Исследования некоторых волновых свойств бильярдного кия

А.Сорокин

Май, 2011

Скрипки не делают – делают бочки и скамейки.
А скрипки, как хлеб, виноград и детей рождают и выращивают.
Бр. Вайнеры. «Визит к минотавру»

Казалось бы, что может быть проще, чем взять хороший кий и скопировать все его характеристики: материал, размер, сечения, вес, баланс и сделать сотню, тысячу одинаково хороших киев. Однако спросите любого уважаемого мастера, и он Вам покажет десятки лекал великолепных киев, но и расскажет о множестве заурядных киев, сделанных по тем же лекалам. В чем же заключается разница между игровыми киями и заурядными колодниками, и можно ли описать эту разницу не только субъективными ощущениями, но и конкретными физическими величинами? Ответ на этот вопрос может быть получен только путем поиска и сравнения характеристик, описывающих взаимодействие кия и шара.

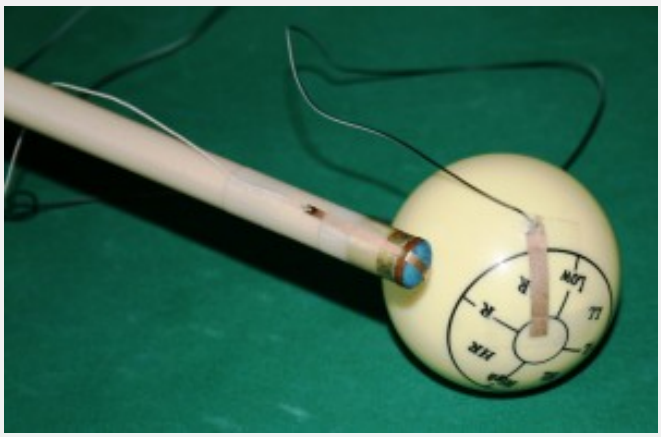
Само по себе это взаимодействие представляет не что иное, как удар, процесс, которому посвящен целый раздел механики твердого тела, тысячи теоретических и экспериментальных работ. Но, несмотря на огромное внимание к этой тематике, только сравнительно недавно было получено удовлетворительное согласование теории и эксперимента. Современная теория упругого удара представляет собой обобщение теории Г. Герца и волновой теории Сен-Венана [1]. Не вдаваясь в подробности этих теорий, стоит отметить, что взаимодействие кия и битка не ограничивается их деформацией только в точке контакта, но и связанно с распространением в них продольных волн сжатия и снятия нагрузки. Именно распространением этих волн определяется время контакта кия с битком, а также доля энергии, передаваемая от кия битку. Кроме того, продольная нагрузка кия способствует потере им устойчивости и его поперечной деформации и, как следствие, генерации поперечных колебаний, которые также поглощают энергию, передаваемую битку. Так же не стоит забывать, что любая поперечная деформация кия во время удара может приводить к значительным отклонениям битка от намеченной траектории. Все эти факторы говорят о том, что при описании механики кия помимо его геометрических и весовых

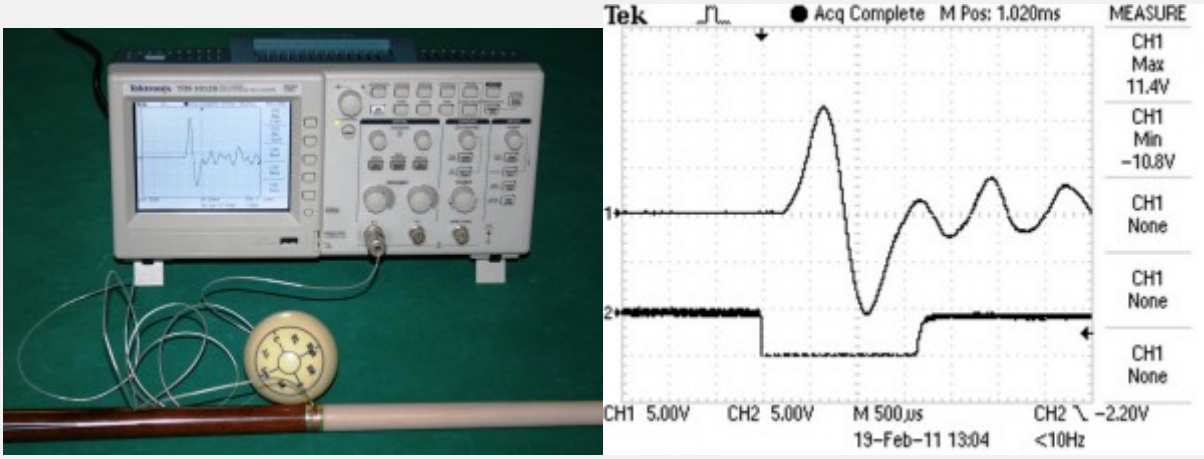
характеристик, необходимо рассматривать и его волновые свойства.

Для того, чтобы получить количественные характеристики, описывающие волновые свойства кия, необходим измерительный инструмент способный преобразовывать механические деформации в электрический сигнал. Наиболее доступным и подходящим материалом на роль датчика деформаций является пьезокерамика, которая под действием деформации может индуцировать электрический заряд на своей поверхности. На основе пьезокерамики были изготовлены три пьезодатчика для измерения колебаний на кончике шафта, в скрутке и около бампера турняка.

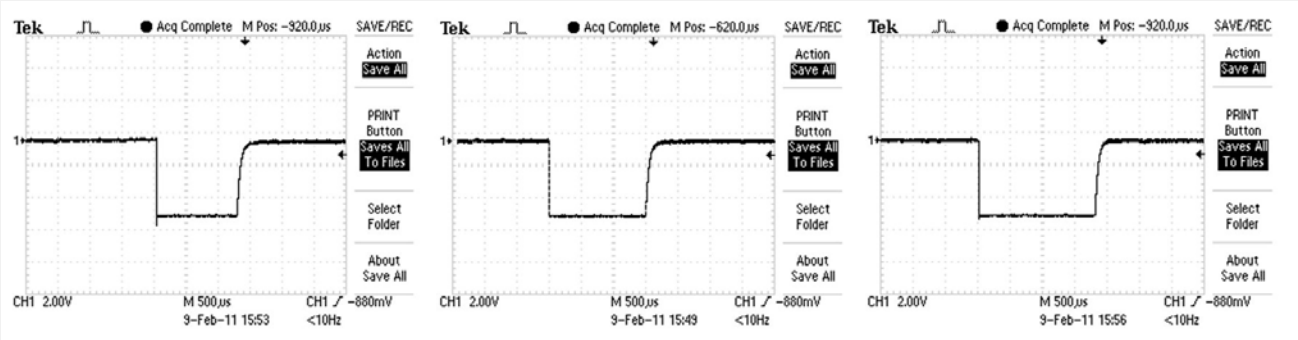
Конструктивная особенность датчика, установленного в скрутку шафта и турняка, состояла в том, что пьезоэлемент размещался со смещением относительно оси датчика, что делало его чувствительным не только к продольным волнам сжатия и растяжения, но и к поперечным колебаниям кия.

Для синхронизации сигналов с датчиков и определения времени контакта наклейки кия и битка использовалась контактная группа. Сигналы с датчиков и контактной группы регистрировались с помощью цифрового осциллографа и имели характерный вид.



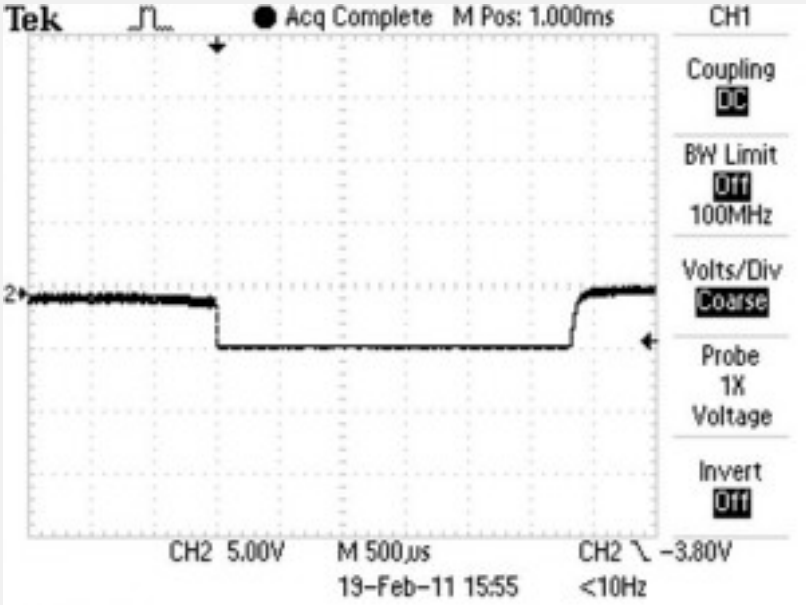


Длительность отрицательного прямоугольный импульса внизу на осциллограмме соответствует времени замкнутого состояния контактной группы, то есть времени взаимодействия кия и битка. Это время составляет порядка 1,5 мс и слабо меняется от силы удара. При сильном ударе время взаимодействия кия и битка составляет 1,3 мс, при среднем по силе ударе – 1,5 мс, а при слабом ударе порядка – 1,8 мс.



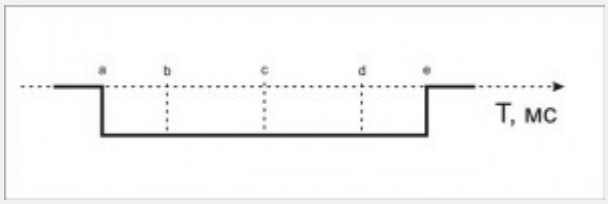
Эта слабая зависимость времени контакта от силы удара (другими словами, от скорости кия в момент удара) не противоречит теоретическим представлениям об упругом ударе. Так для упругого соударения одинаковых шаров существует теоретически вычисленная и экспериментально проверенная зависимость времени контакта от относительной скорости

столкновения $T \sim V^{-1/5}$. В тоже время аналогичные результаты для продольного соударения однородных стержней показали отсутствие всякой зависимости времени контакта от относительной скорости столкновения. По всей видимости, слабая зависимость, обнаруженная при соударении кия и битка, связана в большей степени с деформацией самой наклейки, нежели с продольной деформацией кия и битка.



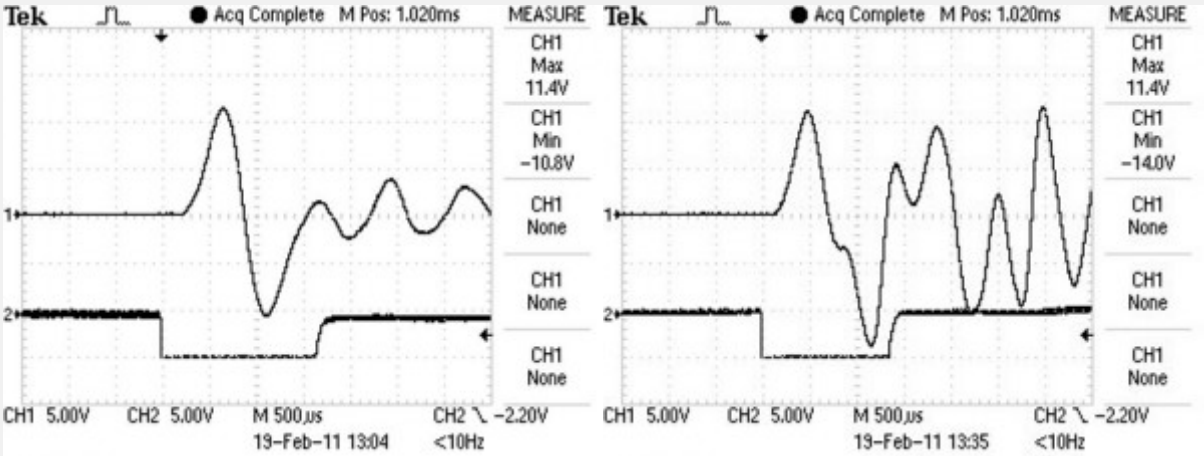
В пользу этого предположения говорят результаты эксперимента по определению времени взаимодействия для кия с увеличенной толщиной наклейки. Так, установленные друг за другом две одинаковые наклейки позволили увеличить время контакта с 1,5 мс до 2,8 мс, при этом само время контакта стало сильно зависеть от силы удара (изменение длительности контакта могло достигать 70%). Еще одним подтверждением высказанного предположения могли бы стать измерения времени контакта при ударах кием без наклейки.

Как уже говорилось выше, взаимодействие кия и битка не ограничивается только деформацией наклейки, но и связанно с распространением в кие продольных волн сжатия. Если все время контакта разбить условно на четыре части, где первая T_{ab} и последняя T_{de} части соответствуют времени деформации и восстановлении наклейки, то продолжительность двух оставшихся частей, согласно теории Сен-Венана, будет определяться временем пробегания упругой волны от кончика шафта до бампера турняка и обратно, т.е. $T_{bd} = 2L/C$, где L – длина кия, а C – скорость звука в кие. Если в это уравнение подставить значение длины кия L=1600 мм и скорости звука в нем C=4600 м/с (ниже это значение будет определено экспериментально), то это время составит порядка 0,7 мс. Не сложно догадаться, что для кия в два раза меньшей длины общее время его контакта с битком уменьшится на 0,35 мс. Для проверки этого утверждения было проведено сравнение времени контакта при ударе целым кием и укороченным почти в два раза. Для этого турняк

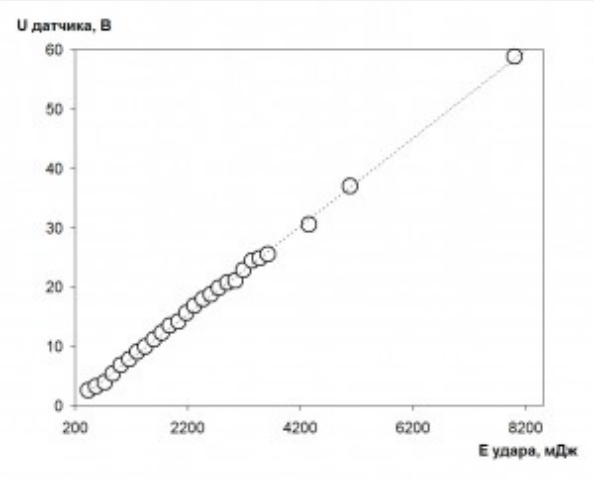


кия был заменен короткой ручкой из латуни равной ему по весу.

Ниже приведены осциллограммы синхронизированных сигналов с контактной группы и пьезодатчика, установленного в скрутке шафта и турняка.

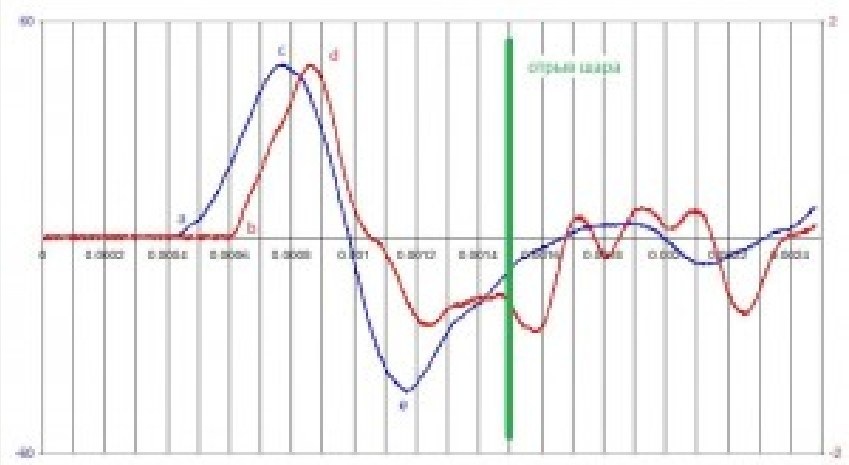


Слева – удар по битку целым кием (время взаимодействия 3,4*500 мкс=1,7 мс), справа – удар половинкой кия (время взаимодействия 2,7*500 мкс=1,35 мс), разница во времени контакта составляет ровно 0,35 мс. Сила удара по битку в обоих случаях была равной и контролировалась по амплитуде сигнала пьезодатчика, установленного в скрутке. В верхних правых углах осциллограмм приведены значения этих амплитуд $CH1_{max}$ = 11,4 В, что, согласно тарировке пьезодатчика, соответствует энергии [2] удара 1600 мДж.



Сама тарировка пьезодатчика представляла собой измерение максимальной амплитуды сигнала при падении кий (наклейкой вниз) на бетонный пол с заданной высоты. Как видно из графика, напряжение на выходе датчика имеет достаточно линейную зависимость от энергии удара (силы удары), при этом чувствительность датчика была чрезмерно высокая, так что даже пришлось загрубить датчик в два раза.

Измерение энергии удара также позволяет оценить скорость битка после удара, так энергии удара в 8000 мДж (миллиджоулей), это около двух калорий, соответствует скорость битка порядка 7,5 м/с.

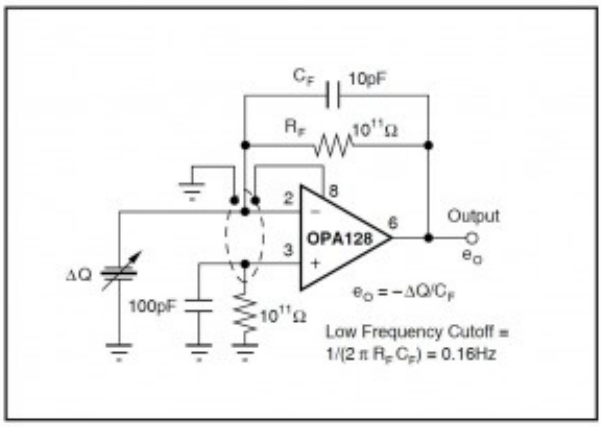


Для определения в кие скорости распространения продольных волн были записаны синхронизированные сигналы с двух пьезодатчиков, установленных в скрутке и бампере. Кривая синего цвета – это сигнал с пьезодатчика, установленного в скрутке, красная – с датчика в бампере, расстояние между датчиками 780 мм. Все что происходит за зеленной линией (плюс-минус 200 мкс, две клеточки) происходит в кие после отрыва битка от наклейки. Пьезокерамические элементы обоих датчиков имеют одинаковую чувствительность, что специально проверялось (разница не более 0,5 %). Несмотря на одинаковую чувствительность, амплитуды сигналов с двух датчиков отличаются в 30 раз (справа и слева на вертикальных осях отложен масштаб 60 В и 2 В соответственно). Эта разница в амплитудах связана не столько с затуханием сигнала на длине кия, сколько с конструктивными особенностями крепления датчиков.

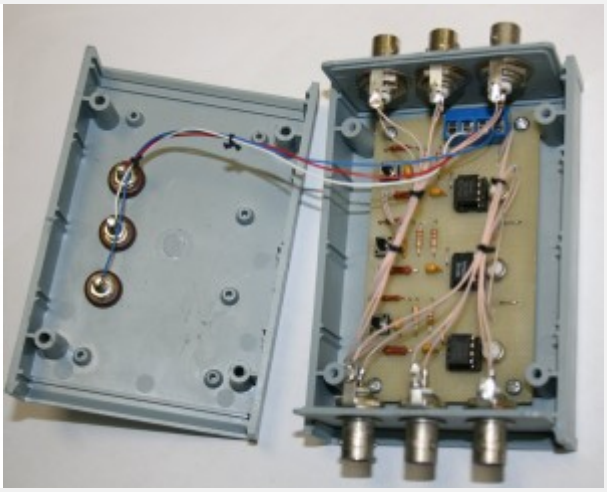
Если расстояние между датчиками (780 мм) разделить на интервал времени между точками (a) и (b), который равен 170 мкс, то получим скорость распространения упругой волны порядка 4600 м/с. Это значение скорости характерно для твердых пород древесины. Если же скорость определять из интервала времени между точками (c) и (d), то получится скорость 7800 м/с. Такая огромная скорость невозможна в древесине. Это несовпадение можно объяснить, если предположить, что во время регистрации сигналы с датчиков претерпевают сильное искажение. Причин этому искажению может быть много, например, паразитные емкости и индуктивности. Но, по всей видимости, основная причина заключается в несогласованности датчиков и осциллографа. Пьезодатчик можно представить, как очень маленькую емкость (конденсатор), на которой при деформации появляется заряд (а значит, и напряжение). Если датчик ни к чему не подключать, то заряд и напряжение будет сохраняться на его выходе до тех пор, пока не будет снята нагрузка с датчика. Если же датчик подключить к осциллографу, у которого входное сопротивление 1 МОм, то заряд достаточно быстро перетечет через это сопротивление с одного торца датчика на другой и напряжение на выходе датчика будет нулевым. Время перетекания заряда, а значит, и форма отклика датчика на нагрузку будет напрямую зависеть от входного сопротивления осциллографа. Это подтвердилось изменениями интервала времени между точками (c) и (e)

при шунтировании входа осциллографа (тем самым уменьшалось его входное сопротивление).

Для согласования пьезодатчиков с регистрирующими приборами существуют специальные устройства, например, такие как усилители заряда, с интегрированием тока (на базе ОУ с входом на полевых транзисторах), позволяющие регистрировать сигналы даже с частотой меньше 1 Гц.



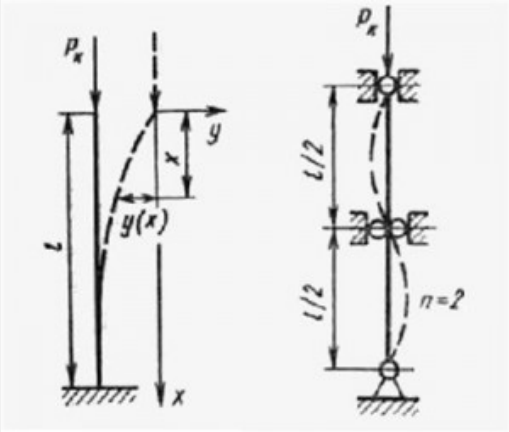
Piezoelectric Transducer Charge Amplifier.



На базе ОУ КР544УД2 было изготовлено аналогичное устройство для одновременной регистрации сигналов с трех пьезодатчиков. Принцип работы схемы понятен из этого ролика

В первых пятнадцати секундах ролика показан сигнал с пьезодатчика, поданный напрямую на вход осциллографа. Пьезодатчик в этом случае откликается на сжатие двумя всплесками, один на увеличение нагрузки, другой на снятие нагрузки. Во второй пятнадцатисекундной части ролика показан сигнал с пьезодатчика, поданный на вход осциллографа через зарядовый усилитель. В этом случае на экране осциллографа отображается “истинный” вид нагрузки.

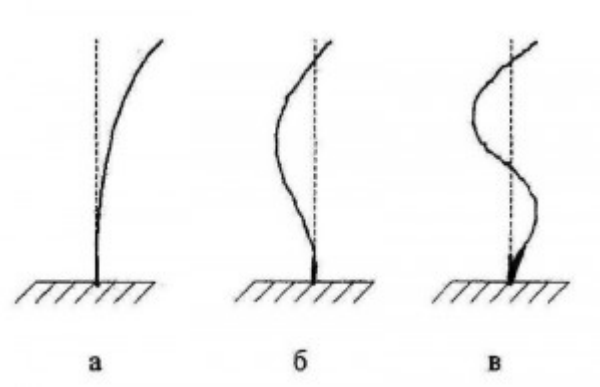
Тестирование измерительной системы пьезодатчик–зарядовый усилитель проводилось при измерениях поперечной деформации кия. Поперечная деформация кия, как уже говорилось выше, может быть спровоцирована осевой нагрузкой. При этом поведение кия в какой-то степени аналогично поведению длинного стержня, а значит, для кия, как и для стержня,



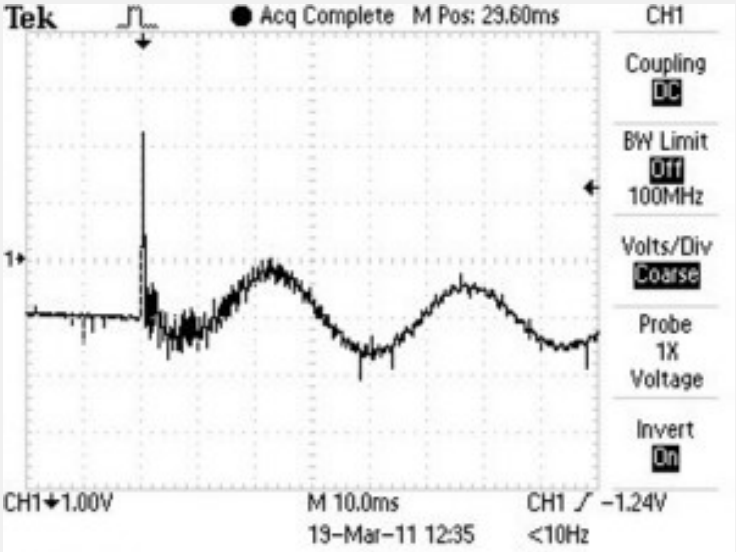
следует различать деформации, вызванные статической и динамической осевой нагрузкой.

Для начала рассмотрим статическую задачу. Ситуация, при которой стержень (балка, кий, и т.п.), нагруженный вдоль оси симметрии, начинает изгибаться в поперечном направлении, называется потерей устойчивости. При статической нагрузке эта задача впервые решена Эйлером. Он вычислил критическую силу Fкр, при которой стержень теряет устойчивость, эта сила так и называется – сила Эйлера. Но дело в том, что при статической нагрузке возможна только одна форма деформации, в виде одной полуволны синусоиды (С-образная форма). Другие формы изгиба при статической нагрузке возможны только при наличии дополнительных, промежуточных опор.

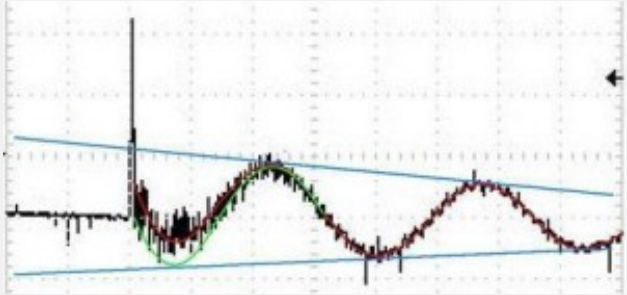
Задача о динамической потере устойчивости стержня была решена и экспериментально проверена Лаврентьевым и Шабатом (Проблемы гидродинамики и их математические



модели, стр.364). Основной вывод этой работы состоит в том, что при динамической (ударной) нагрузке, в отличие от статической, деформация стержня может принимать различные формы. Когда к стержню мгновенно прикладывается нагрузка F, в n раз превышающая Эйлерову силу Fкр, стержень изгибается по синусоиде с числом полуволн, равным квадратному корню из n/2 или ближайшему целому числу; если стержень при этом разрушается, то число изломов также оказывается равным этому числу. В зависимости от начальной формы поперечной деформации в стержне (балке, кие, и т.п.) возбуждается соответствующая мода колебаний.



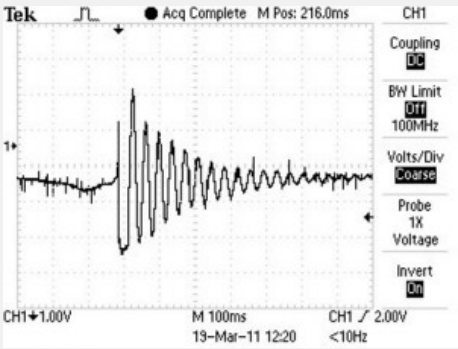
Такой режим возбуждения поперечных колебаний при центральном ударе кием по битку удалось зафиксировать с помощью пьезодатчика установленного в скрутку шафта и турняка и подключенного к осциллографу через зарядовый усилитель. Острый пик в начале осциллограммы – это продольная волна сжатия в данном масштабе (масштаб 10 мс на 1 см, на предыдущих осциллограммах волна сжатия отрисовывалась в масштабе 250 – 500 мкс на 1 см). Периодический сигнал за пиком – не что иное, как затухающие поперечные колебания кия; период этих колебаний 34 – 36 мс, а частота, соответственно, 29 – 27 Гц.



Если сопоставить полученную форму затухающих поперечных колебания со строго периодическим сигналом, то на начальном участке возбуждения можно заметить небольшую подстройку частоты [3] колебания, которая, по всей видимости, связана с незначительным отличием начальной формы поперечной деформации кия от одного из идеальных случаев, показанных на рисунках а, б и в.

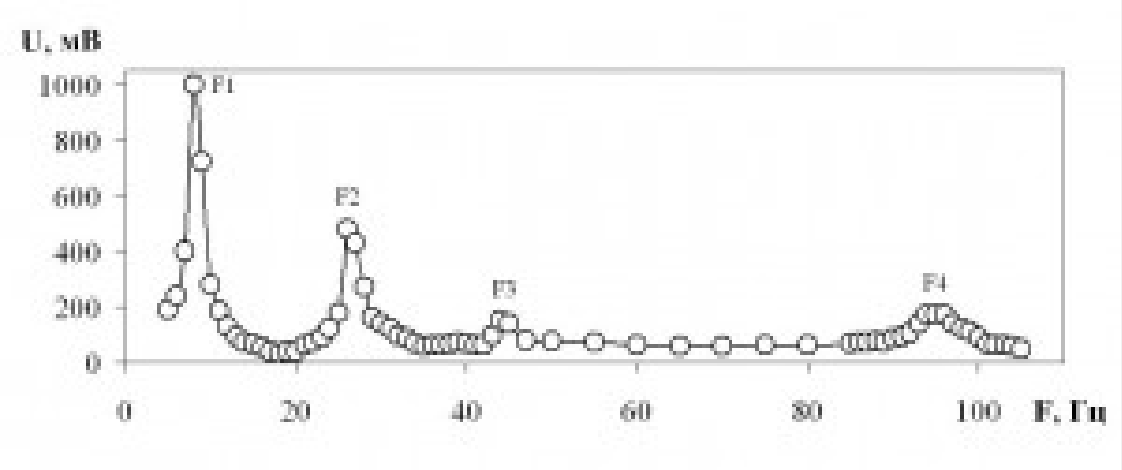
Аналогичные колебания и их начальная подстройка наблюдаются в кие при легком ударе торцом наклейки по столу. Частота этих затухающих колебаний составляет порядка 26 – 27 Гц, а период, соответственно, 35 мс, что хорошо совпадает с предыдущими измерениями. Если продолжить сравнение поперечных колебаний кия с аналогичными колебаниями длинного стержня постоянного сечения, то можно предположить, что частота, равная 27 Гц, не является единственной собственной частотой, а значит, как и для стержня, этих частот поперечных колебания кия должно быть бесконечно много F_1, F_2,…, F_n …

Измерение нескольких первых собственных частот можно выполнить при искусственном возбуждении поперечных колебаний кия под действием внешней периодической силы (так называемые *вынужденные колебания*). Для генерации вынужденных колебаний кий был закреплен консольно в токарном патроне в горизонтальной плоскости. На кончик кия был наклеен сильный постоянный магнит (неодимовый магнит, NdFeB), под магнитом



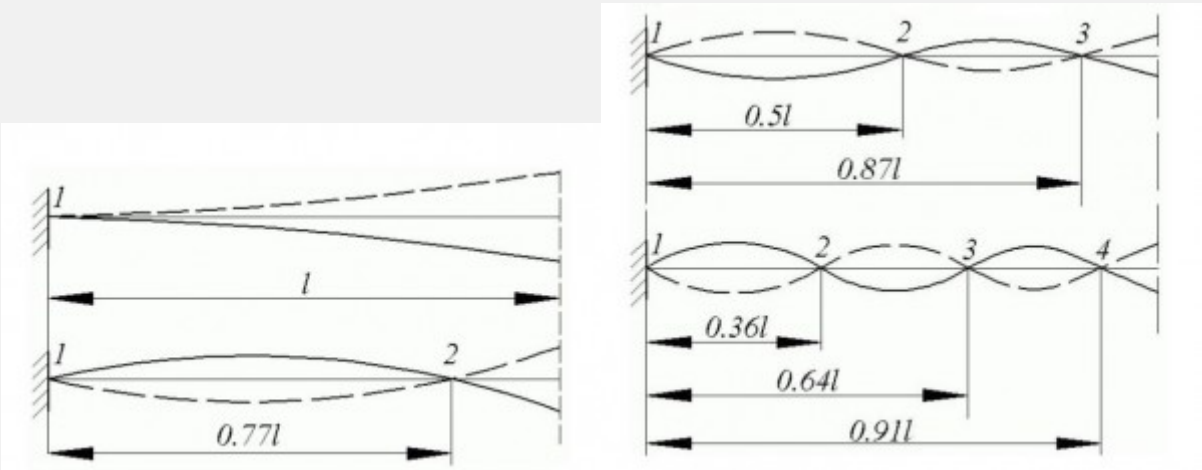
закреплена электрическая катушка, подключенная через усилитель к генератору гармонических сигналов.

Переменное магнитное поле, создаваемое катушкой, возбуждало в кие поперечные колебания заданной частоты. При возбуждении колебания на частотах равных собственным частотам кия, происходил резонанс, сопровождающийся резким увеличением амплитуды колебаний, которая измерялась пьезодатчиком установленным в скрутку.



Четыре характерных максимума амплитуды колебаний соответствует первым четырем собственным частотам кия. Частота F_1 равна приблизительно 8 Гц, F_2=26 Гц, F_3=44 Гц и F_4=94 Гц. В свою очередь, каждая из этих частот соответствует своей поперечной моде

колебания. Большая амплитуда колебаний на частоте F_1 и F_2 позволяет визуально наблюдать деформацию кия на этих частотах. Так, на частоте F_1 видна только одна узловая точка в месте крепления кия, что соответствует С-образной моде колебаний. На частоте колебаний F_2 видно две узловые точки, что соответствует S-образной моде колебаний. Первая узловая точка расположена в месте крепления, вторая – на расстоянии 390мм от наклейки и делит кий в соотношении 0,73L/0,27L. По сравнению с колебанием однородного стержня постоянного сечения в кие, положение второй узловой точки немного смещено в сторону заделки.



Частота 45 Гц, соответствующая третьей моде колебаний, имеет самую маленькую амплитуду даже по сравнению с амплитудой четвертой моды колебаний. Дело в том, что у третей моды колебаний одна из узловых точек (та, где амплитуда колебаний равна 0) приходится практически на скрутку, а именно там располагался пьезодатчик.

Несложно догадаться, что положение скрутки при определенных модах колебаний (для двухсоставного кия это вторая и четвертая моды) точно также может попадать и в области с максимальной амплитудой колебаний (пучности). Такое близкое соседство скрутки кия даже небольшого веса и этих областей может приводить к значительным паразитным раскачкам кия и к изменениям характеристик удара. Если же скрутка установлена вблизи узловой точки, то ее вес будет влиять только на баланс кия.

В заключение хотелось бы сказать, что эта работа не претендует на законченное описание всей сложной механики кия, а является всего лишь попыткой измерения его некоторых характеристик. Логическим продолжением этой работы могли бы стать измерения продольной и поперечной деформаций кия тремя синхронизированными пьезодатчиками, а также сравнение результатов этих измерений для разных конструкций киев.

---

[1] Более подробно об этих теориях и подтверждающих их экспериментах можно прочитать, например, в монографии Н.А. Кильчевского «Теория соударения твердых тел» и обзоре Дж.Ф. Белл “Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел”.

[2] Поскольку сила взаимодействия наклейки кия и битка величина не постоянная в течение всего времени взаимодействия, то удобнее оперировать не силой, а такой величиной, как энергия удара.

[3] Наблюдение о подстройке колебаний было сделано Виталием Архиповым при обсуждении этих результатов на форуме сайта billiard-online.