максимальное значение $R \cdot r$ соответствует приблизительно $h = 0,50 R$.

¹⁾ Здесь Кориолис допускает неточность выражения, так как масштабы расстояний и скоростей несравнимы между собой, (Прим. перев.)

Таким образом, для получения наибольшей скорости вращения вокруг вертикальной оси надо ударить шар на расстоянии от центра, равном половине радиуса.

В этом случае

$$R \cdot r = 0,75 V_0.$$

Самая большая величина V_0 составляет 7 м/сек для очень сильного удара кием. Тогда

$$R \cdot r = 5,25 \text{ м/сек.}$$

Скорость центра шара в мгновение, когда шар находится в состоянии скольжения, равна $V_1 \frac{l}{R}$, где V_1 — начальная скорость центра шара, а l представляет высоту удара над сукном бильярда.

Скорость центра шара в финальном состоянии будет всегда равна $\frac{5}{7} V_1 \frac{l}{R}$.

Величина $V_1 \frac{l}{R}$ определена для различных значений l в предположении $h=0$ и $a^2=(l-R)^2$. Полученные значения изображены (фиг. 7) горизонтальными ординатами $d'h'$, dh , DH и $D'H'$ кривой $h'hHH'$, абсциссы MD которой суть высоты l . Если в этом случае искать максимальное значение $V_1 \frac{l}{R}$, то можно убедиться, что оно соответствует $l=1,19 R$; таким образом, для получения наибольшей возможной скорости, в финальном ли состоянии или состоянии скольжения, нужно ударить выше центра на расстоянии, равном приблизительно пятой части радиуса.

В этом случае величина $\frac{5}{7} V_1 \frac{l}{R}$ будет равна

$$\frac{5}{7} V_1 \frac{l}{R} = 0,78 V_0.$$

Так как наибольшее значение V_0 при очень сильном ударе кием составляет 7,00 м/сек, то для максимальной финальной скорости будем иметь:

$$\frac{5}{7} V_1 \frac{l}{R} = 5,46 \text{ м/сек.}$$

В предположении, что удар кием направлен горизонтально и что шар идет по прямой линии, скорость центра шара в различных точках траектории может быть изображена ординатами параболы с горизонтальной осью, (фиг. 4, б), вершина K которой находится на расстоянии $\frac{V_1^2}{2fg}$, или $\frac{V_1^2}{4,90}$ м, от исходной точки M и ордината MC которой, соответствующая исходной точке, равна начальной скорости V_1 .

Абсциссы MD представляют расстояния, пройденные шаром по бильярдному сукну, начиная от исходной точки M , а ординаты AD изображают скорости шара, пока он еще не перешел в финальное состояние. Если мы будем менять скорость V_1 , то параболы будут сохранять ту же самую форму; параметр их $\frac{fg}{2}$ будет общим для всех парабол, и они будут отличаться только тем, что их вершины K', K будут более или менее удаленными от исходной точки M шара.

Когда шар будет в финальном состоянии, то его скорость, остающаяся приблизительно постоянной, изобразится ординатой горизонтали GL .

Если мы проведем горизонталь PE на высоте MP , которая относится к CM , как высота l точки, в которой кий касается шара, к радиусу R этого шара, то точка встречи этой горизонтали с параболой будет иметь абсциссой MI —расстояние, где шар находится в состоянии скольжения. Высота MP изображается на фиг. 4, а расстоянием LP . Его можно легко построить при помощи $MM''=R$, $M''L=l$ и $MC=V_1$, так как $LP=V_1 \frac{l}{R}$.

Если мы проведем горизонталь GL (фиг. 4, б) на высоте $MF=\frac{5}{7}MP$, то есть на высоте, изображающей финальную скорость шара, проекцией на ось MK той точки G , в которой она пересекает параболу, явится точка Q , в которой начинается на сукне бильярда финальное движение шара.

Когда F падает выше C , иными словами, если $l > \frac{7}{5} R$ (фиг. 4), то нужно будет одновременно перевернуть па-

раболу; ее вершина будет в K ; ординаты точек параболы от C до G представят скорости; далее точки G шар будет находиться в финальном состоянии и двигаться с постоянной скоростью DA .

В то время как ордината DA параболы (фиг. 4, б) представляет переносную поступательную скорость шара для каждого мгновения, часть AN этой ординаты, заключенная между кривой и горизонталью PE , определяющей точку скольжения, представит относительную вращательную скорость v верхнего центра удара шара. Эта величина имеет очень важное значение, ею постоянно приходится пользоваться во всех построениях при определении движения шара после удара о другой шар или о борт.

Сумма или разность скоростей V и v центра шара и верхнего центра удара¹⁾ остается постоянной во все время движения и равной $V_1 \frac{l}{R}$. Сумма берется в том случае, когда вращение является прямым и v имеет то же направление, что и V ; разность же — тогда, когда v идет в направлении, противоположном V . Нужно помнить, что в случае криволинейного движения остается постоянной именно эта результирующая обеих скоростей V и v .

Когда точка A параболы находится выше прямой PE , то вращение обратное; когда же ниже — то прямое. Скорость обратного вращения получается только в том случае, когда $l < R$, иными словами, когда линия удара проходит ниже центра шара.

Если линия удара находится в горизонтальной плоскости, проходящей через центр шара, то последний находится в состоянии скольжения уже с самого начала движения и обратного вращения никогда не получается. Если линия удара проходит выше горизонтальной плоскости, проходящей через центр, то вращение будет прямым и шар никогда не будет находиться в состоянии скольжения.

Так как переменное движение, которое получает свой шар или после удара о другой шар, или после отражения

¹⁾ Мы бы сказали «абсолютная скорость верхнего центра удара». (Прим. перев.)

от борта, главным образом зависит от характера вращения, в котором находится шар в мгновение удара, то результаты будут совершенно различны, будет ли шар в состоянии обратного вращения, в состоянии скольжения, в состоянии прямого вращения или, наконец, в финальном состоянии качения. Поэтому важно знать место на бильярдном сукне, где находится шар при прямолинейном движении в то мгновение, когда он оказывается в состоянии скольжения, потому что до этого места шар бывает в состоянии обратного вращения, а после — в состоянии прямого вращения. Так же существенно знать точку, где шар переходит в финальное состояние, так как, начиная с этой точки, движение остается постоянным.

Пользуясь установленными выше обозначениями, мы получаем для расстояния y_0 между начальной точкой и той, в которой шар находится в состоянии скольжения, то есть для MI (фиг. 4, б)

$$y_0 = \frac{V_1^2}{2fg} \left(1 - \frac{l^2}{R^2} \right),$$

а для расстояния y_2 , или MQ той же фигуры, между начальной точкой и той, в которой шар переходит в состояние качения,

$$y_2 = \frac{V_4^2}{2fg} \left[1 - \left(\frac{5l}{7R} \right)^2 \right].$$

Когда шар ударяют в центр, то

$$y_0 = 0$$

и

$$y_2 = \frac{24}{49} \cdot \frac{V_0^2}{2fg},$$

или приблизительно

$$y_2 = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{2fg}.$$

Таким образом, расстояние MQ (фиг. 4, б), пройденное шаром до перехода в финальное состояние, если шар получил удар на высоте центра, будет равняться половине длины MK параболы.

Если принять $f=0,25$, то получается приблизительно

$$y_2 = 2 \frac{V_0^2}{2g}.$$

Скорость V_0 , равная тому значению, которое принимает V_1 при ударе в центр, для очень сильных ударов кием близка к $7,00$ м/сек, так что

$$\frac{V_0^2}{2g} = 2,50,$$

и

$$y_2 = 5,00 \text{ м.}$$

Для обычного удара кием имеем:

$$\frac{V_0^2}{2g} = 1,20 \quad \text{или} \quad V_0 = 4,86 \text{ м/сек,}$$

что дает:

$$y_2 = 2,40 \text{ м.}$$

Если мы ударим как только можно ниже, т. е. при $l=0,40 R$, то получим:

$$y_0 = 3,36 \frac{V_1^2}{2g} \quad \text{и} \quad y_2 = 3,68 \frac{V_1^2}{2g}.$$

Выражения для y_0 и y_2 содержат скорость V_1 центра шара. Но она зависит от скорости V_0 , которую получил бы этот центр, если бы удар с той же самой скоростью кия был направлен в центр; соответствующее значение было установлено раньше.

Когда вертикальная плоскость удара проходит через центр и $h=0$, то расстояние a , входящее в формулу, выражающую V_1 через V_0 , равно $R-l$ или $l-R$. Если в выражении для y_0 мы заменим a этим его значением, возьмем для отношения $\frac{M'}{M}$ обычную величину 3 и положим $\theta=0,13$, то получится, что вышеупомянутое выражение будет по отношению к l иметь максимум для

$$R-l=0,25 R.$$

Так как в точке бильярда, где шар находится в состоянии скольжения, шар теряет способность отходить

назад после удара о другой шар ¹⁾, то отсюда следует, что при ударе кием определенной силы шар после соударения с другим шаром в точке, не слишком удаленной от тыльной, в том случае дольше всего сохраняет способность к оттяжке, когда удар кием нанесен ниже центра приблизительно на четверть радиуса.

Для принятых значений f , θ , M и M' мы будем иметь такое максимальное значение:

$$y_0 = 0,33 \frac{V_0^2}{2fg}.$$

Таким образом, для обычного удара кием, при котором $\frac{V^2}{2fg} = 4,80$ м, мы имеем:

$$y_0 = 1,58 \text{ м},$$

а для очень сильного удара кием, при котором $\frac{V_0^2}{2fg} = 10,00$ м,

$$y_0 = 3,30 \text{ м}.$$

Если нет необходимости, чтобы шар возможно дольше сохранял способность к оттяжке после удара о другой шар, но желательно иметь ее в возможно большей степени вблизи исходной точки, то нужно бить как можно ниже, не делая, конечно, кикса. Но для такого понижения линии удара имеется предел: он получается из условия, чтобы конец кия после удара не находился бы в соприкосновении с шаром и не производил трения о шар, ибо в таком случае трение очень быстро уничтожает обратное вращение. Таким образом, если мы зададимся условием, чтобы кий отделялся от шара сразу же после удара, то найдем, что нельзя ударять шар на расстоянии от центра, большем 0,60 радиуса, и то при условии, что рука держит кий, очень мало его сжимая, или что кий очень быстро отнимают в то самое мгновение, когда он ударяет шар.

Если пользоваться несколько более легким кием, не более чем в два с половиной раза тяжелее шара, и если

¹⁾ Так называемый «клапштос». (Прим. перев.)

почти не сжимать его в руке, то можно, не уничтожая обратного вращения, ударить шар так низко, как только позволяет условие, чтобы конец кия не скользил по шару во время удара, иными словами, на расстоянии 0,70 радиуса от центра шара. Если кий более тяжел или менее упруг, или, что сводится к тому же, если игрок сжимает кий в руке, прибавляя, таким образом, к массе кия еще и массу руки, или, наконец, если он продолжает еще толкать кий вперед после удара, то обратное вращение будет уничтожаться еще при гораздо меньшем расстоянии ниже центра; таким образом, эффект оттяжки получается гораздо менее значительным.

Если мы хотим определить y_2 аналогично тому, как мы определили y_0 , то в последнем выражении достаточно будет заменить множитель $1 - \frac{l^2}{R^2}$ на $1 - \left(\frac{5}{7} \frac{l}{R}\right)^2$. Таким образом, получается, что для заданной скорости кия расстояние y_2 будет максимальным, иными словами, шар до перехода в финальное состояние качения пройдет наибольшее возможное расстояние в том случае, если ударить шар ниже центра на расстоянии, равном одной десятой радиуса. При этих обстоятельствах мы будем иметь:

$$y_2 = 0,57 \frac{V_0^2}{2fg} \quad \text{или} \quad y_2 = 2,28 \frac{V_0^2}{2g},$$

что для очень сильного удара кием, соответствующего

$$\frac{V_0^2}{2g} = 2,50 \text{ м},$$

дает

$$y_2 = 5,70 \text{ м},$$

а для обычного удара кием, соответствующего

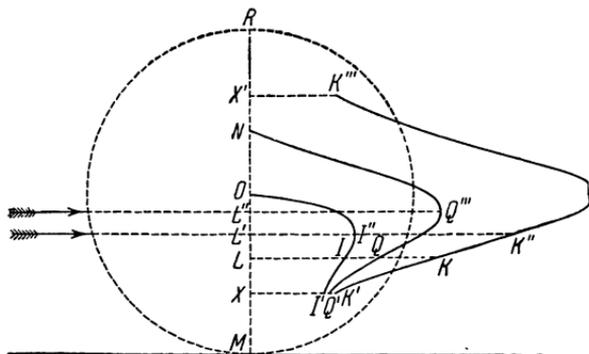
$$\frac{V_0^2}{2g} = 1,20 \text{ м},$$

дает

$$y_2 = 2,73 \text{ м}.$$

Характер изменения расстояний y_0 и y_2 в зависимости от высоты l удара, нанесенного в вертикальной плоскости,

проходящей через центр, показан на фиг. 30 при помощи горизонтальных ординат LI и LQ кривых $I'I''O$ и $Q'QN^1$). Круг с диаметром MR представляет в увеличенном масштабе вертикальный большой круг шара в плоскости удара. Для удара кием, данного на высоте L , горизон-



Фиг. 30.

тальное расстояние LQ , взятое равным отрезку MQ фиг. 4, δ представляет расстояние y_2 , а расстояние LI , взятое равным отрезку MI фиг. 4, δ представляет расстояние y_0 . Первое обращается в нуль для $l = \frac{7}{5} R$, а второе для $l = R$. Максимальные величины этих расстояний соответствуют: для первой $R - l = 0,10 R$, а для второй — $R - l = 0,25 R$.

Ординаты LK кривой $K'KK''K'''$ представляют на фиг. 30 расстояния MK фиг. 4, δ , иными словами, эта кривая отмечает места крайних точек K парабол, построенных для различных значений l .

¹⁾ На графике ось абсцисс вертикальна, а ось ординат горизонтальна. (Прим. перев.)



ОБ УДАРЕ НАКЛОННЫМ КИЕМ

Если держать кий немного наклонным, но так, чтобы вертикальная плоскость удара проходила через центр, то движение шара будет всегда происходить по прямой линии с теми характеристиками, которые мы только что указали, но только удар шара о бильярдную плоскость уменьшит поступательную скорость и увеличит прямое вращение, или уменьшит обратное. В этом случае для того, чтобы кий не продолжал находиться в соприкосновении с шаром после удара, нужно, чтобы линия удара проходила на меньшем расстоянии от центра по сравнению с горизонтальным ударом кием.

Если при наклонной линии удара вертикальная плоскость удара не проходит через центр, то и шар вначале опишет часть параболы переменным движением, после чего он перейдет в финальное состояние качения, следуя по касательной к этой кривой.

Направление этой касательной несколько не зависит от величины трения между бильярдным сукном и шаром. Чтобы получить это направление, представим себе (фиг. 28), что линия удара $T'R'$ продолжена до встречи с сукном в точке, вертикальная проекция которой R' и горизонтальная проекция R ; проведем на сукне прямую, идущую от опорной точки A шара до R ; полученное направление AR будет параллельно линии движения шара в его финальном состоянии.

Таким образом, *если шар ударяют не горизонтально, причем вертикальная плоскость удара не проходит через его центр, то шар описывает кривую, отклоняясь от направления удара в ту сторону, в какую был нанесен удар; финальный его ход будет параллелен линии,*

проведенной из точки опоры к точке, в которой линия удара пересекает плоскость сукна.

Длина криволинейной части траектории зависит от величины силы трения шара о бильярдное сукно во время удара и после него, а также от силы удара. Легко построить эту кривую: для этого достаточно получить ее крайнюю точку L , через которую должна пройти прямая LV финального хода, параллельная AR .

Сначала на плоскости бильярдного сукна отметим точку P , представляющую проекцию той точки, в которой линия удара пересекает горизонтальную плоскость, проведенную через верхний центр удара N ; затем из центра A проводим прямую AP ; после этого чертим прямую AB , представляющую по величине и направлению горизонтальную проекцию скорости $V_1 = DB$, которую получил бы центр шара в результате удара кием, если бы линия удара была горизонтальна; для этого воспользуемся кривой фиг. 3. Через точку B проведем прямую BE , параллельную AP , до ее встречи в E с продолжением AR .

Чтобы получить направление начальной скорости AB' центра шара, на BE , начиная от B , откладываем длину BB' , равную $f'V \sin \mu$, где μ угол DBA , образуемый линией удара с горизонталью. Для этого отложим $BS = f'V_1 = \frac{1}{5}BD$, так как $f' = 0,20$; проектируя S на вертикаль, получим точку G и затем перенесем BG , или $f'V_1 \sin \mu$, так, чтобы точка B перешла в B' . Имея начальную скорость AB' и направление AR или AE финальной скорости, можно найти крайнюю точку L кривой при помощи построения фиг. 1. Таким образом, в середине $B'E$ берут точку M и проводят соединительную прямую AM , на которой будет находиться точка L . Место ее на этой прямой можно получить, если взять такой отрезок AL , чтобы отношение AL к AM равнялось отношению $B'E$ к длине fg , которая в предположении $f = 0,25$ будет равна 2,45, или же отношению $B'M'$ к 1,225. Для получения хода шара остается только провести через L прямую LV , параллельную AR , и вычертить между A и L параболу, касающуюся прямых AB' и LV в точках A и L .

Если горизонтальное расстояние AP центра удара от линии удара равно или меньше $\frac{7}{5}fR$, то шар, вместо того чтобы начать скольжение в точке опоры, сразу покатится под ударом кия по направлению AR , определяемому предыдущим построением для финального состояния в том случае, когда шар сначала описывал часть параболы.

Если бы шар подскочил после удара кием, то следовало бы увеличить BB' в отношении $1:(1+2\varepsilon)$, где ε представляет часть вертикальной скорости, оставшейся у шара после удара, и затем начало A кривой на AB' надо перенести в ту точку, в которой шар потом упадет на бильярдное сукно.



О ДВИЖЕНИИ ШАРА ПОСЛЕ ПЕРВОГО ИЛИ ВТОРОГО УДАРА О ДРУГОЙ ШАР

Сначала напомним следующие определения.

Свой шар — шар, которому нанесен удар кием.

Противостоящий шар — неподвижный шар, в который ударяет свой шар.

Точка удара — точка соприкосновения шаров в мгновение удара.

Тыльная точка — точка противостоящего шара, в которую ударяется свой шар, когда направление движения центра этого шара проходит через центр противостоящего шара.

Угол начального отклонения — угол, который образует направление движения своего шара перед ударом о противостоящий шар с направлением сейчас же после удара; мы обозначаем его через α .

Угол финального отклонения — угол, который скорость своего шара в финальном состоянии после удара о противостоящий шар образует с направлением его движения до удара; мы его обозначаем через ψ .

Так как трение обоих шаров во время удара сохраняет постоянное направление, как это можно доказать, то уравнения их движения после удара могут быть легко установлены. Но для большинства обычных случаев игры трением между шарами можно пренебречь. Действительно, из различных опытов, которые описаны в третьей главе, получается, что сила трения¹⁾ может дать только количество движения, составляющее приблизительно 0,03 того, которое производится в точке удара. Это трение может

¹⁾ Вернее, импульс силы трения. (*Прим. перев.*)

иметь заметное влияние на финальное направление движения своего шара только в том случае, если он касается другого шара в тыльной точке, или очень близко от нее, и если, кроме того, кий ударил сбоку, то есть вертикальная плоскость удара не проходит через центр. Что касается движения противостоящего шара, то на него трение при соприкосновении всегда оказывает только самое незначительное влияние.

Поэтому, если мы начинаем исследование движения своего шара, пренебрегая трением между шарами во время удара и допуская абсолютную упругость шаров (опыт показывает, что это можно сделать с большой степенью точности), то мы получаем следующее построение.

Берем на фиг. 4, б отрезки AD и AH соответственно тому, как был нанесен удар кием от точки D , где в мгновение удара находился на бильярдном сукне противостоящий шар; точка M является той, в которой свой шар получил удар кием, а прямая PE проведена на высоте $MP = \frac{l}{R} MC$. Если удар имеет место за точкой Q , то рассматриваемые расстояния будут $A'D'$ и $A'H'$.

На AD , как на диаметре, описываем окружность (фиг. 4, б), проводим хорду AB в направлении горизонтальной касательной в той точке, в которой происходит соударение с противостоящим шаром, иными словами, помещаем точку B на расстоянии по дуге от A , превышающем вдвое расстояние AT между точкой удара T и тыльной точкой A . Линия NB дает во всех случаях направление финального хода своего шара по отношению к направлению AD , представляющему его движение до удара. Положение этого финального хода получается, если построить конец L параболы, как это показано на фиг. 1, где длины AH и AB соответствуют длинам AH и AB фиг. 4, б. Это построение воспроизведено на фиг. 8, на которой сохранены те же самые буквы, что и на фиг. 1. Посредством круга с диаметром AD построение готовится для всех положений точки удара. Точка M тоже находится на некотором круге, поскольку $MB = \frac{1}{7} FB$,

но только этот круг имеет центр, отличный от центра круга, на котором находится точка B .

Имея точку L — конец криволинейного пути, проводим через нее LV параллельно HB ; таким образом, получается финальный путь шара. Описанная парабола может быть легко получена, так как она является касательной в A и L к начальному и конечному направлениям AB и LV .

Фигура 9 представляет то же самое построение для случая, когда соударение шаров происходит при обратном вращении своего шара и когда точка H попадает между A и D . Тогда свой шар после удара может идти во всех направлениях; он отходит, возвращаясь к игроку, если дуга AB не слишком велика, иными словами, если (круг ABD мы принимаем за горизонтальный большой круг шара) точка удара T не слишком удалена от тыльной точки A .

На фиг. 10 даны те же самые построения для случая, когда соударение происходит в финальном состоянии шара; тогда самое большое отклонение, которое может получить шар, равняется $33^{\circ}44'$; оно получается, если центр своего шара направить к точке, лежащей очень близко от видимого края противостоящего шара, причем точка удара должна быть на расстоянии $27^{\circ}6'$ от тыльной точки.

Пусть свой шар ударил первый шар в точке, отстоящей от тыльной точки на угловом расстоянии, соответствующем углу, стягиваемому дугой AT круга ATD (фиг. 11); пусть затем он ударил еще другой шар, очень близкий к первому, причем точка удара находится на угловом расстоянии, равном углу, стягиваемому AT' на круге $AT'B$; тогда, проведя хорду AB в первом круге и хорду AB' в том, для которого AB служит диаметром (эти хорды соответствуют дугам, вдвое большим дуг AT и AT'), получим линию HB' , дающую финальное направление своего шара после второго удара; прямые AB' и $АН$ послужат для построения параболы, описываемой шаром, и для нахождения точки L , как это и сделано на чертеже.

Кривой, огибающей семейство кругов $AB'B$ для всех положений точки B (фиг. 12), будет эпициклоида, образованная кругом, катящимся по равному кругу; этот последний круг имеет своим диаметром радиус AR круга

ADB , иными словами, половину скорости V . Касательные, проведенные к этой кривой через точку H , как бы ни были расположены по отношению друг к другу оба шара, предполагаемые очень близкими, и какими бы ни были точки удара, для некоторого отношения между скоростями AD и AH дадут самые большие отклонения, которые может получить свой шар после второго удара. Если свой шар в мгновение удара находится в финальном состоянии, то самый большой угол финального отклонения будет $51^{\circ}31'$.

Фигура 15 показывает изменения, которые следовало бы сделать, если принять во внимание, что шары не абсолютно упруги или (что приблизительно сводится к тому же) что их массы не совершенно одинаковы. В этом случае круг ABD нужно заменить кругом $A'B'D$, диаметр которого меньше на длину AA' ; этот диаметр, если взять его отношение к AD , изображает нормальную скорость, сохранившуюся у центра своего шара после удара.

Фигура 14 показывает аналогичные изменения для случая второго удара, следующего непосредственно после первого. Мы подчеркиваем, что этот случай является лишь дополнением к теории потому, что упругость бильярдных шаров можно считать абсолютной.

Если имеется неравенство масс, причем большей массой обладает свой шар, то нужно только применить предыдущее построение (фиг. 15, *а*). Если, наоборот, он будет легче, то часть скорости BB' (фиг. 15, *б*) должна быть отложена в противоположную сторону.

На фиг. 13 показано построение для того случая, когда второй удар происходит на ощутительном расстоянии от первого и когда элементы AH и AB имеют достаточно времени для изменения при переходе от первого шара ко второму. Тогда отрезки AB и AH , или равный и параллельный ему отрезок BD' , обращаются соответственно в AB' и $B'D'$, или равный и параллельный ему AH' , причем расстояние BB' получается, как это указано на фиг. 29. Чтобы получить путь своего шара после второго удара для всех положений точки T' второго удара, нужно построить окружность на AB' , как на диаметре, и провести хорду AB'' , которая представляет скорость V после второго удара и служит

вместе с AH' для нахождения путем обычного построения конца L параболы.

Хотя трение между шарами является почти неощутимым, бывают случаи, когда нужно и его принять во внимание, а именно, когда удар имеет место очень близко от тыльной точки и когда свой шар, ударяя чуть раньше или чуть позже начала состояния скольжения, почти совершенно не имеет вращательной скорости и, таким образом, теряет при ударе почти всю свою поступательную скорость. В таком случае трение очень заметно влияет на эту скорость, которая становится очень малой.

Так как при учете трения метод не становится более сложным для какого угодно случая, то мы даем здесь общее построение (фиг. 17). Пусть AD представляет скорость V шара в мгновение удара, а AF — скорость верхней точки, которая равна $\frac{5}{2}AH$. Далее, T представляет точку удара на круге ABD , рассматриваемом как большой круг шара. Как и на предыдущих чертежах, строим хорду AB , стягивающую дугу вдвое большую, чем AT . Затем описываем окружность DCA' на диаметре $DA' = DA + f \cdot DA$, где f — коэффициент трения. На FD , как на диаметре, описываем окружность FKD , проводим соединяющую прямую DB , которая пересекает круг DKF в точке K , и продолжаем линию DB до пересечения в G с окружностью DGA' . Затем на прямой AB с той стороны, где был дан удар кием, откладываем длину AC , равную $\frac{5}{2}V_2 \frac{h}{R}$; она будет равна ординате PR кривой $ORR'R''$ (фиг. 6), если положить $l = R$, причем абсциссы OP , OP' представляют расстояние h . Соединив K с C , через точку B проводим линию BB'' , равную BG , по направлению, параллельному тому, которое идет от K до C . Полученную точку B'' надо подставить вместо B для того, чтобы прямая HB'' дала направление финального пути шара с учетом трения. Очевидно, что при прямом вращении действие трения увеличивает финальное отклонение.

Если хотим получить всю описанную кривую и крайнюю точку L , через которую проходит финальное направление

шара, то нужно будет получить в отдельности обе скорости, V и v , после удара, иными словами, нужно будет узнать, во что обратятся скорости AB и AH . Для этого проектируем B' на AB в точку B'' ; достаточно будет подставить B' вместо B , и AB' будет новая скорость, которую надо будет подставить вместо AB . Для получения новой скорости AH точку H перенесем в H' на длину HH' , равную и параллельную $B''B$ и в направлении от B'' к B' , иными словами, в том, которое будет приближать H к AB .

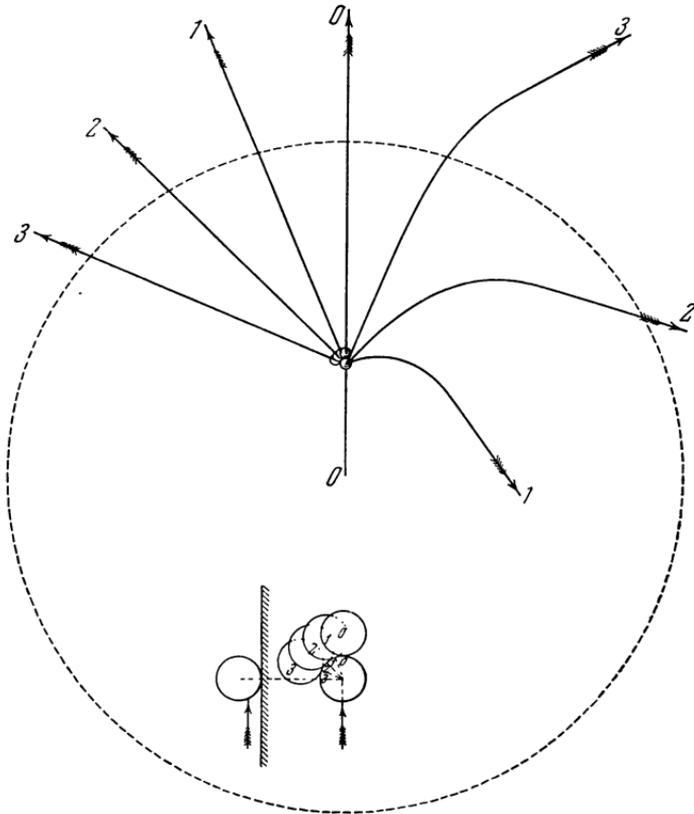
Фигура 18 показывает, во что превращается это построение, если вращение является обратным и точка H будет, таким образом, внутри круга диаметром AD . В этом случае действие трения будет уменьшать финальное отклонение. Таким образом, вообще, при всяком направлении вращения трение между шарами уменьшает эффект вращения, то есть уменьшает угол, который финальное направление образует с начальным.

Что касается движения противостоящего шара, то при учете трения (фиг. 20) его финальный путь будет параллелен DB'' . Кривизна описываемой им траектории будет всегда незаметной, так как финальное направление образует с начальным малый угол высшего порядка по сравнению с тем, который это начальное направление образует с направлением нормали BD в точке удара.

Очевидно, что если точка T удара очень близка к тыльной точке A , то свой шар идет со стороны направления CK , мало отличающегося от CF , иными словами, свой шар идет в ту сторону, откуда был нанесен удар кием, а противостоящий шар — в противоположную.

Если удар происходит после первого удара, уже изменившего AH'' (фиг. 19) в AH и AD в AD' , и если расстояние между двумя шарами, получившими удар, невелико, так что в мгновение второго удара скорости еще остаются равными AH и AD' , то, основываясь на этих данных, делаем то же самое построение, что и раньше; только точку F заменяем точкой F' , взятой на продолжении AH и на прямой FF' , перпендикулярной к AD' . Точку K получим, опустив из F' на $D'B$ перпендикуляр $F'K$, и CK , как и выше, будет направлением, в котором нужно отложить $BB'' = BG$.

Если второй удар происходит не очень близко к первому, но ранее того мгновения, когда свой шар перешел в финальное состояние и, следовательно, в то время,



Фиг. 31.

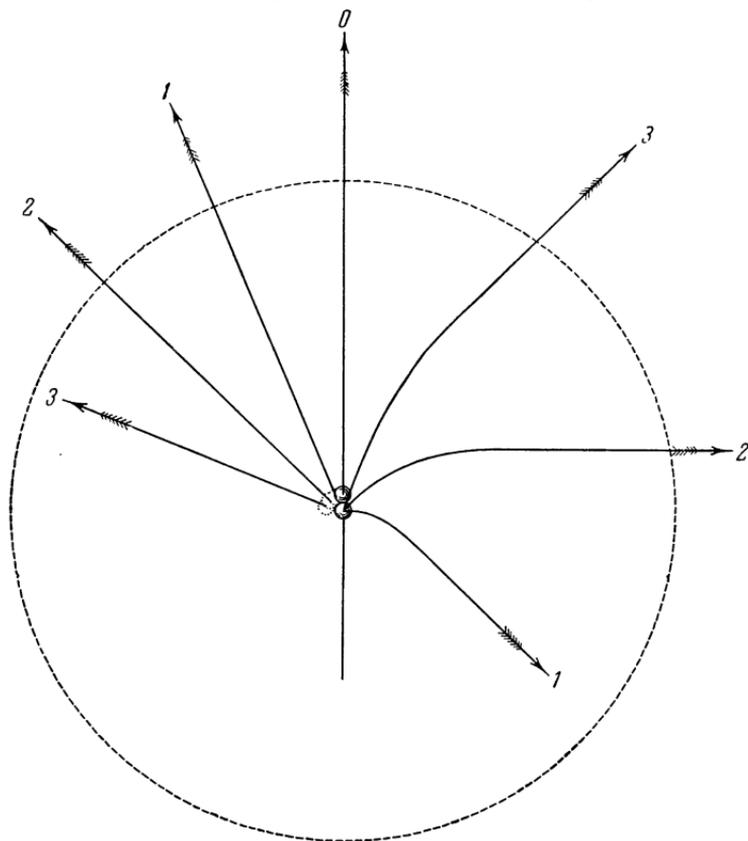
когда шар еще движется по кривой, то скорости AN' и AB' изменятся в течение соответствующего промежутка времени; их определяем для мгновения второго удара сообразно построению фиг. 29, а затем поступаем, как показано на фиг. 17.

Фигура 31 показывает в масштабе 0,01 ход своего шара после первого удара, когда удар кием был дан го-

ризонтально, но ниже центра, при следующих данных 1):

$$\frac{V_0^2}{2g} = 2,00 \text{ м или } V = 6,27 \text{ м/сек, } \frac{l}{M} = 0,40R;$$

$$V_1 = 3,24 \text{ м/сек и } v = -2,00 \text{ м/сек.}$$



Фиг. 32.

В этом случае $\frac{V_1^2}{2g} = 0,535$ и, следовательно,

$$y_0 = 1,80 \text{ м, } y_2 = 1,97 \text{ м.}$$

1) В русском издании фигуры 31, 32 и все последующие даны в масштабах, измененных по сравнению с масштабами подлинника. (Прим. ред.)

Предполагается, что соударение обоих шаров произошло очень близко от исходной точки, где был дан удар кием.

Построения сделаны для случаев, когда точка удара отстояла на одну, две и три четверти прямого угла от тыльной точки. На этой и последующих фигурах соответствующие пути шара отмечены цифрами 1, 2, 3.

Фигуры 32, 33, 34, 35 и 36 показывают путь своего шара после его удара о другой шар в предположении, что удар кием остается таким же, но место на бильярдном сукне, где происходит удар, последовательно удаляется от игрока и, значит, расстояние y возрастает.

На фиг. 32 и 33 расстояние y еще не является достаточно большим для того, чтобы вращение в мгновение удара было непременно прямым.

На фиг. 34 удар совершается в состоянии скольжения, то есть на расстоянии $y = 1,80$ м от исходной точки; в этом случае не имеется криволинейной части траектории.

На фиг. 35 удар имел место между состояниями скольжения и конечным, иными словами, для значений

$$1,80 \text{ м} < y < 1,97 \text{ м}.$$

На фиг. 36 удар произошел в финальном состоянии иными словами, для

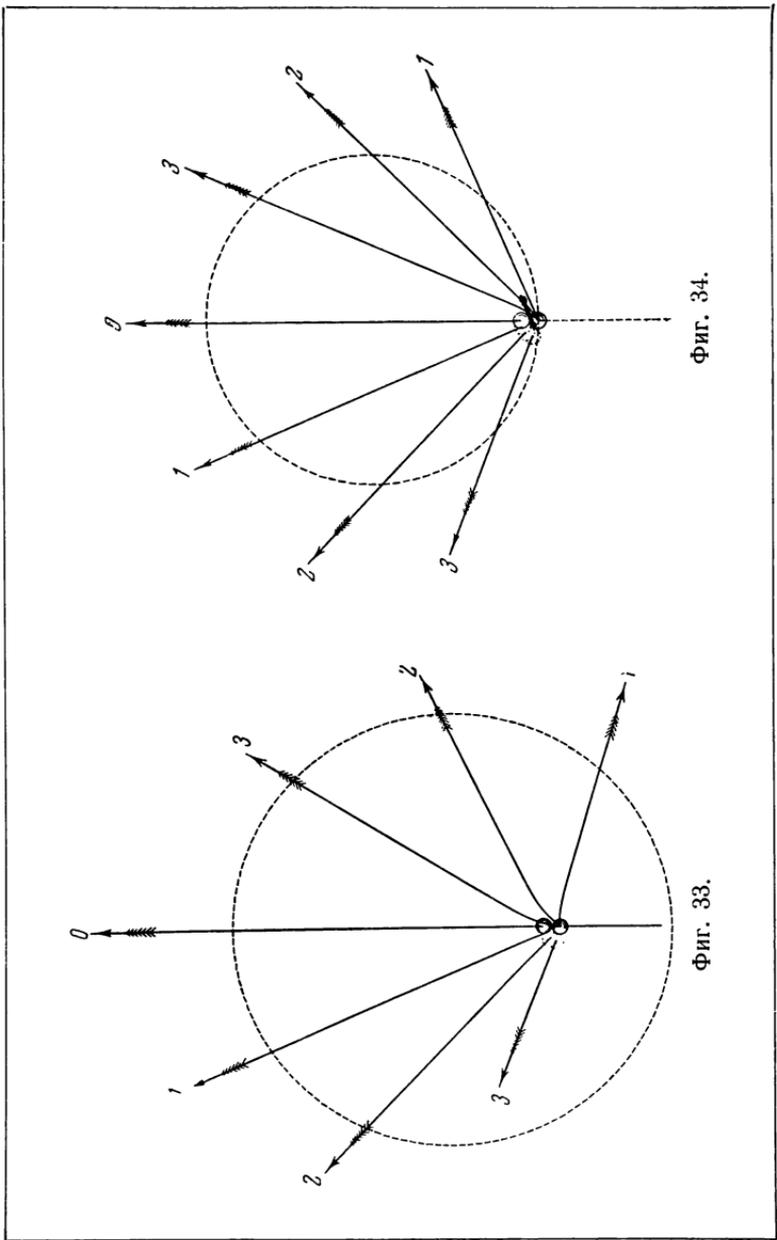
$$y \geq 1,97 \text{ м}.$$

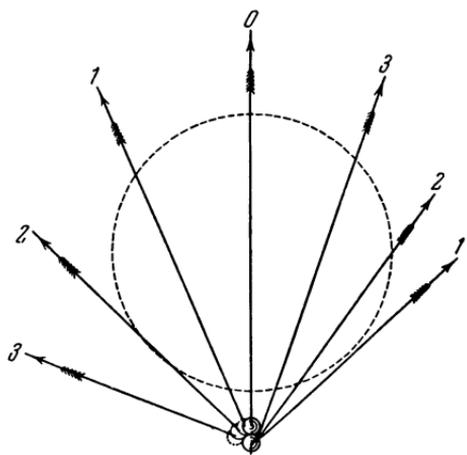
Фигура 37 показывает пути своего шара, в случае когда удар кием был дан выше центра на расстоянии, равном половине радиуса, причем сила удара была такова, что в результате удара $V = 3,00$ м/сек и $v = 0,50V_1$; это соответствует удару кием, сообщающему центру шара скорость $V_0 = 4,26$ м/сек или $\frac{V_0^2}{2g} = 0,92$ м. Соударение

шаров предполагается происшедшим очень близко от отправной точки. Точки удара (контакта) выбраны, как и раньше, на противостоящем шаре через четверть прямого угла.

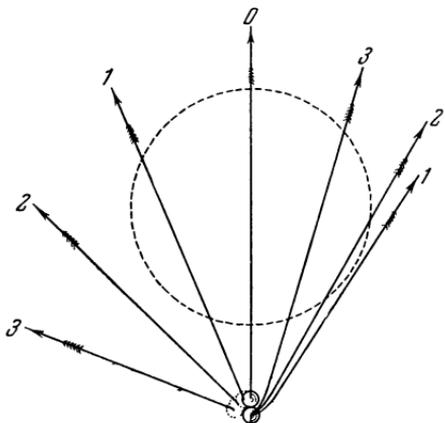
Фигура 38 показывает пути после удара своего шара о противостоящий, к которому свой шар подошел до финального состояния, то есть когда

$$y \geq 0,90 \text{ м}.$$

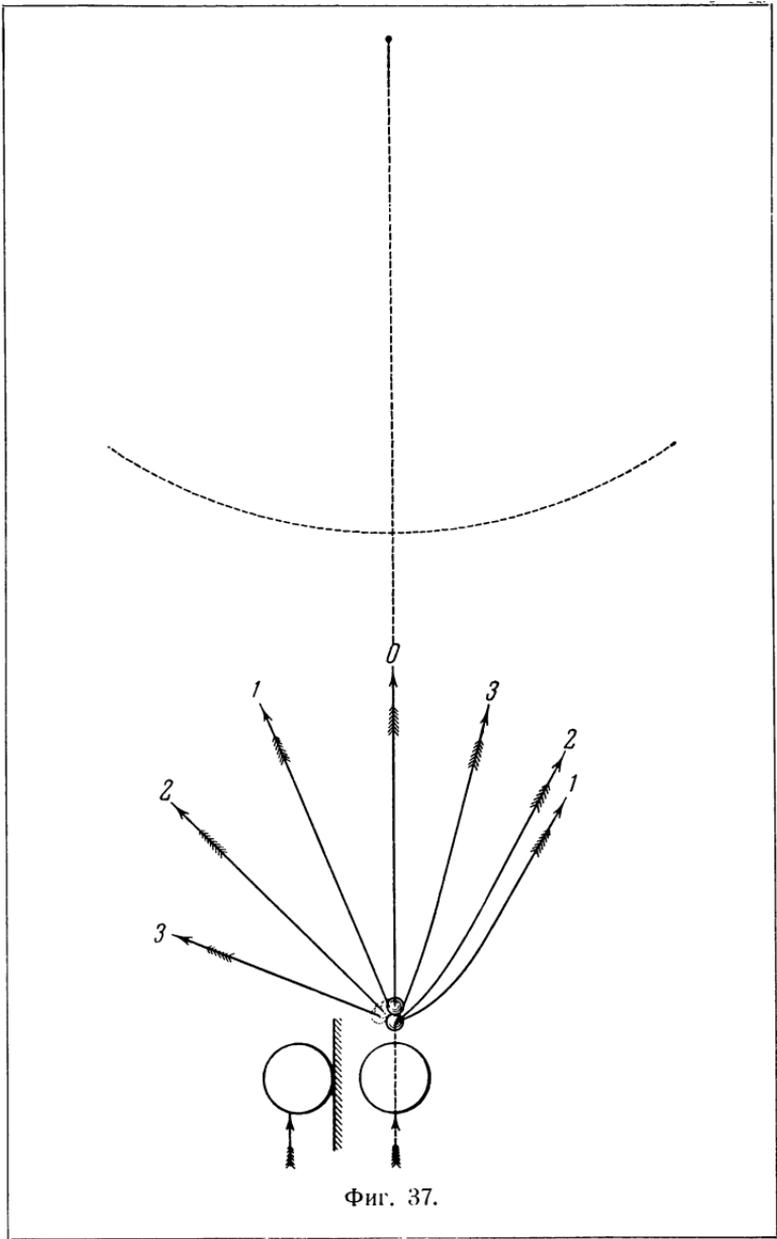




Фиг. 35.



Фиг. 36.



Фиг. 37.

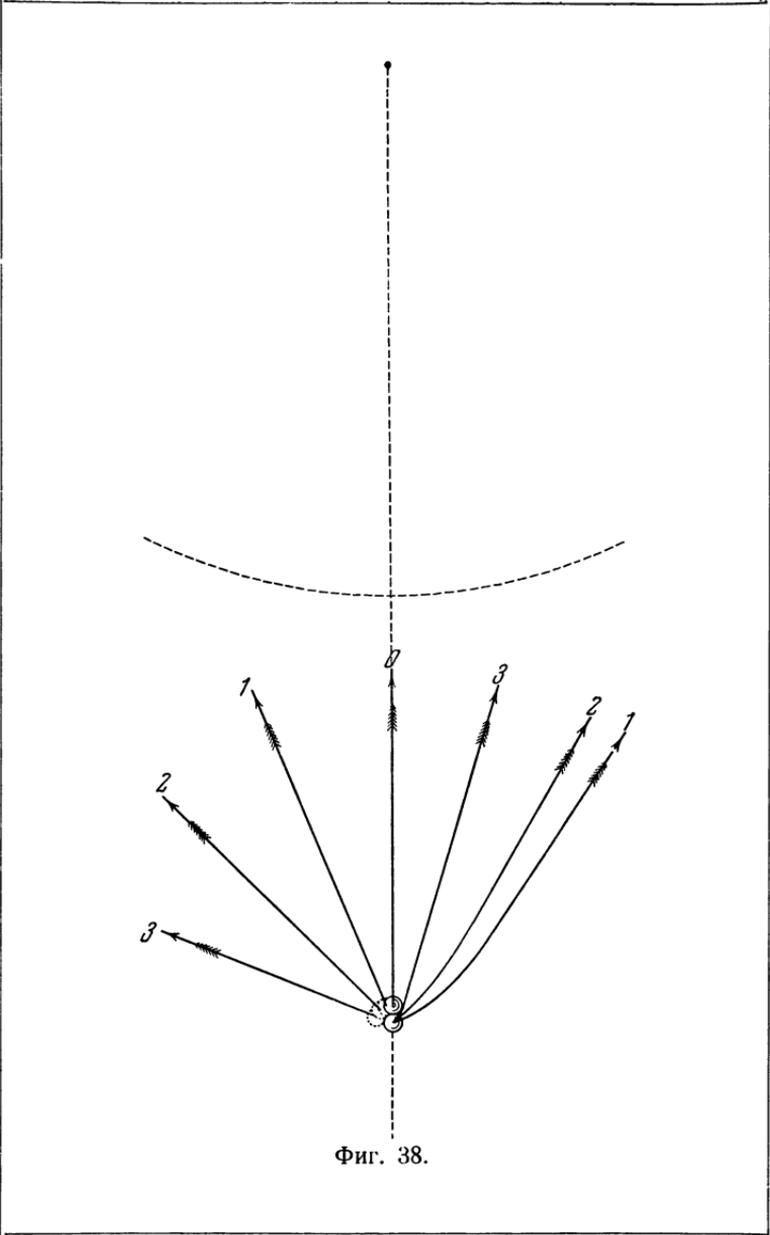
Этих примеров достаточно для того, чтобы показать характер путей шара и также чтобы обнаружить, каким образом меняется размер описанных кривых с изменением скоростей V и v в мгновение удара. Не следует забывать, что эти кривые будут тем менее резко выражены, чем меньше будет v , и что они при $v=0$ исчезнут совсем, то есть траектории превратятся в прямые линии.

Окружности на всех фигурах от 31 до 38 включительно служат для того, чтобы, проводя к ним радиусы-векторы из центра своего шара в мгновение удара, получать направления финального пути этого шара. Так как точки удара (контакта) взяты через каждую четверть прямого угла, то эти радиусы-векторы надо проводить для четырех четвертей полукруга. Точки H фиг. 8, 9 и 10 перенесены в центр своего шара для мгновения удара; следовательно, соответствующие чертежи надо поднять или опустить на высоту AH , для того чтобы параллели финальным путям выходили из центра шара, вместо того чтобы выходить из передней или задней точки, как на фиг. 8, 9 и 10.

Фигуры с 39 по 54 включительно относятся к пути своего шара, когда после удара в один шар он ударяет в другой, находясь еще в неустановившемся состоянии и двигаясь по кривой линии.

Фигуры 39, 40, 41, 42 и 43 относятся к путям своего шара в тех случаях, когда удар кием был дан очень низко. Они отложены в масштабе $0,05 \mu$ для 1μ и в предположении, что в мгновение удара шаров $V=3,24 \mu/\text{сек}$ и $v=2,00 \mu/\text{сек}$, иными словами, они соответствуют первому удару, аналогичному тому, который был показан на фиг. 31. Первый удар соответствует точке удара (контакта), расположенной на четверти прямого угла от тыльной точки, и описанная кривая представляет кривую I фиг. 31.

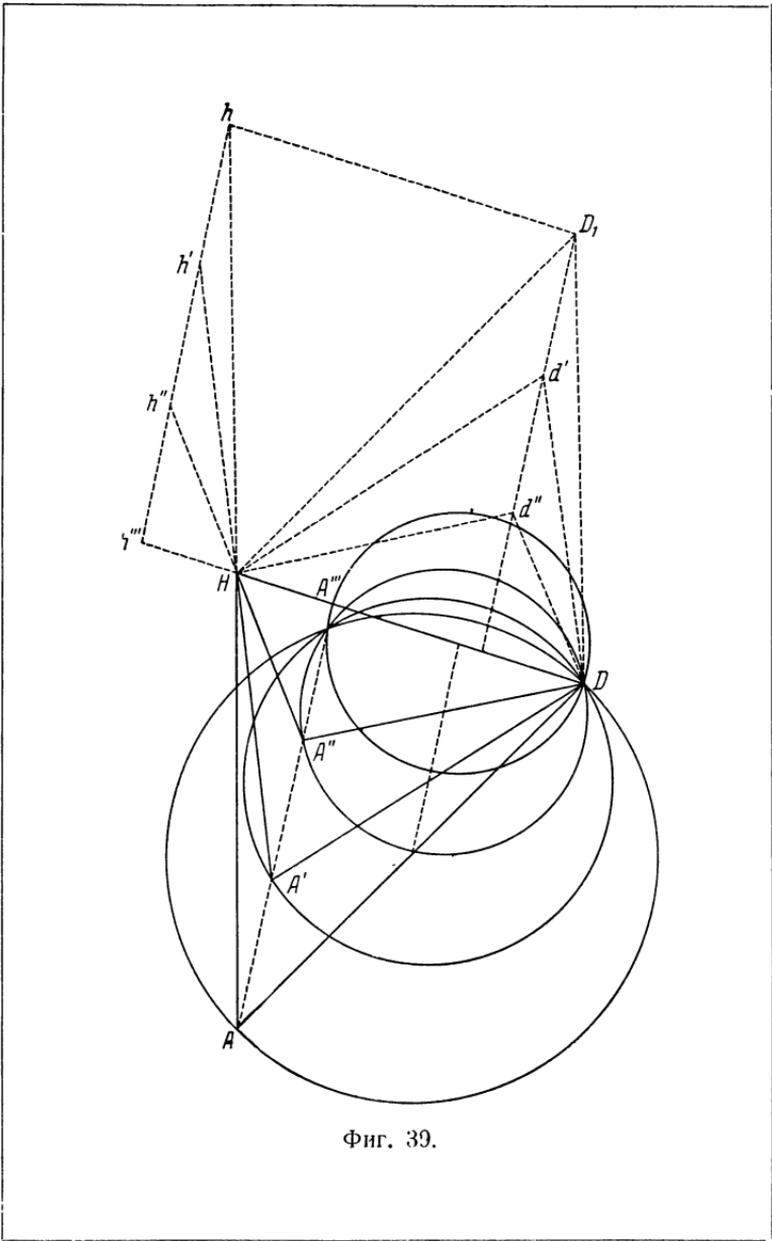
Если в заданной точке траектории свой шар ударяет другой шар в той или иной его точке, то дальнейший его путь зависит от того, в какой именно точке произошло соударение шаров. Чтобы получить эти пути своего шара, надо сначала описать окружность на его скорости V , как



Фиг. 38.

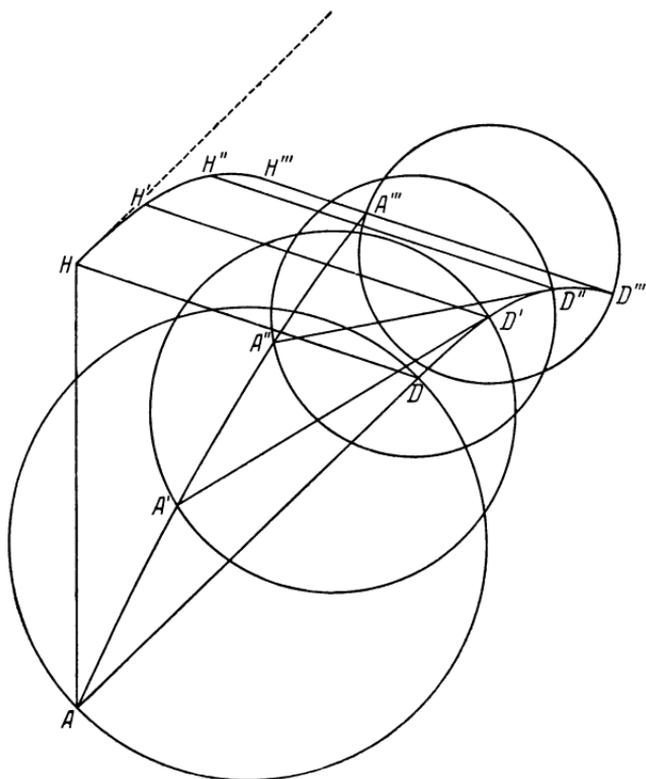
на диаметре, и провести радиусы-векторы, начиная от точки H , или, что еще более удобно, предположить, что точка H перенесена в центр шара, как это сделано на фиг. 39. Тогда нужно будет описать круг на скорости AD , а точка H будет оставаться в центре своего шара. Чтобы повторить это построение для различных точек пути шара, придется сначала рассмотреть, как изменятся основные величины V и v , или AH и AD , во время движения шара по кривой линии; это сделано при помощи построений, показанных на фиг. 1 и 4, перенесенных на фиг. 39. На ней описано несколько различных кругов, к которым нужно будет проводить радиусы-векторы из точки H ; эта точка в данном случае является центром движущегося шара. На фиг. 40 эта точка H помещена на описанной кривой; различные финальные пути своего шара должны быть направлены по касательным параллельным радиусам-векторам, проведенным из точек H , H' , H'' , H''' к окружностям с диаметрами AD , $A'D'$, $A''D''$, $A'''D'''$, концы $DD'D''D'''$ которых будут на кривой $HH'H''H'''$, описанной шаром. В том случае, когда скорости не слишком велики, так что криволинейные части траекторий имеют небольшое протяжение, рассматриваемые пути будут мало отличаться от самих радиусов-векторов.

В случае, соответствующем вышеуказанным фигурам, вторые пути будут всегда обратными, потому что круги находятся ниже точек H . Эти пути изображены на фиг. 41, 42 и 43 для случая, когда второй удар имеет место в точках H' , H'' и H''' описанной кривой. На фиг. 43 предполагается, что свой шар находится в H''' , на самом конце криволинейной части траектории, и таким образом уже будет в финальном состоянии. Кривые 1, 2, 3 соответствуют точке удара (контакта), расположенной на расстоянии одной, двух, трех четвертей прямого угла направо от своего шара, а кривые 1', 2', 3' построены в предположении, что точка удара (контакта) расположена аналогичным образом слева. Линия, отмеченная индексом 0, будет всегда прямой; она предполагает, что точка удара находится в тыльной точке. Кривая 4 построена в предположении, что свой



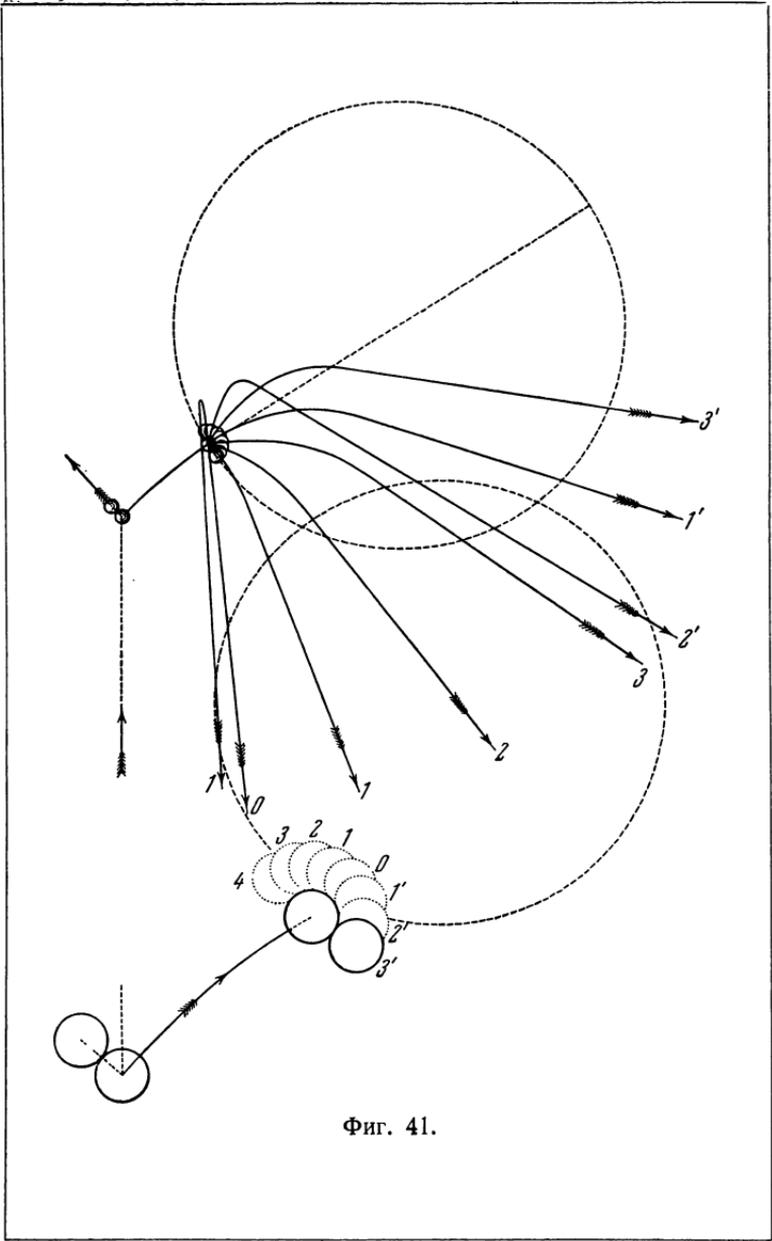
Фиг. 39.

шар прошел мимо самого края противостоящего шара, однако не прикасаясь к нему; таким образом, эта кривая будет продолжением параболы, описанной шаром между первым и вторым ударами.



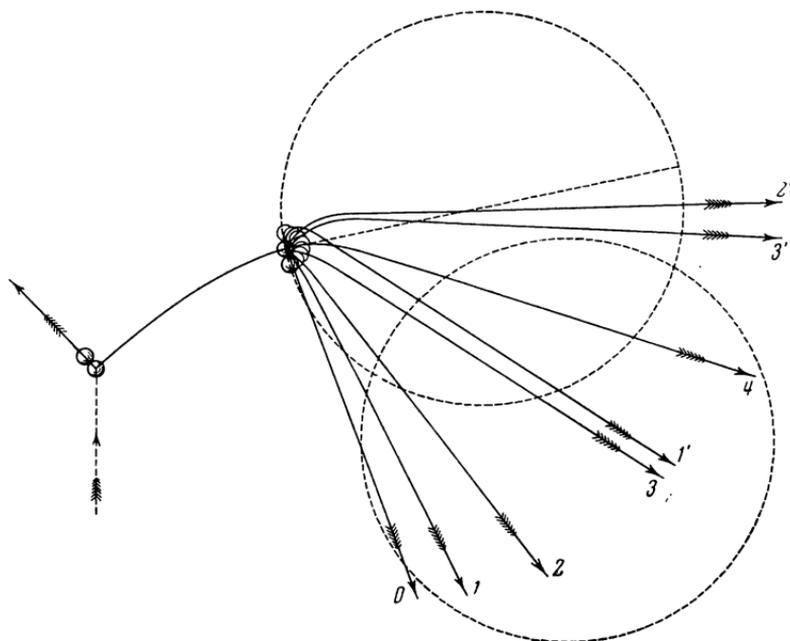
Фиг. 40.

На фиг. 44 и 45 изображены построения, аналогичные построениям фиг. 37 и 38. Они относятся к случаю, когда первый удар имел место при обстоятельствах фиг. 32; точка этого первого удара находится на расстоянии одной четверти прямого угла от тыльной точки и криволинейная часть траектории соответствует кривой \mathcal{Z}



Фиг. 41.

на фиг. 32. В этом случае центр шара, в который была перенесена точка H , будет в мгновение отправления в путь находиться внутри соответствующего ему круга; к нему и надо проводить радиусы-векторы из точки H для получения конечных направлений. Эта точка H будет затем находиться

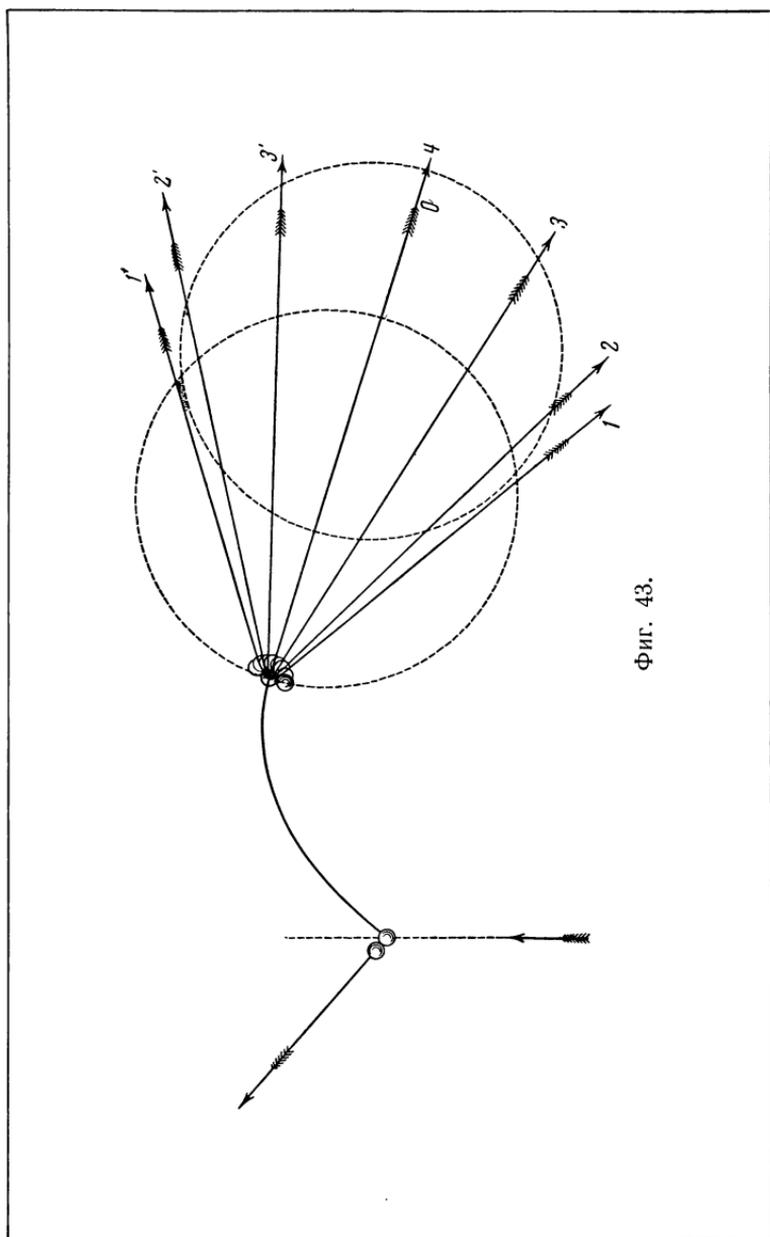


Фиг. 42.

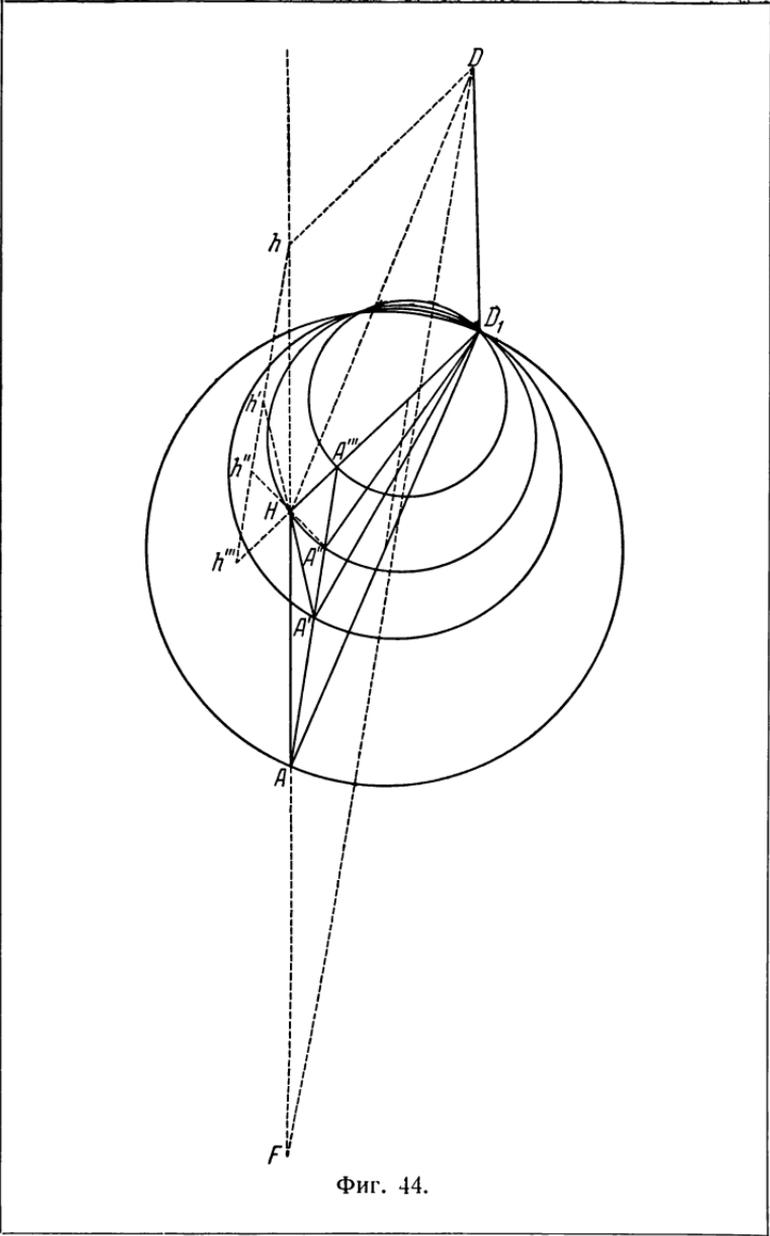
на самой окружности, наконец, она выйдет из пределов круга и будет находиться вне его. Точка H находится на соответствующей окружности, когда угол $A''HD$ прямой; такое положение отмечено на данных фигурах.

Фигуры 46, 47 и 48 представляют пути своего шара, когда он, описывая кривую $HH'H''H'''$ фиг. 45, встречает другой шар различным образом, то есть касаясь его в восьми указанных точках.

На фиг. 47 изображен случай, когда кривые перестают принимать все возможные направления и начинают направляться в одну сторону.



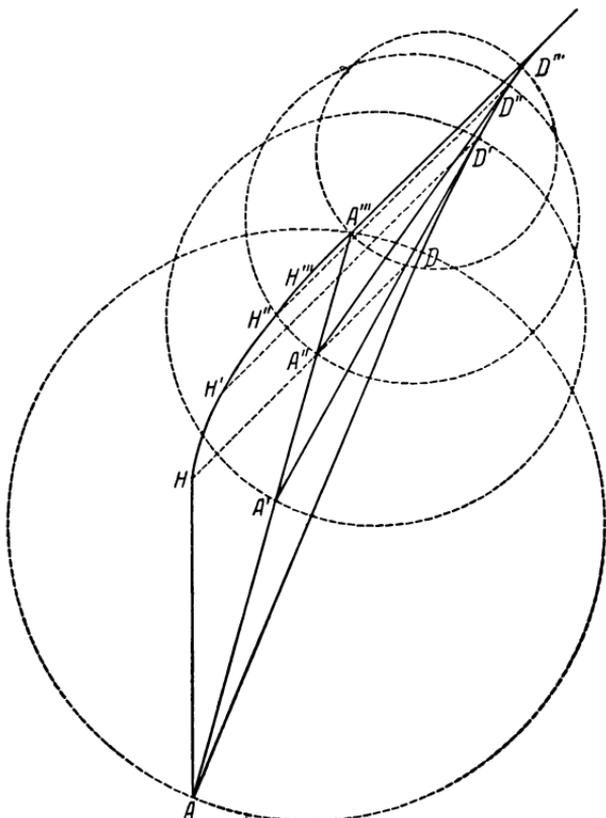
Фиг. 43.



Фиг. 44.

На фиг. 48 второй удар имеет место в финальном состоянии.

Фигуры 49 и 50 являются аналогичными 44 и 45; первый удар имел место, как на фиг. 38, то есть в финаль-



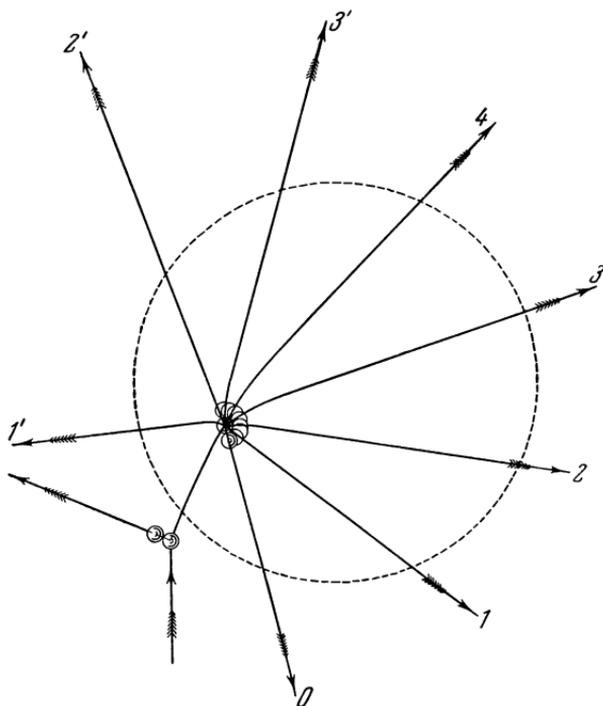
Фиг. 45.

ном состоянии со скоростями $V = 3,24$ м/сек и $v = \frac{2}{5} V$; описанная кривая представляет кривую 1 фиг. 38.

Фигура 51 представляет кривые, описанные при втором ударе, очень близком к первому.

Фигуры 52 и 53 тоже соответствуют 49 и 50, но они относятся к кривой 2 фиг. 38.

Фигура 54 показывает пути после второго удара, происшедшего при прохождении этой кривой 2.



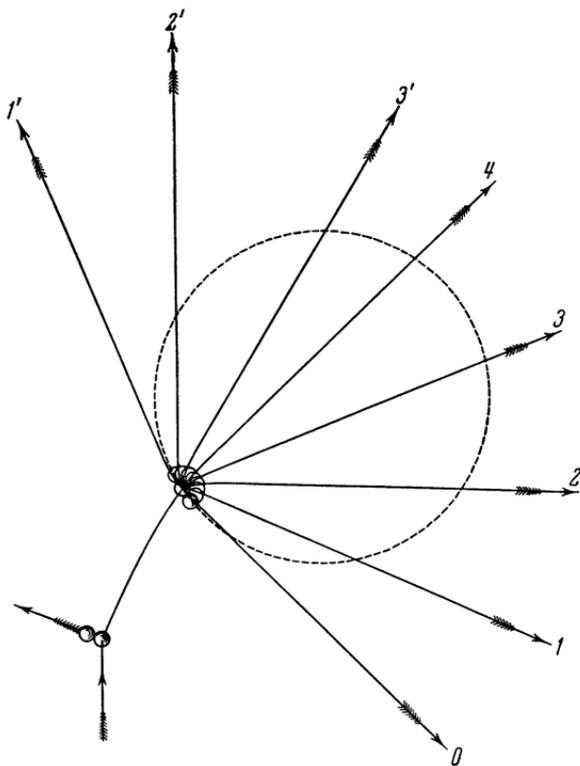
Фиг. 46.

На фиг. 55 изображены пути шаров с учетом трения между ними в зависимости от того, будет ли дан удар кием в вертикальной плоскости центра, или же направо, или налево от него на расстоянии $h=0,25$ м от центра. Действие удара, данного справа, отмечено одним штрихом, удара, данного слева, — двумя штрихами; ход, отмеченный индексом 0, соответствует случаю, когда трение или совсем не принимается в расчет, или его действие равно нулю; последний случай сводится к предпо-

ложению, что удар нанесен справа на таком расстоянии от центра, что имело место равенство

$$V \cos \alpha = V_1 \frac{h}{\frac{2}{5} R}.$$

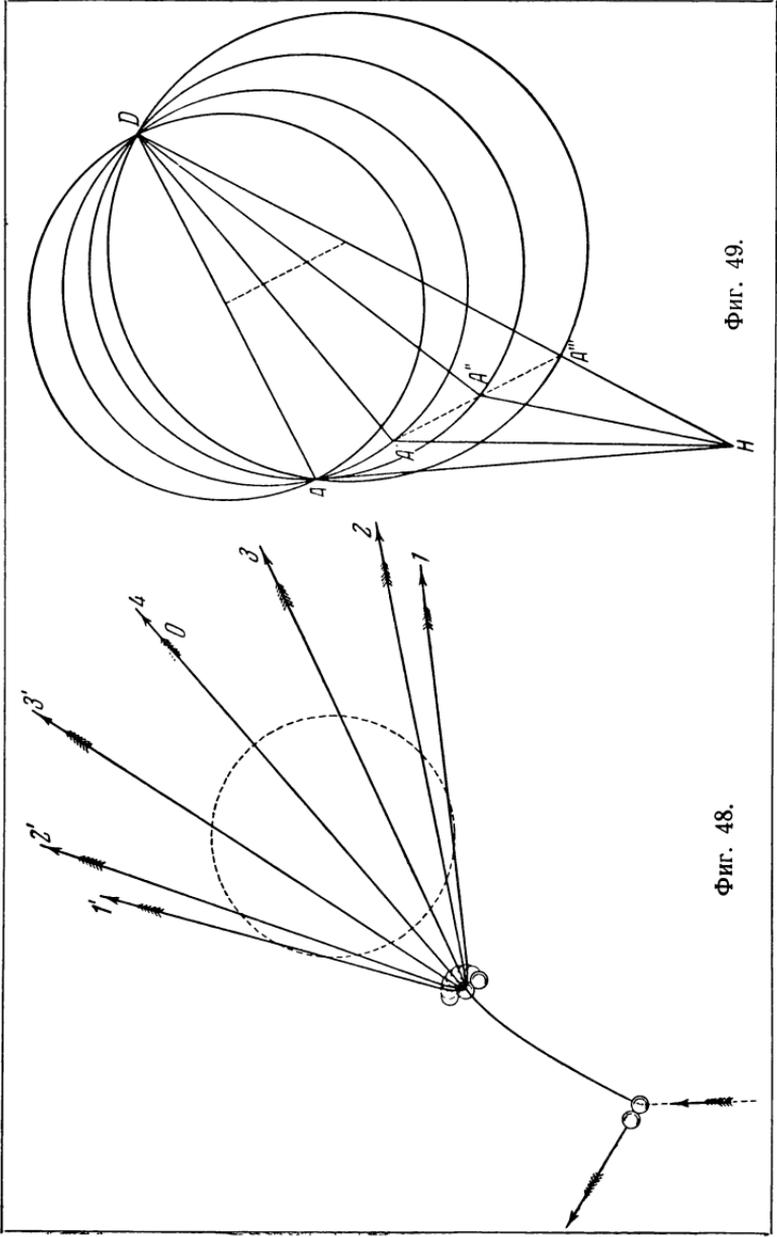
В случае фиг. 55 предположено, что коэффициент трения равен 0,05; таким образом, он принят ббльшим



Фиг. 47.

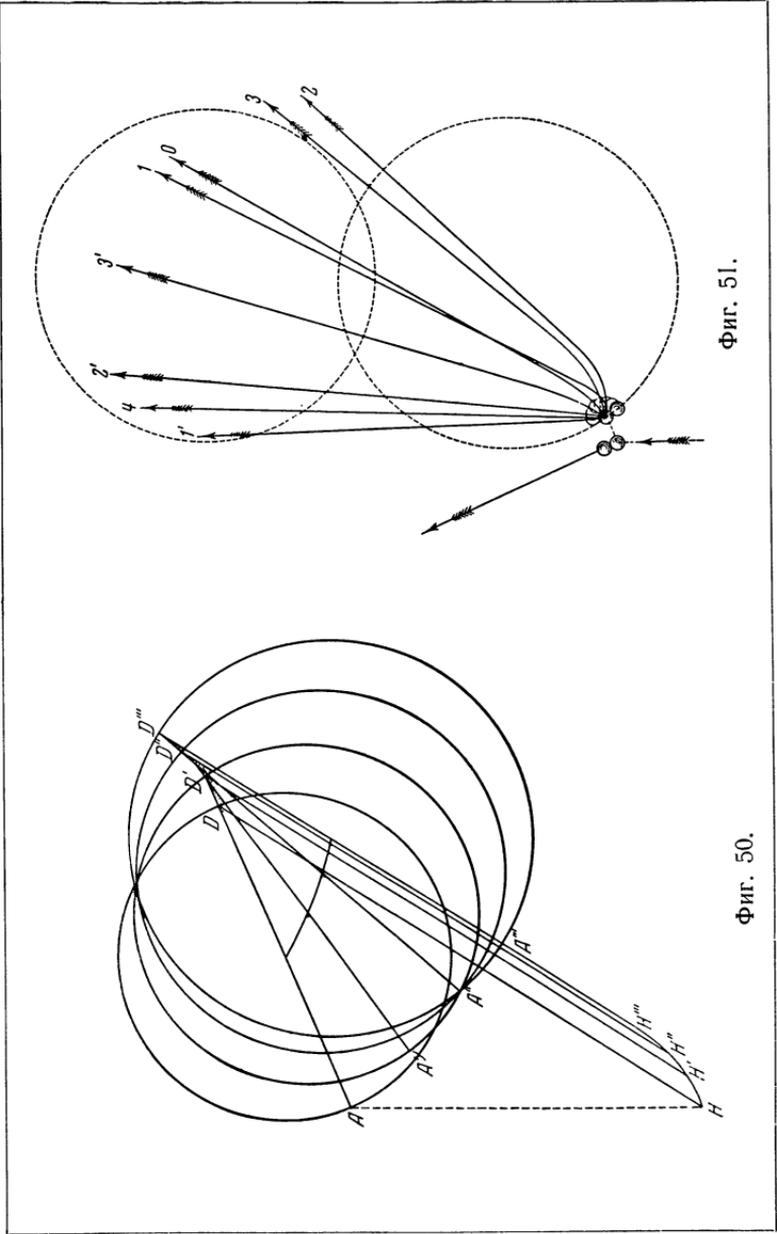
действительного, для того чтобы влияние трения было более заметным.

Фигура 56. показывает подобное же влияние при ударе в финальном состоянии, как это было принято на фиг. 38.



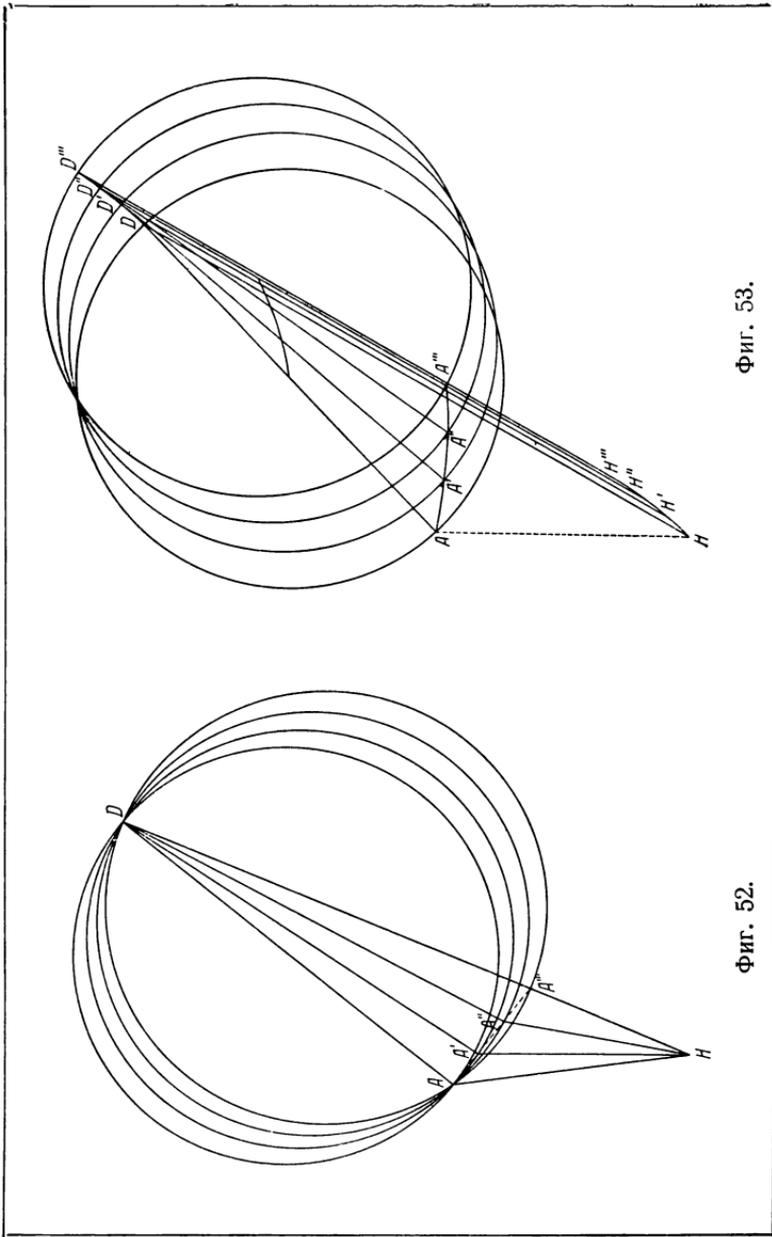
Фиг. 49.

Фиг. 48.



Фиг. 51.

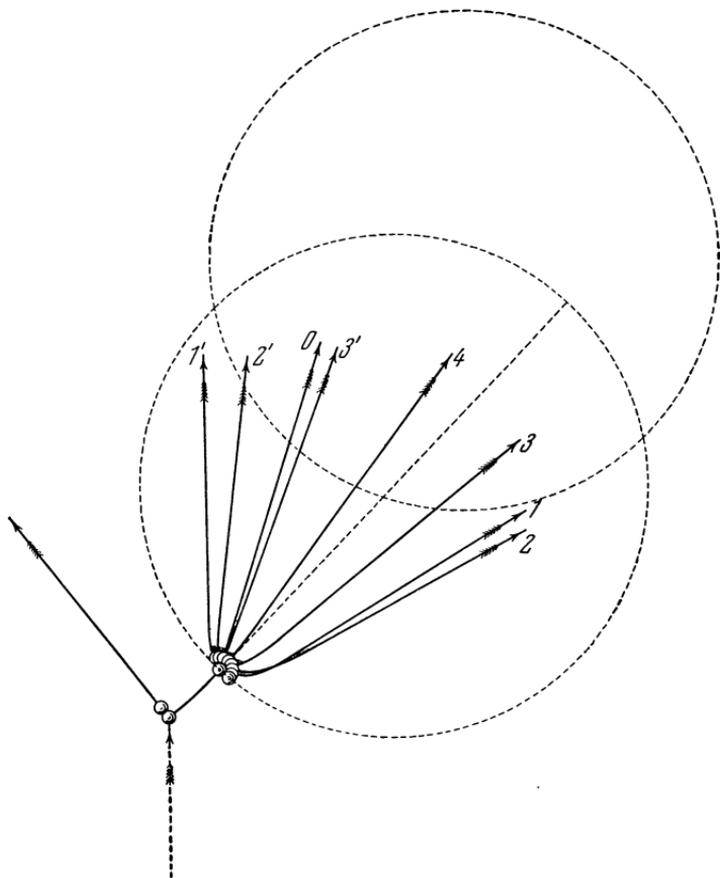
Фиг. 50.



Фиг. 53.

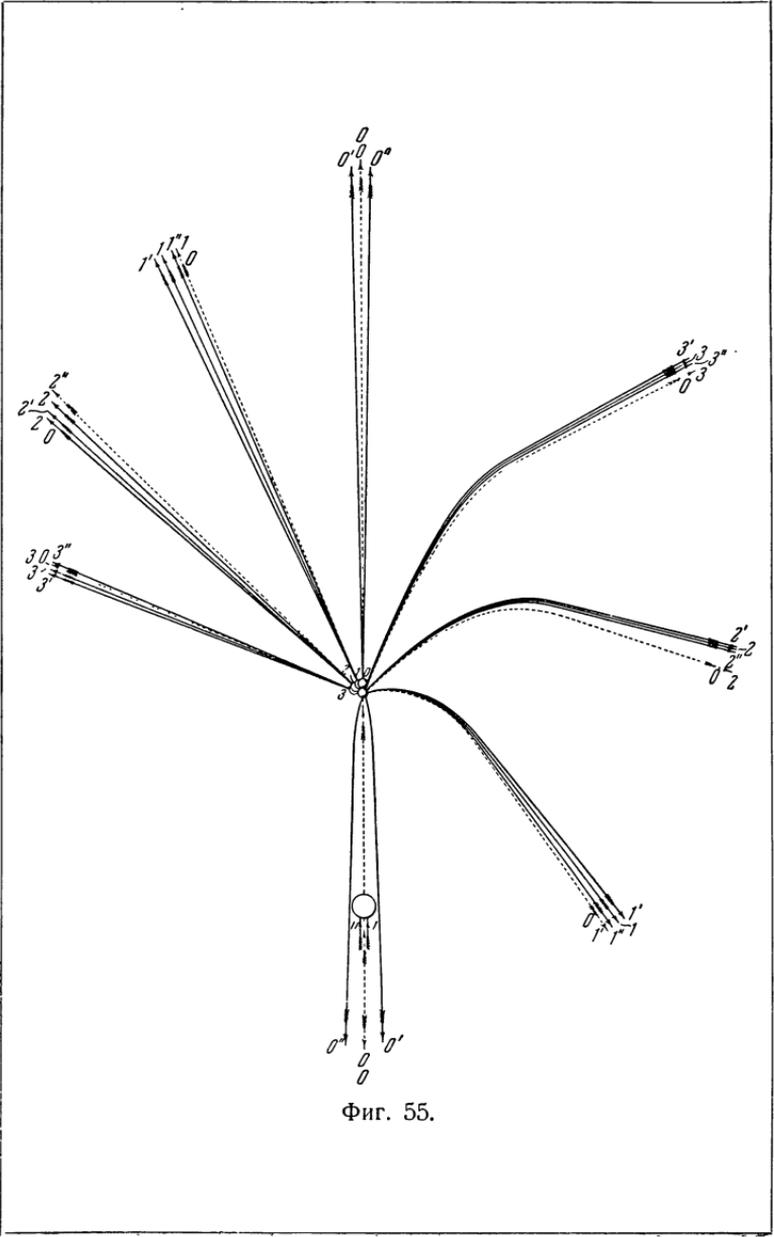
Фиг. 52.

В то же самое время на обеих этих фигурах можно видеть пути противостоящего шара при учете трения; они мало отличаются от нормали в точке удара. Трение

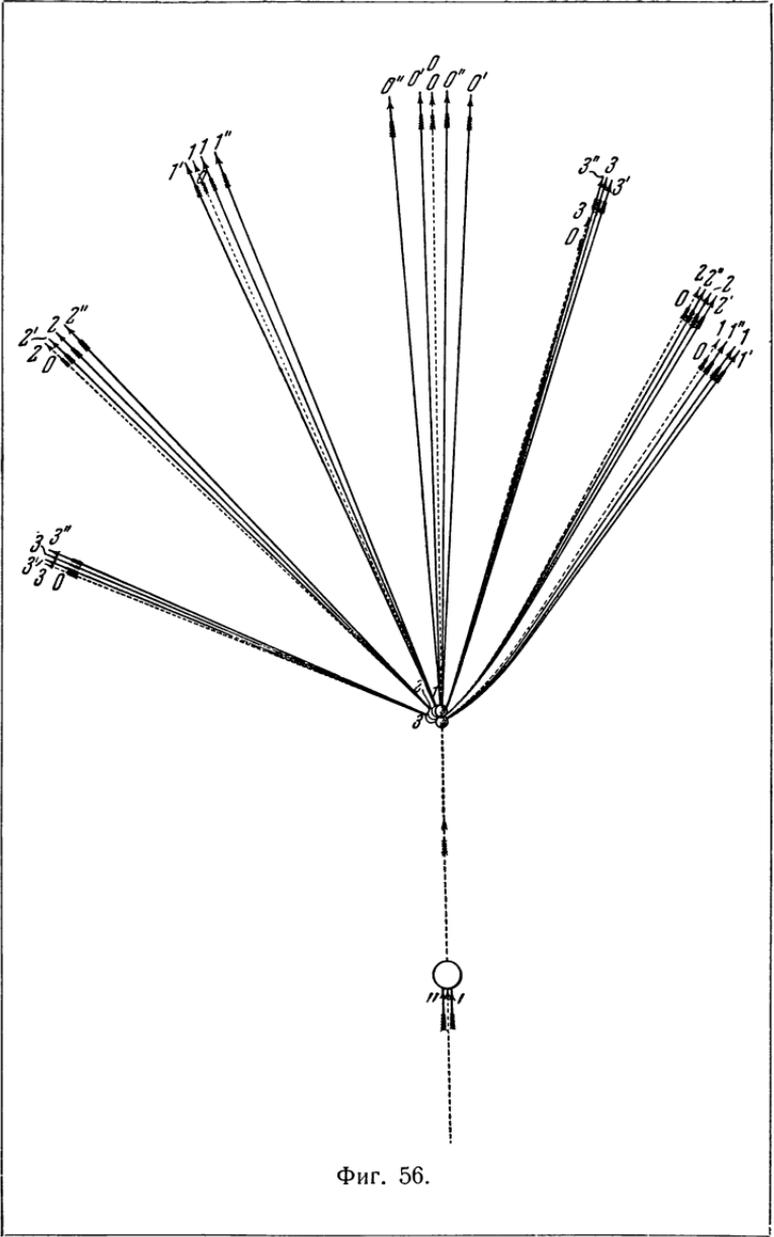


Фиг. 54.

все время принималось равным 0,05 давления, тогда как в действительности оно не превышает 0,03; таким образом, его влияние на пути шаров немного усилено, чтобы его можно было показать более отчетливо.



Фиг. 55.



Фиг. 56.

Нужно иметь в виду, что финальные направления, дающиеся на всех чертежах, иллюстрирующих приложение теории, останутся без изменений для тех же самых отношений по величине и по направлению между обеими скоростями V и v (то есть AB и AH) в мгновение удара; что же касается размеров криволинейных частей траекторий и, следовательно, положений финальных путей, то они не будут меняться пропорционально скоростям, но скорее пропорционально их квадратам, или площадям треугольников, заключенных между скоростями.

Таким образом, в случае очень сильных ударов кием размеры кривых, изображенных на этих фигурах в масштабе 0,05 и построенных для слабых ударов кием, сделаются гораздо более значительными, хотя по существу все остается без изменений. Поэтому, для изображенных путей шара, получившего удары кием различной силы, нужно было бы изменить эти кривые, что повлекло бы за собой необходимость очень значительного количества чертежей. Приведенные в этом труде примеры не имеют своей целью показать все пути, скорее их цель заключается в том, чтобы дать представление об их разнообразии.

Все эти кривые после второго удара, так же как кривые, описанные после первого удара, уменьшают свои размеры вместе со скоростью вращения и исчезают совершенно, когда удар имел место в состоянии скольжения, то есть когда $v=0$.

Все пути, изображенные на фигурах от 31 до 54 включительно, построены в предположении, что влиянием трения между шарами можно пренебречь. Это не влечет за собой существенных ошибок, как можно видеть на фиг. 55 и 56, где это влияние учтено даже в большей степени, чем оно имеется в действительности.



ДВИЖЕНИЕ ШАРА ПОСЛЕ ПЕРВОГО ИЛИ ВТОРОГО УДАРА О БОРТ

Предположим сначала, что шар подходит к борту, получив горизонтальный удар кием; пусть AU' (фиг. 21) представляет параллельную борту прямую, проведенную через центр шара в мгновение удара; пусть AD будет скорость V центра шара, а AH скорость v нижнего центра удара; эти величины AD и AH взяты согласно фиг. 4, б в зависимости от удара кием и расстояния от борта до той точки, где этот удар был нанесен.

Чтобы получить направление финального движения шара после удара, начинаем с того, что из точки D опускаем на борт перпендикуляр DOB и затем откладываем $OB = \epsilon \cdot OD$; таким образом, OB будет восстановленной при ударе о борт нормальной составляющей скорости, заменившей потерянную скорость OD ¹⁾. Направление скорости шара после удара совпало бы с прямой, идущей от точки A к точке B , если бы не влияло трение между шаром и бортом во время удара. Чтобы учесть это трение, перенесем точку B в B'' по направлению BB'' , которое будет сейчас указано. В качестве длины BB'' возьмем часть DB , соответствующую коэффициенту трения для удара о борт f_1 , так что $BB'' = f_1 DB$, так как опыты дали для f_1 величину 0,20, то $BB'' = \frac{1}{5} DB$. На-

¹⁾ Таким образом, потерянной скоростью (la vitesse perdue) Кориолис называет скорость до удара в отличие от общепринятого понимания этого термина в смысле, указанном Л. Карно. (Прим. перев.)

правление финального пути шара после удара будет совпадать с линией HB'' .

Чтобы получить направление прямой BB'' , опускаем из точки F на DO перпендикуляр FK , то есть проводим прямую, параллельную борту; затем на прямой AU берем расстояние AC , равное Rr , или $\frac{5}{2}V_1\frac{h}{R}$, то есть горизонтальной скорости точек горизонтального экватора шара. При $l=R$ эта скорость при помощи h выражается ординатой PR (фиг. 6), соответствующей абсциссе $OP=h$. Отрезок AC нужно отложить в ту сторону, с которой шар получил удар кием, иными словами, в сторону Y , если кий ударил справа от центра, и в противоположную, если кий ударил слева. Направление от K к C и будет тем же, что и направление прямой BB'' от B к B'' .

Если кроме направления HB'' финального хода необходимо получить конец L криволинейной части траектории — точку, через которую нужно провести параллель к этому направлению HB'' , чтобы иметь финальный путь, то возьмем проекцию BB' прямой BB'' на параллель к борту, затем перенесем H в H' на расстояние $HH'=B''B'$ в направлении, перпендикулярном к борту, приближаясь к нему, то есть всегда по направлению от B'' к B' отрезки AB' и AH' будут изображать скорости V и v движения после удара. Трение шара о борт переносит точки B и H в положения B' и H' .

Точку L — конец криволинейной части траектории — определяем обычным образом. Для этого достаточно обратиться к построению фиг. 1, заметив, что точка F этой фигуры получится, если взять AF' прямо противоположно AH' , причем $AF' = \frac{5}{2}AH'$, или, что сводится к тому же, продолжить $H'A$ до встречи с FF' , проведенной перпендикулярно к борту.

Для исследования второго удара о борт, после того как первый удар был сделан тоже о борт, понадобится значение горизонтальной вращательной скорости $R \cdot r$ точек горизонтального экватора, которая перед первым ударом

была $\frac{5}{2} V_1 \frac{h}{R}$. Эта скорость $R \cdot r$ в результате трения во время удара будет увеличена или уменьшена на величину BB' ; иными словами, чтобы получить новую величину AC' для подстановки вместо AC при втором ударе о другой борт, нужно перенести точку C в C' на расстояние $CC' = BB'$ в направлении от B' к B .

На фиг. 22 видно, что, поскольку вращательная скорость $R \cdot r$ направлена в противоположную сторону, то есть слева направо, то действие удара, передвинув точку C в C' , уменьшит эту скорость $R \cdot r$.

В том случае, когда удар происходит в финальном состоянии, точка K сливается с D и отрезок $АН$ становится равным $\frac{2}{5} AD$. Этот случай изображен на фиг. 23.

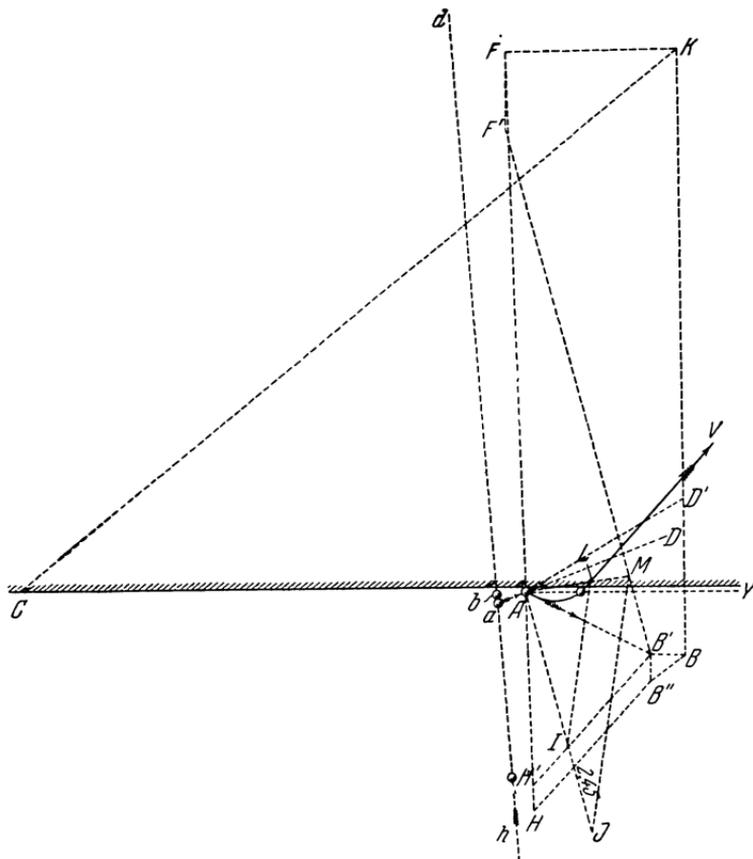
Удар шара будет всегда происходить в финальном состоянии, если удар кием дан так, чтобы вертикальная плоскость удара проходила через центр шара, то есть так, чтобы имело место равенство $h = 0$ и, следовательно, $AC = 0$; удар шара о борт происходит в финальном состоянии и точка C (фиг. 24) остается в A , а направление KC совпадает с направлением DA .

Если удар произошел при обратном вращении, то точки H и F располагаются так, что первая будет находиться за бильярдом, другая же на бильярде, построение производится совершенно так же, как показано на фиг. 25; точка K строится совершенно таким же образом, путем опускания перпендикуляра FK из F на продолжение DB .

Линия HB'' будет всегда представлять финальное направление движения шара, и $АН'$ и AB' будут элементами, которые служат для определения криволинейной части траектории и ее конца L .

Если свой шар коснется борта уже после удара о первый шар, причем достаточно близко от места первого удара, и в мгновение второго удара еще находился в неустановившемся состоянии, то элементы AD и $АН$, или AF , в мгновение удара о борт составят некоторый угол (фиг. 26). Продолжив отрезок $АН$ влево, возьмем

на нем точку F так, чтобы $AF = \frac{5}{2} AH$, и выполним то же самое построение, что и выше. Из F опустим перпендикуляр FK на продолжение DB , что даст точку K ,



Фиг. 57.

значение которой будет тем же самым, что и в предыдущих построениях.

Фигура 27 дает то же построение для удара о борт шара в неустановившемся состоянии в том случае, когда вращение будет обратным.

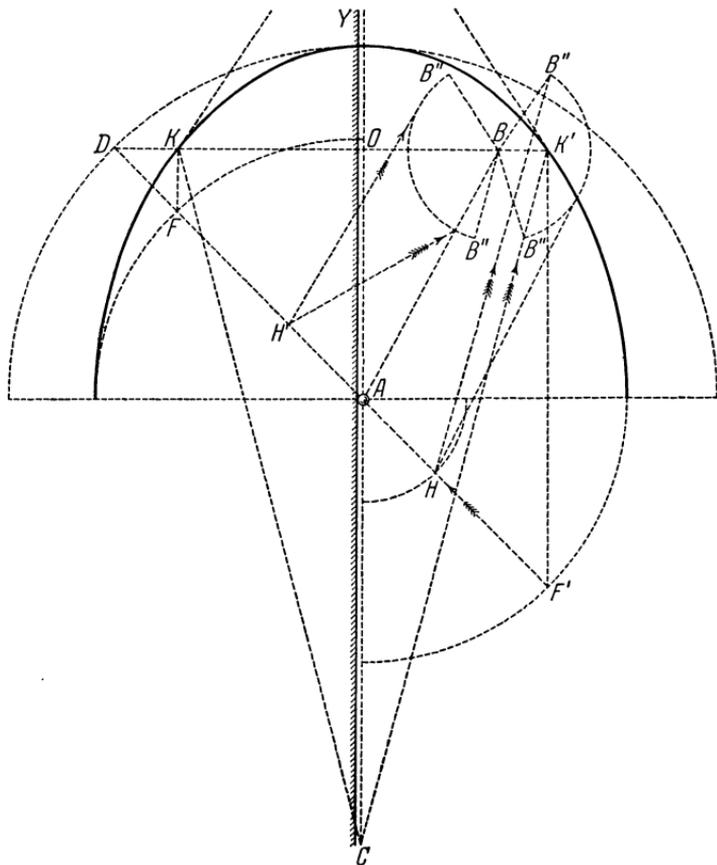
На фиг. 57 разобран тот же случай, что и на фиг. 26, но в предположении таких начальных данных, что свой шар возвращается и второй раз касается борта, находясь еще на криволинейной части пути AL . Эти данные: скорости $ah = v$, $ad = V$ и $R \cdot r = \frac{5}{2} V_1 \frac{h}{R} = AC$ в мгновение первого удара о шар. Этот первый удар изменяет ad в aD' , не меняя существенно ни ah , ни $AC = R \cdot r$, но в течение небольшого пути, который пробегает свой шар из a в A элементы ah и aD' немного изменятся и обратятся в AH и AD согласно построению фиг. 29. Удар о борт изменяет эти величины в AH' и AB' согласно построению, приведенному выше. Отыскивая конец L криволинейной части траектории согласно обычному построению, начерченному на этой фигуре, мы получаем эту точку L за бортом; таким образом, шар ударяет в борт еще второй раз, не окончив еще своего криволинейного пути. Для выполнения этих условий надо, чтобы AH была большой, то есть чтобы удар кием был нанесен выше центра шара и чтобы AC была достаточно большой и расположенной с той стороны, как это изображено на нашем чертеже, а для этого нужно, чтобы удар был нанесен слева от центра. Наконец, нужно, чтобы противостоящий шар, который должен был получить удар сначала, находился очень близко от борта, для того чтобы во время перехода от a в A до самого борта скорости ah и aD' не очень изменились бы.

Чтобы изучить второй удар о борт, надо действовать совершенно так же, как и в случае первого удара, с той лишь разницей, что при использовании подходящих величин скоростей AD , AF и AH надо иметь в виду то изменение, которое претерпела AC в результате первого удара. Новая длина AC , которая будет необходима в дальнейших построениях, получится, как уже было указано (фиг. 21 и 22), при помощи перемещения точки C в C' на длину $CC' = B'B$ в направлении от B' к B .

Покажем, каким образом при помощи тех построений, которые только что были указаны, можно исследовать влияние изменения некоторых элементов

движения шара до удара о борт на его движение после удара.

Если первоначально изменяются только те элементы, которые относятся к горизонтальному или вертикальному



Фиг. 58.

вращению, иными словами, если изменяются AN и AC (фиг. 58) без изменения скорости AD центра, то отсюда произойдет только изменение в положении точки H и в направлении отрезка BB'' ; точка B и величина BB' не

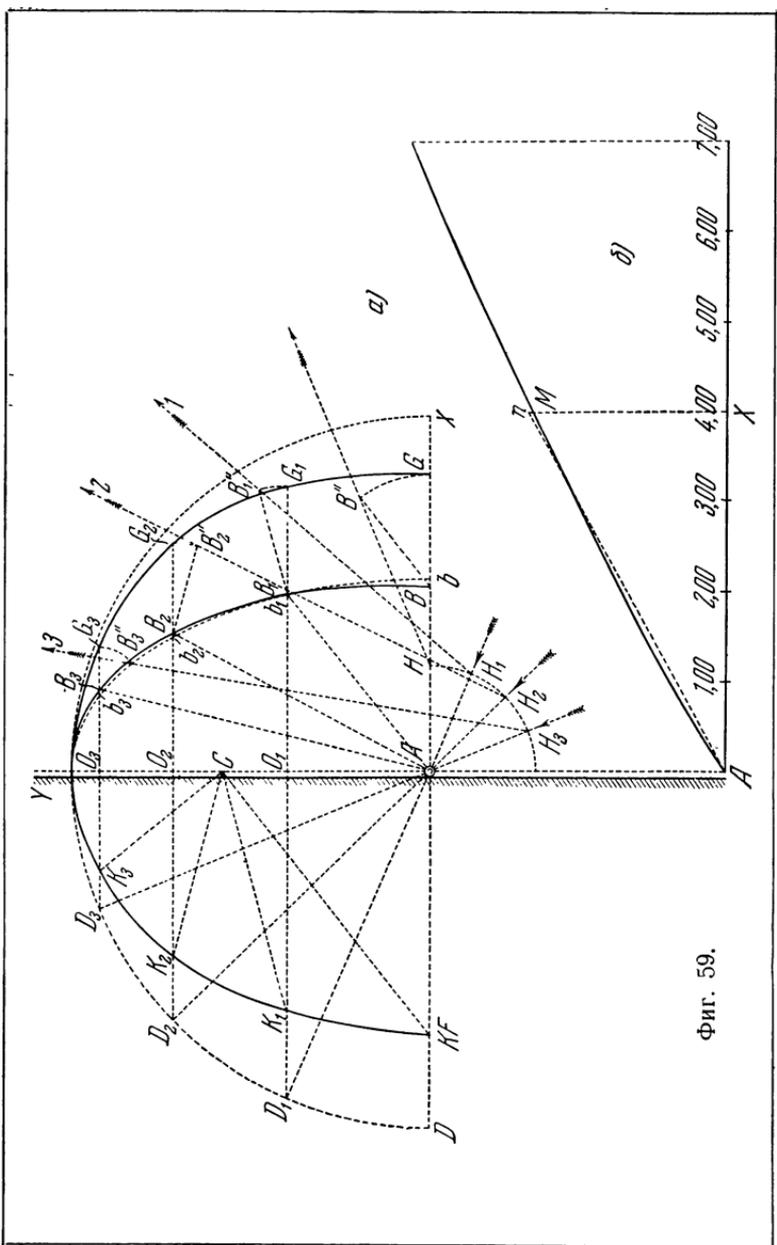
изменяться; точка B'' будет перемещаться по дуге описанного около B полукруга по направлению от борта, если вращение прямое, и к борту, если вращение обратное, как это можно видеть на фиг. 58. Если изменить только AC , иными словами, если нанесенный на той же самой высоте удар кием сместится на большее или меньшее расстояние вправо или влево от центра своего шара, то точка H останется той же самой и только точка B'' будет перемещаться по тому кругу, о котором мы только что говорили. Таким образом, на чертеже можно видеть, в каких пределах вращение $R \cdot r$, то есть величина h , может заставить измениться финальное направление HB'' .

Будем теперь изменять угол падения, то есть угол скорости AD с бортом, не изменяя величины этой скорости. Тогда точки D , F и H останутся на дугах в одну четверть окружности, а точка K , являясь точкой встречи перпендикуляра DO к линии борта с прямой FK , параллельной борту, будет находиться на четверти эллипса с полуосями AD и AF . Этот эллипс будет расположен со стороны AD , если вращение прямое, и со стороны бильярда, если вращение будет обратным.

Что касается различных положений точки B , соответствующих различным углам падения (фиг. 59, *a*), то если бы отношение ϵ между перпендикулярными к борту скоростями до и после удара, то есть так называемый коэффициент восстановления, было бы постоянным, то для получения этих различных положений было бы достаточно описать четверть эллипса $bb_1b_2b_3$, имеющего большой полуось AY , или AD , а малой полуось $Ab = \epsilon AD$.

Но из достаточно тщательно проведенных опытов следует, что коэффициент ϵ меняется от 0,50 для больших скоростей до 0,60 для очень малых скоростей. Ординаты кривой AM (фиг. 59, *b*) представляют величины восстановленных скоростей, тогда как абсциссы дают величины потерянных скоростей¹⁾. Видно, что эта кривая

¹⁾ То есть скоростей до удара. (Прим. перев.)



Фиг. 59.

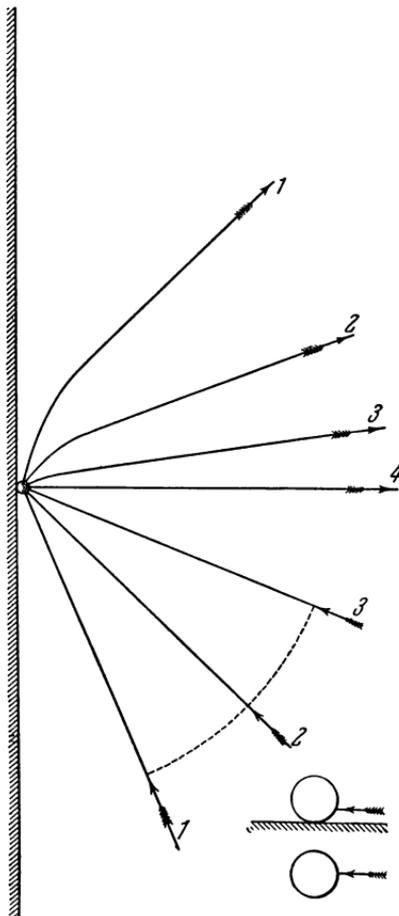
является почти прямой линией, и можно, не делая большой погрешности, рассматривать ϵ как величину постоянную и равную 0,55.

Вследствие незначительности изменения отношения между составляющими скоростей, нормальными к борту, до и после удара шара о борт упомянутый выше эллипс должен быть несколько изменен. Для того чтобы это сделать, воспользуемся законом, который мы установили опытным путем и который изображен на фиг. 59, б, где абсциссы AX представляют нормальные к борту составляющие скорости до удара, а ординаты — те же составляющие скорости, полученные после удара; масштаб соответствует 0,02 м для скорости 1 м/сек. Возьмем абсциссу AX на фиг. 59, б равной AD или AX фиг. 59, а и, проведя соответствующую ординату MX , чертим прямую Al , которая дает наименьшие отклонения от кривой между точками A и M . Затем на фиг. 59, а строим эллипс, предполагая, что кривая AM заменена прямой Al ; это будет эллипс, малая ось которого Ab равна Xl . Перпендикулярные к борту ординаты этого эллипса должны быть изменены в той же самой пропорции, в какой изменились бы ординаты прямой Al (фиг. 59, б), если бы ее превратить в кривую AM . Это преобразование на фиг. 59, а дает нам кривую $BB_1B_2B_3$. Таким образом, точка B будет всегда в месте встречи с этой кривой перпендикуляра к линии борта. Впрочем, не делая большой ошибки, можно вместо этой кривой взять эллипс, соответствующий среднему значению ϵ в интервале изменения нормальных составляющих скоростей от нуля до AX или AD .

Что касается длины BB'' , то она всегда будет равна расстоянию DB , умноженному на f_1 , то есть коэффициент трения между шаром и бортом.

Так как коэффициент f_1 является, как было найдено, достаточно постоянным и равным $\frac{1}{5}$, то эти расстояния мы получим, взяв пятые доли ординат BB'' . Если рассматривать точку B как находящуюся на эллипсе (что сопряжено лишь с очень малой погрешностью), то длины BB'' будут представлять расстояния BG , B_1G_1 , B_2G_2 , B_3G_3

между эллипсом $BB_1B_2B_3$ и другим эллипсом $GG_1G_2G_3$; тогда остается только повернуть отрезки BG , B_1G_1 , B_2G_2 ,

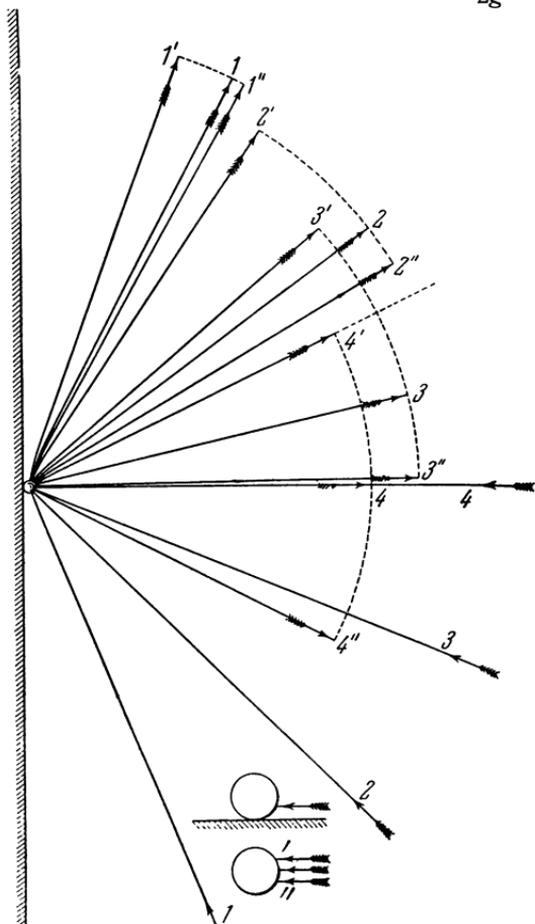


Фиг. 60.

B_3G_3 , чтобы поместить их на соответствующие им направления $KС$, $K_1С$, $K_2С$, $K_3С$.

Фигуры 60—66 иллюстрируют различные случаи удара о борт.

Фигура 60 сделана в предположении, что свой шар получил слабый удар кием, могущий дать $\frac{V_0^2}{2g} = 0,46$ м,

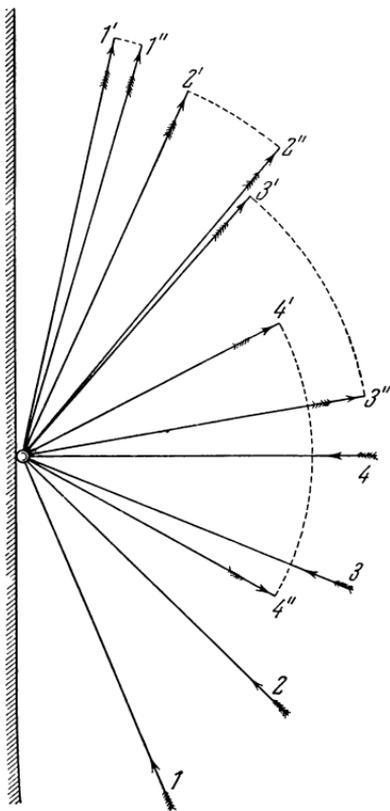


Фиг. 61.

или $V_0 = 3,00$ м/сек, и что при ударе ниже центра на расстоянии $0,50R$ получились скорости $V_1 = 2,00$ м/сек и $v = 1,00$ м/сек. Предполагается, что вертикальная пло-

скость удара проходит через центр шара. Удар о борт предполагается последовавшим почти сейчас же за ударом кием.

При построении фиг. 61 предположено, что тот же самый удар кием дан на более далеком расстоянии от



Фиг. 62.

борта, так что в мгновение удара скорости были следующими: $V=1,30$ м/сек и $v=0,30$ м/сек; в таком случае обратное вращение становится гораздо более слабым. Подобная (меньшая) величина отношения между вращательной и поступательной скоростями в мгновение удара шара о борт может иметь место и после того, как удар кием сделан не так низко, если борт расположен ближе. В этом случае такой удар можно дать немного правее или левее центра. В связи с этим на рассматриваемом чертеже для каждого угла падения построено по три пути отраженного шара в зависимости от того, проходит ли вертикальная плоскость удара справа от центра, через самый центр или слева от центра; эти пути объединены дугой окружности. Цифры без штрихов соответствуют централь-

ному удару, с одним штрихом — удару, данному справа, а с двумя штрихами — удару, данному слева от центра. Расстояние h плоскости удара от центра принято равным приблизительно $0,50R$. Если плоскость удара будет менее удаленной от центра, то мы будем иметь для шаров промежуточные пути.

Фигура 62 соответствует случаю, когда борт является еще более удаленным от места, где был дан такой же удар кием, причем, ударяя в борт, шар находился в состоянии скольжения; тогда шар не описывает никаких кривых линий и отражается по прямой линии. Но он может быть отражен в двух группах направлений; направления первой группы отмечены одним штрихом, а второй — двумя. Пути, относящиеся к первой группе, будут иметь место, если

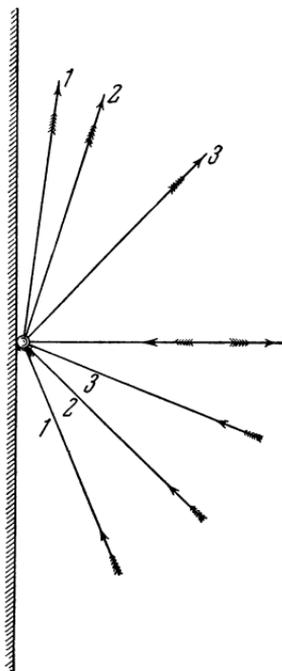
$$V_1 \frac{h}{\frac{2}{5}R} > V \cos \alpha,$$

или, что сводится к тому же, если точка K построения, сливающаяся в этом случае с O , окажется ближе к игроку, чем точка C . Вторая группа путей шара, отмеченных двумя штрихами, будет иметь место, если

$$V_1 \frac{h}{\frac{2}{5}R} < V \cos \alpha,$$

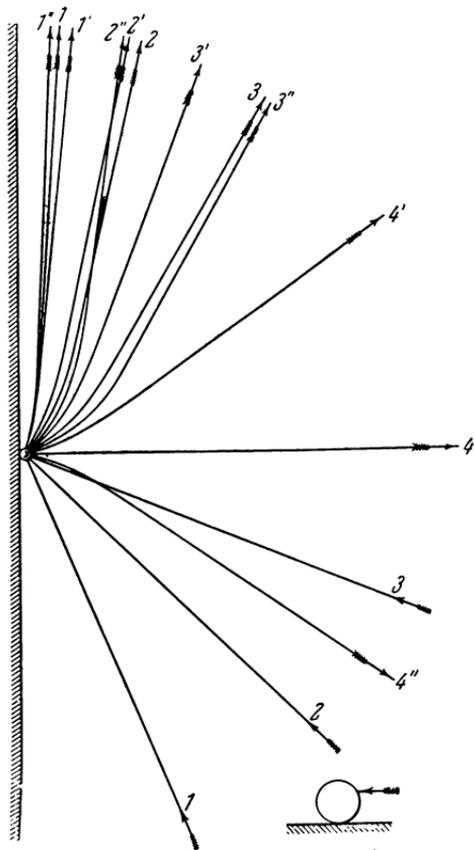
то есть, когда точка O окажется дальше от игрока, чем точка C . Если обе эти точки, хотя и не совсем совпадают, но очень мало удалены друг от друга, то для получения промежуточного хода нужно сделать некоторое видоизменение в построениях. За подробностями, мы отсылаем читателя к седьмой главе.

Фигура 63 иллюстрирует удар шара о борт, после того как шар получил такой же удар кием, какой он получил и в предыдущем примере, но находился еще дальше от борта, так что в мгновение удара о борт шар был в состоянии качения. На этой фигуре представлены



Фиг. 63.

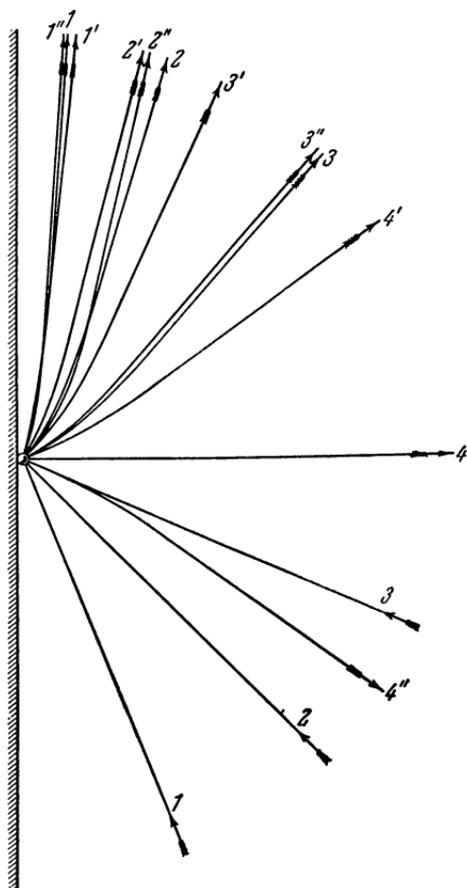
только линий, соответствующие случаю, когда вертикальная плоскость удара кием проходила через центр шара. Видно, что эти линии вследствие уменьшения скоростей обладают очень небольшой кривизной.



Фиг. 64.

Фигура 64 относится к удару о борт в том случае, когда удар кием был дан выше центра и борт находился очень близко от того места, где был дан удар, так что

вращение было прямым и с достаточно большой скоростью. Чертеж построен в предположении, что в мгновение удара $V=3,00$ м/сек и $v=1,50$ м/сек. Это влечет за



Фиг. 65.

собой $V_1 \frac{l}{R} = 4,50$ м/сек и $l = 1,47R$. Три пути, соединенных пунктирной дугой круга, соответствуют одному и тому же углу падения. Путь, отмеченный цифрой без штриха, отвечает случаю, когда вертикальная плоскость

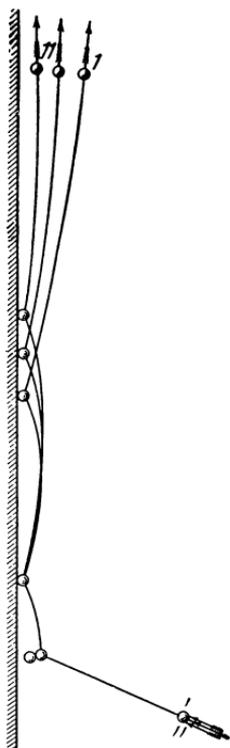
удара проходит через центр шара. Путь, отмеченный цифрой с одним штрихом, соответствует случаю, когда удар кием был нанесен справа, а с двумя штрихами — слева от центра шара.

Фигура 65 иллюстрирует тот же самый удар кием, но несколько более удаленный от борта, так что шар к мгновению удара о борт уже перешел в финальное состояние. Чертеж построен в том же масштабе в предположении, что $V = 2,80$ м/сек и $v = \frac{2}{5} V$. Штрихи соответствуют трем различным положениям вертикальной плоскости удара кием.

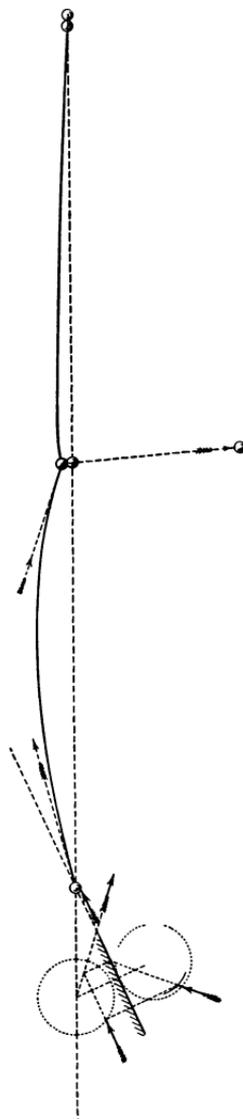
Фигура 66 дает пример второго удара о борт в непосредственной близости от первого удара о шар. Она предполагает, что удар кием был дан немного выше центра для того, чтобы увеличить прямое вращение и привести шар в финальное состояние к мгновению первого удара. Сила удара кием дана к мгновению первого удара о шар, $V = 3,23$ м/сек и $v = \frac{2}{5} V$. Противостоящий шар получил удар на расстоянии четверти прямого угла от тыльной точки.

Показаны все три пути, соответствующие трем положениям вертикальной плоскости удара кием, как на предыдущих фигурах. После отражения ход, соответствующий удару кием слева, становится параллельным борту.

Фигура 67 показывает действие удара наклонным кием, который направлен так, как показывают стрелки, представляющие его проекции. Этот удар предположен имеющим достаточную силу для того, чтобы, будучи дан горизонтально и через центр, он мог бы сообщить скорость $7,00$ м/сек, то есть такую, которой соответствует высота $\frac{V^2}{2g}$, равная $2,50$ м. Трение на бильярдном сукне предположено в соответствии с опытами равным пятой части во время удара и четвертой во время следующего затем движения. По геометрическому чертежу пути шара видно, что он может карамболировать по двум шарам, расположенным на прямой линии, выходящей из



Фиг. 66.



Фиг. 67.

его отправной точки. Необходимо, чтобы он задел второй шар в месте, достаточно удаленном от тыльной точки, то есть, чтобы он, как выражаются игроки, взял бы его тонко (*elle la greppe fine*). Можно также сделать карамболь, взяв второй шар в центр (*en la prenant très pleine*), если скорость достаточно велика, чтобы сохраниться вплоть до следующего шара, и если сукно бильярда очень хорошее.

Можно видоизменять до бесконечности приложения общих построений. Мы дали только основные положения, чтобы не сделать книгу слишком объемистой.

Игроки легко смогут расширить эти приложения, изменяя, если понадобится, постоянные, зависящие от свойств бильярда. Они найдут в тексте этого произведения косвенные способы для определения этих постоянных.

Мы повторим здесь то же самое, что мы уже сказали относительно удара шаров, а именно, что размеры кривых возрастают или уменьшаются не в отношении скоростей, а в отношении их квадратов. Поэтому, если изменить масштаб скоростей, то в соответствии с этим пришлось бы изменить и величины кривых. Но направления и величины конечных скоростей останутся всегда теми же самыми.

Точно так же должно заметить, что построения, дающие финальные направления, будут всегда оставаться в силе при всяких законах трения скольжения и трения качения.



ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию	5
Предисловие автора	11
Изложение основ теории и построений, объясняющих движение шаров	15
Глава I. Движение шара по горизонтальной плоскости с трением	22
Глава II. О действии удара горизонтальным кием	55
Глава III. Об ударе двух шаров и карамболе без учета весьма малого трения между шарами во время удара	80
Глава IV. О явлениях при втором ударе между двумя шарами, происшедшем на небольшом расстоянии от первого удара	95
Глава V. Об ударе двух шаров с учетом трения между шарами во время удара, неабсолютной упругости и неравенства масс	104
Глава VI. Об ударе о борт или непосредственно, или после другого удара	125
Глава VII. Частный случай, когда нужно видоизменить формулы и построения, относящиеся к действию трения во время удара	137
Глава VIII. О действии удара наклонным кием	140
Отдельное изложение правил и построений, получающихся из теории, обоснованной в предыдущих главах	165
О движении шара по бильярдному сукну без учета причины, производящей это движение	167
Об ударе горизонтальным кием	172
Об ударе наклонным кием	183
О движении шара после первого или второго удара о другой шар	186
Движение шара после первого или второго удара о борт	217
