Соударение бильярдных шаров

А.Сорокин
Февраль, 2012

Щёлкни кобылу в нос — она махнет хвостом
Козьма Прутков

Абсолютно упругий удар – модель соударения, при которой полная кинетическая энергия системы сохраняется. При этом пренебрегают деформациями тел. Соответственно, считается, что энергия на деформации не теряется, а взаимодействие распространяется по всему телу мгновенно. Говоря об абсолютно упругом ударе, очень часто приводят в пример соударения бильярдных шаров. Но так ли незначительна деформация шаров при их соударении и так ли мало время их взаимодействия в реальности?

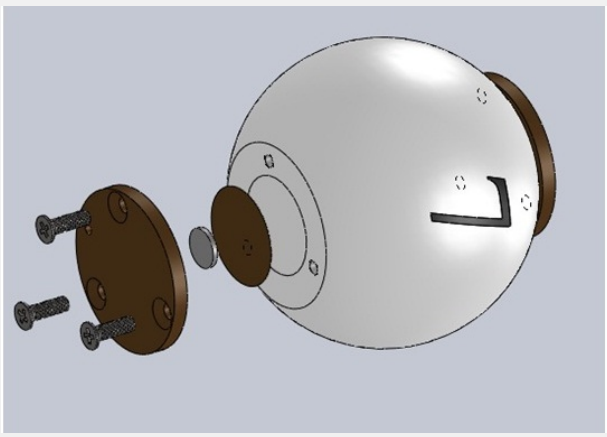
Время взаимодействия бильярдных шаров и их деформация, помимо непосредственного измерения, могут быть определены из формул, описывающих соударение произвольных шаров массой M, радиуса r, с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона γ.

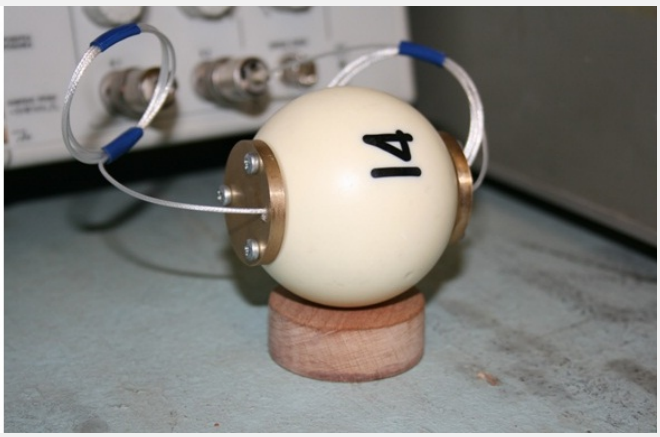
Так, время взаимодействия $\tau = 2.94\left(\frac{M^2}{4k^2V}\right)^{1/5}$, а максимальное сближение шаров $h_0 = \left(\frac{M}{k}\right)^{2/5} V^{4/5}$, где $k = \frac{8E}{15(1-\gamma^2)}\sqrt{\frac{r}{2}}$.

Максимальным сближением принято называть разность суммы радиусов шаров и минимального расстояния между их центрами во время удара. Эти формулы можно найти в седьмом томе всемирно известного учебника по физике Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица, Теория упругости, стр. 50.
Для вычисления τ и h_0 необходимо знать коэффициент Пуассона и модуль упругости (модуль Юнга). Для большинства пластмасс коэффициент Пуассона лежит в пределах 0,3 – 0,35. В своей статье «Modeling the effects of velocity, spin, frictional coefficient, and impact angle on deflection angle in near-elastic collisions of phenolic resin spheres» S.C. Crown привел значение коэффициента Пуассона для бильярдного шара γ = 0,34 и модуля Юнга E = 5,84 ГПа, не указывая, однако, при этом способ нахождения этих величин.

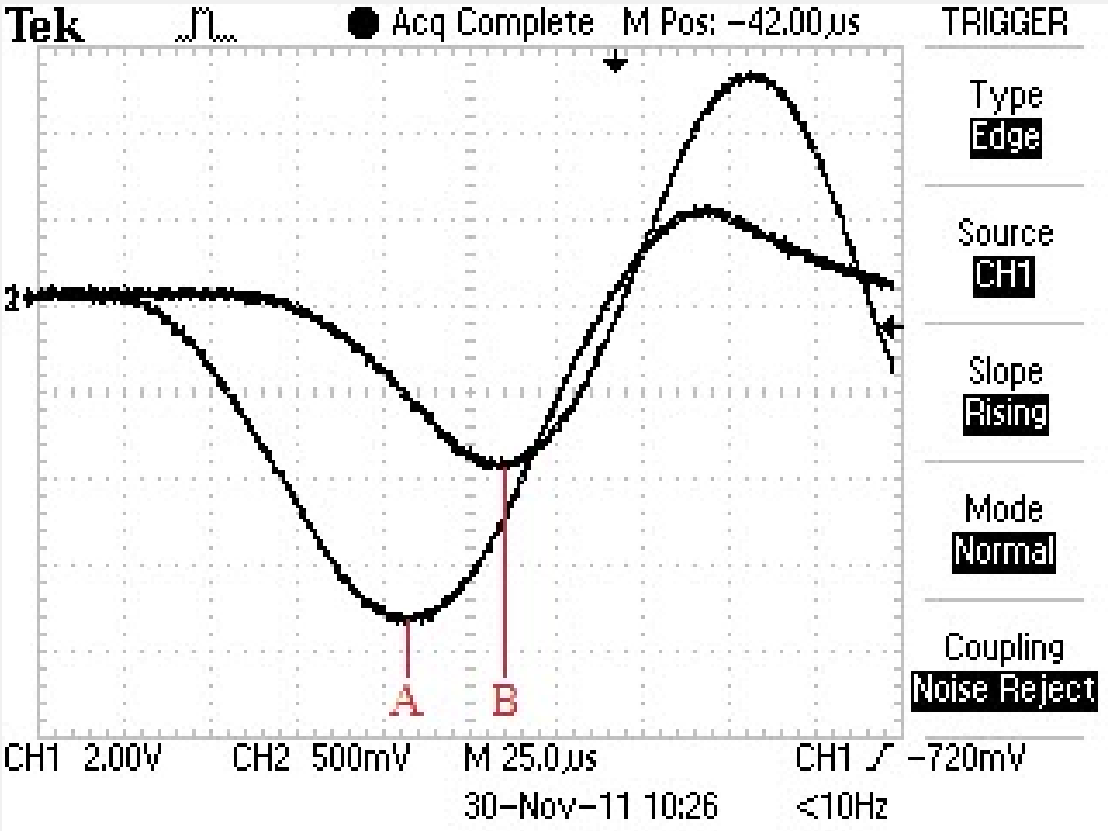
В настоящее время существует два основных способа измерения модуля упругости (модуля Юнга). Первый способ – это непосредственное измерение деформации образца при сжатии или растяжении. Второй способ – это вычисление модуля упругости через скорость распространения звука в образце $E = c^2\rho$, где c – скорость звука, а ρ – плотность материала.

Для измерения модуля упругости через скорость звука использовался бильярдный шар диаметром 60 мм, который с двух сторон был обработан на токарном станке до размера 50 мм. На образовавшихся плоскостях были закреплены два пьезоэлемента и контактные группы для них. Собственно, нехитрая конструкция понятна из сборочного чертежа и фотографии.





Если несильно щелкнуть по торцу шара, то оба пьезоэлемента с небольшой задержкой по времени отреагируют характерными сигналами. Интервал времени между точками А и В равен 27 – 30 мкс и соответствует времени распространения волны сжатия от одного торца шарика до другого (L = 50 мм).



Скорость звука, рассчитанная по этим значениям, составляет порядка 1760 м/с. Несложно посчитать, что при плотности данного бильярдного шара около 1768 кг/м3, модуль упругости определяется величиной 5,48 ГПа.

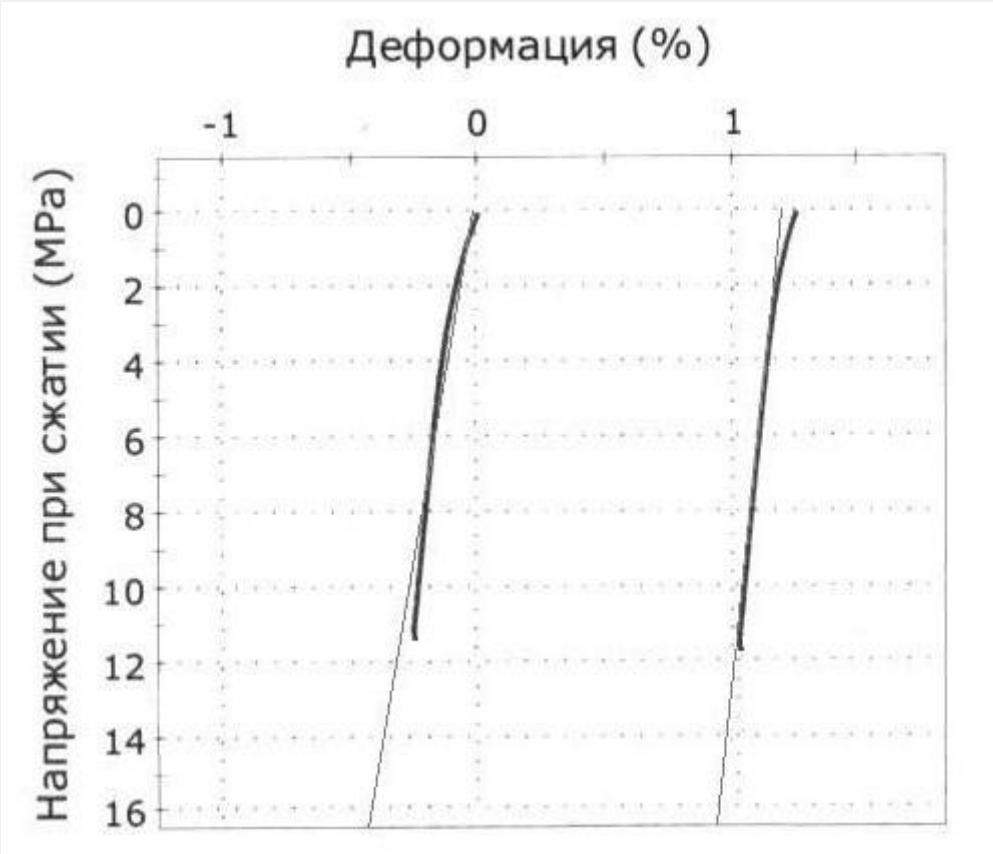
50,20
Ø 32,82

INSTRON
3369

Для измерения модуля упругости (модуля Юнга) прямым методом (то есть при непосредственной деформации) на токарном станке из бильярдного шара был изготовлен образец диаметром 32,82 мм и длиной 50,20 мм.

Модуль упругости определялся на измерительном стенде INSTRON 3369, который позволяет проводить любые измерения, связанные со сжатием, разрывом и изгибом образца. Максимальная нагрузка, развиваемая при сжатии, составляет 5 тонн. Как оказалось, этой нагрузки недостаточно для разрушения данного образца.

Вот такая диаграмма получилась при сжатии образца в области деформаций, не превышающих 0,2%.



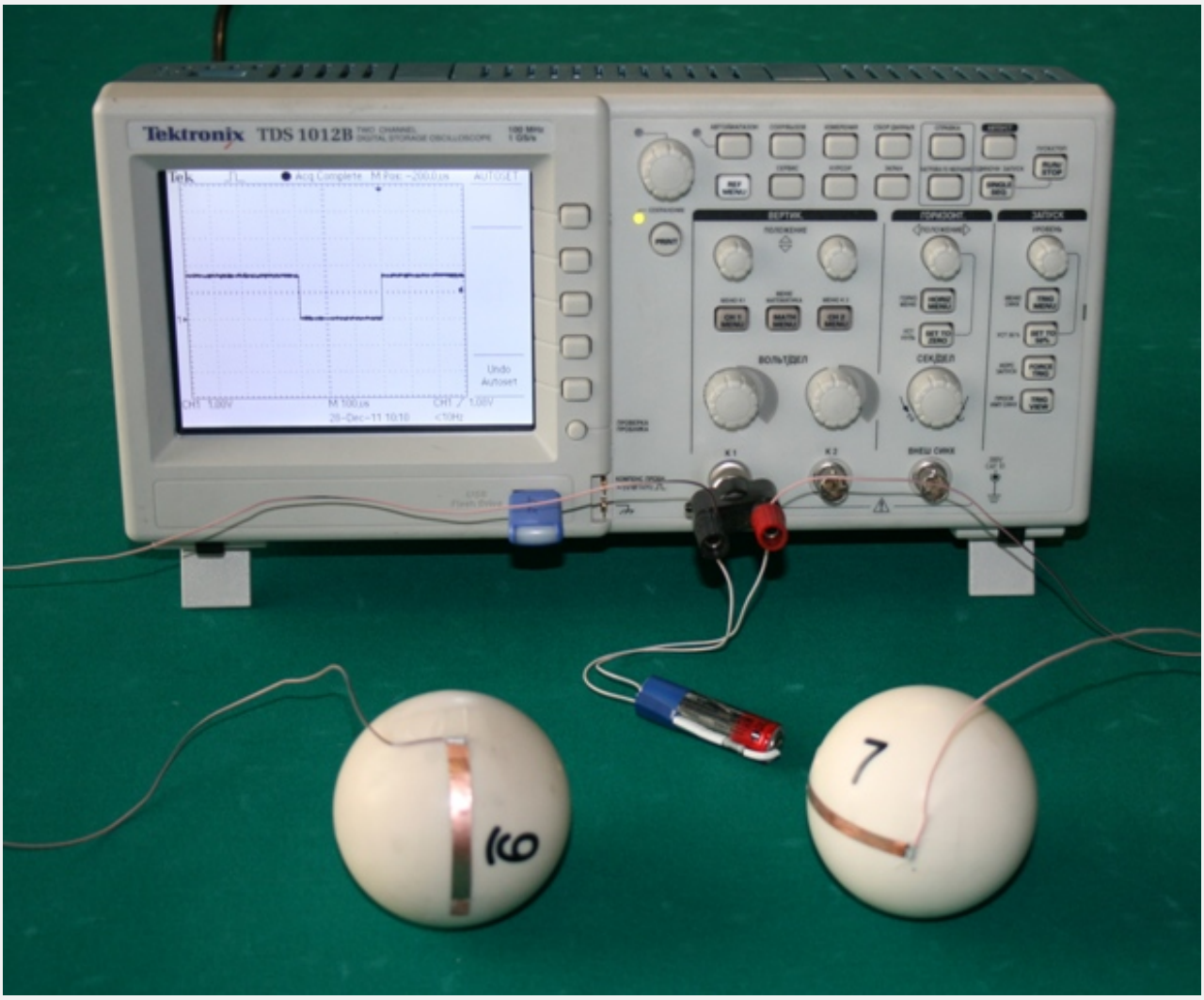
Модуль упругости, определенный по двум испытаниям, получился равным 5,30 ГПа, что чуть меньше модуля упругости 5,48 ГПа, измеренного через скорость звука в материале, и неплохо коррелирует с величиной 5,84 ГПа, которую привел в своей работе S.C. Crown.

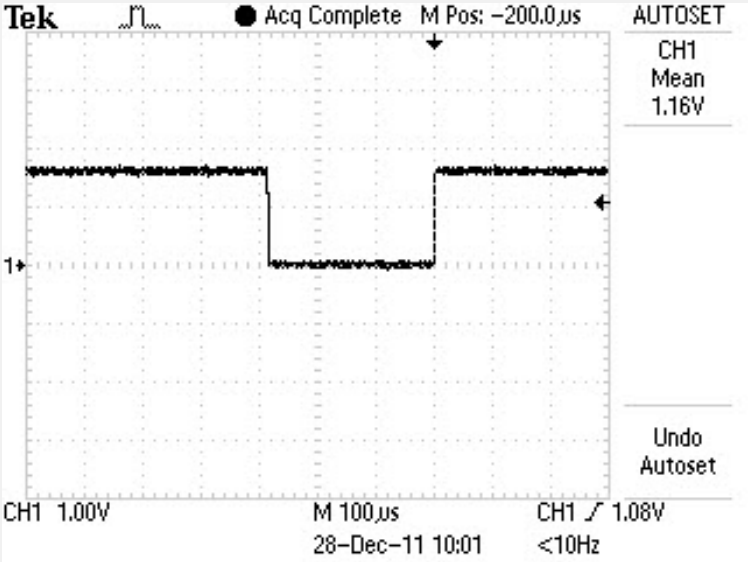
Определив модуль упругости бильярдного шара как E = 5,4 ГПа, коэффициент Пуассона γ = 0,34, массу M = 0,282 кг, радиус r = 0,068 м, скорость битка V = 7 м/с и воспользовавшись ранее приведенными формулами, получим время взаимодействия шаров τ = 320 мкс, а максимальное сближение шаров h_0 = 0,76 мм (что соответствует деформации каждого из шаров равной 0,38 мм).

Для подтверждения этих результатов была проведена высокоскоростная съемка процесса соударения бильярдных шаров. Видеосъемка производилась с помощью цифровой

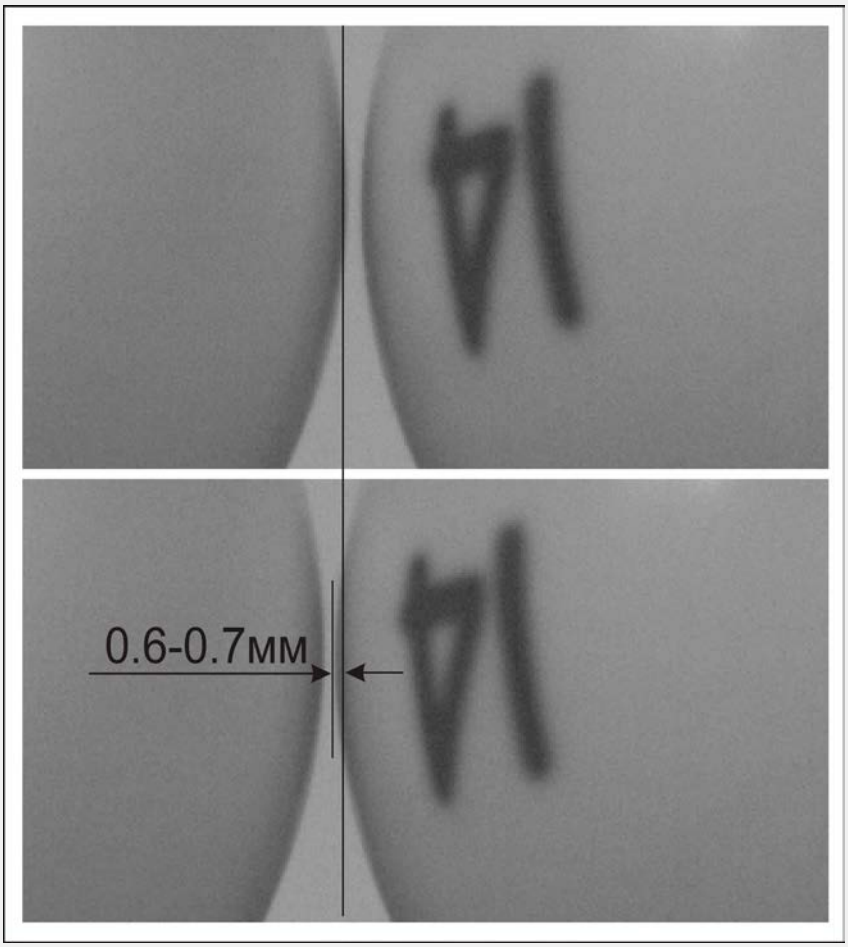
высокоскоростной монохромной камеры Phantom V12, при частоте съемки 49000 кад/сек. Среднее время контакта бильярдных шаров диаметром 68 мм, полученное из четырех дублей, составило порядка 244 – 268 мкс, при скорости соударения порядка 7 м/с.

Еще одним способом определения продолжительности удара может служить измерение времени замкнутого состояния контактной группы, закрепленной на бильярдных шарах. Однако отсутствие возможности контролировать скорость шаров до удара дает только ориентировочное значение времени контакта, которое составило порядка 280 – 300 мкс.





Определив из скоростной видеосъемки положение шаров до и после удара, можно найти величину их максимального сближения h_0 = 0,6 – 0,7 мм, а также деформацию каждого из шаров Δx = 0,3 – 0,35 мм.



Если учесть, что рассчитанное время взаимодействия шаров и величина их максимального сближения неплохо согласуются с результатами скоростной съемкой и измерениями с помощью контактной группы, то можно считать значения модуля упругости E = 5,3 – 5,5 ГПа, времени взаимодействия шаров τ = 250 – 300 мкс и степень их деформации Δx = 0,3 – 0,35 мм вполне достоверными при скорости соударения V = 7 м/с.

Проведя несложные алгебраические преобразования, можно записать в следующем виде уравнения для времени взаимодействия шаров и величины их максимального сближения $\tau \sim \frac{r}{V^{1/5} c^{4/5}}$ и $h_0 \sim r \frac{V^{4/5}}{c^{4/5}}$ соответственно, где c – скорость звука в материале.

Анализируя записанные в таком виде уравнения, можно заметить, что длительность удара в большей степени определяется размером соударяющихся шаров и скоростью звука в материале, нежели скоростью самих шаров. Так, уменьшение скорости сближения шаров в два с половиной раза приведет к увеличению длительности соударения шаров всего лишь на 17%. В тоже время, степень деформации шаров будет уже существенно зависеть не только от их размера и скорости звука, но и от скорости их соударения. Так же несложно заметить, что переход от шаров диаметром 68 мм к шарам с диаметром 60 мм, приведет к уменьшению как времени соударения, так и степени деформации на 12%. Подтверждением этого служит скоростная съемка соударения шаров диаметром 60 мм со скоростью 2,8 м/с.

Одним из возможных продолжений этой работы, могло бы стать сравнение характеристик современных бильярдных шаров различных производителей со свойствами костяных шаров.