

**С.Матхэвен, М.Р.Джэксон, Р.М.Паркин**

## **Численные моделирования фрикционных соударений твердых шаров на шероховатой поверхности**

2014

**S.Mathavan, M.R.Jackson, R.M.Parkin**

**Numerical simulations of the frictional collisions of solid balls on a rough surface**

Перевод: С.Тихонов, октябрь 2014

### **Резюме**

В этой статье проводится анализ трехмерных моделирований фрикционных соударений между твердыми шарами, движущимися по шероховатой поверхности. Анализ проводится в контексте двух популярных разновидностей лузного бильярда – Пула и Снукера. Достоверное моделирование движения шара в бильярдных играх имеет применение в телевизионных передачах, обучающих системах и в любых роботизированных системах ведения игры. Изучение соударений твердых шаров в трехмерном пространстве требует тщательного рассмотрения различных явлений, вовлеченных в движение шара – качения, скольжения и вращения шара относительно главных осей. Получен набор дифференциальных уравнений, описывающих динамику шаров при соударениях. При отсутствии точных аналитических решений дифференциальных уравнений представлен численный метод для определения скоростей и вращений после соударения. Кроме того, в работе представлена методика для анализа искривленных траекторий движения шаров со скольжением непосредственно после их контакта. С помощью представленных результатов для ряда экспериментальных ударов показано, что применение предлагаемого метода позволяет уменьшить ошибки вычисления скоростей после соударения. За счет предлагаемого алгоритма моделирования соударения, точности прогнозирования направления перемещения шара повышаются вдвое.

### **Ключевые слова**

Импульс трения · Фрикционный контакт · Твердые шары · Бильярд · Снукер · Пул · Массе

### **Список обозначений**

$e$  – Коэффициент восстановления между шарами

$F$  – Сила

$I$  – Момент инерции шаров

$M$  – Масса шаров

$N$  – Количество итераций

$P$  – Накопленный импульс в любой момент в течение контакта

$P_I^c$  – Накопленный импульс в момент завершения сжатия

$P_I^f$  – Конечное значение накопленного импульса

$R$  – Радиус шаров

$S$  – Скорость скольжения между шарами

$S'$  – Скорость скольжения между битком и столом

$S''$  – Скорость скольжения между прицельным шаром и столом

$V_0$  – Скорость битка при соударении

$W$  – Работа, выполненная импульсом силы

$x$  – Положение шара на столе по оси  $X$

$y$  – Положение шара на столе по оси  $Y$

$z$  – Положение шара на столе по оси  $Z$

$\Delta P$  – Импульс в течение времени  $\Delta t$

$\theta$  – Угол между вектором поступательной скорости битка в момент контакта и линией соударения, проходящей через центры шаров (*обычно этот угол называют углом резки; прим. пер.*)

$\mu_{bb}$  – Коэффициент трения скольжения между шарами

$\mu_s$  – Коэффициент трения скольжения между шаром и сукном

$\Phi$  – Угол, определяющий направление скольжения между шарами

$\Phi'$  – Угол, определяющий направление скольжения между битком и столом

$\Phi''$  – Угол, определяющий направление скольжения между прицельным шаром и столом

$\omega$  – Угловая скорость вращения шара

$\omega_0^T$  – Угловая скорость верхнего вращения шара при соударении

$\omega_0^S$  – Угловая скорость бокового вращения шара при соударении

$\dot{\omega}_r$  – Сопrotивление поверхности стола боковому вращению шара

### **Верхние индексы**

$C$  – Биток

$O$  – Прицельный шар

### **Нижние индексы**

$G$  – Параметры, относящиеся к центру масс шара

$I$  – По направлению нормального импульса, действующего между шарами

$n$  – Номер итерации численного моделирования

$N$  – Общая нормаль в точке взаимодействия шаров и стола (для сил)

$N_f$  – Окончательное количество итераций численного моделирования

$R$  – Вдоль поверхности в точке взаимодействия шаров и стола (для сил трения)

$S$  – В конце этапа движения шара со скольжением

## **1. Введение**

Снукер – вид спорта, относящийся к лузным бильярдным играм, в которых в качестве инструмента используется кий. Еще одной подобной игрой является Пул. Так как физические и динамические явления, свойственные этим обеим играм, аналогичны, то обычно используются термины «физика бильярда» и «динамика бильярда». Помимо этого, ниже в тексте, когда совместно говорится об этих двух играх, применяются общие термины «лузный бильярд» или просто «бильярд». Эти игры однозначно объединяют высокий уровень игровой стратегии и превосходные физические навыки. В последние несколько лет интерес к Снукеру неуклонно рос, причем в Азии – по

экспоненциальной зависимости. В 2011 году почти половина населения Великобритании смотрела трансляции Би-Би-Си с Чемпионата Мира; аудитория телезрителей одновременно достигала 3.9 миллионов человек. А Китайский национальный спортивный телевизионный канал CCTV5 сообщал о телеаудитории, включающей 30 миллионов человек [1]. В такой же степени популярен и Пул, имеющий несколько игровых разновидностей, таких как «восьмерка», в которые играют повсеместно, а особенно – в Соединенных Штатах.

Лузный бильярд всегда ассоциировался с физикой – в силу того, что такие классические научные понятия, как «трение» и «соударение», ассоциируются с игрой. Важно отметить, что самые ранние упоминания об этом в литературе появились уже в 1835 году [2]. За последние два десятилетия был опубликован ряд работ по динамике бильярда. Среди них – работы Салазара и Санчес-Лавега (*Salazar and Sanchez-Lavega*) [3], Де Ля Торре Хуареса (*De La Torre Juárez*) [4] и Кросса (*Cross*) [5, 6]. Кроме того, недавние исследования были сосредоточены на создании роботизированных систем игры в бильярд [7–10], систем обучения [11–13] и на развитии игровых стратегий [14]. В этом контексте, представленная здесь работа является частью исследовательских усилий, направленных на разработку робота-манипулятора для игры в Снукер [15]. Во всех упомянутых выше трех типах систем необходимо для заданного расположения шаров на столе проводить анализ различных возможных ударов с целью выбора из них наилучшего. Возможность придания битку различных вращений и скоростей в сочетании с некоторыми «тонкостями», присущими динамике соударения шаров, обуславливает многообразие траекторий шаров, дающее высокий уровень игровой гибкости (см. рисунок 1).

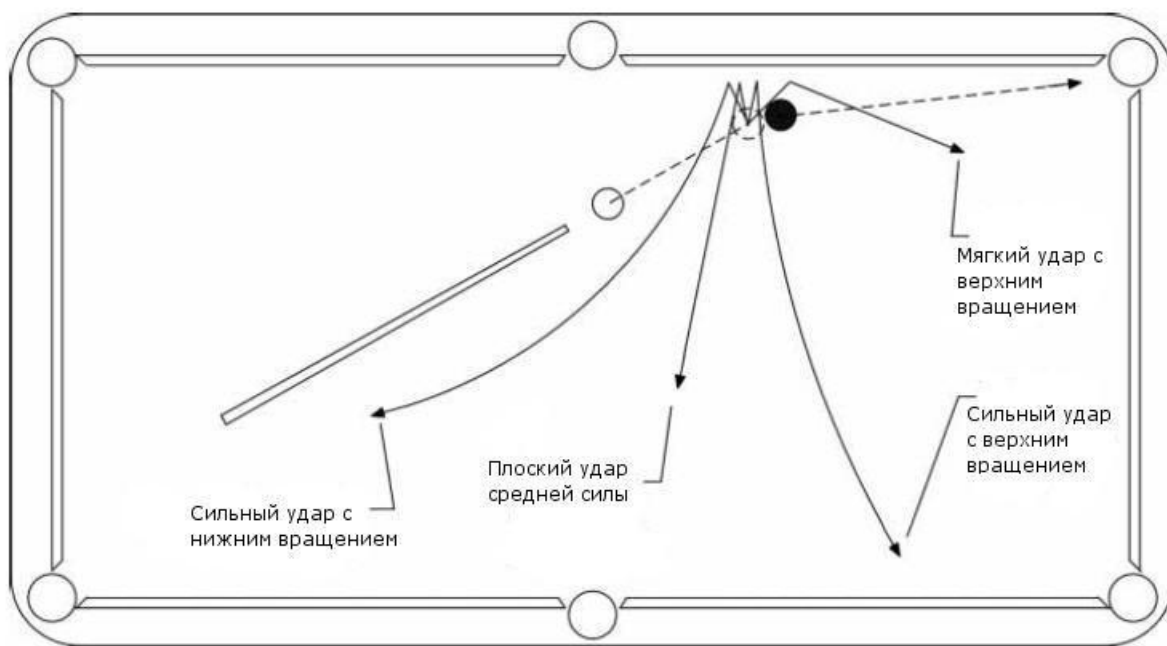


Рис. 1. Конечные положения битка, которому приданы различные вращения, после успешной атаки лузы прицельным шаром [16].

В настоящее время существует огромное количество снукерных компьютерных игр, например таких, как игра *Snooker Skool*, доступная на сайте *Yahoo! Games*. Хотя, большинство виртуальных игр симулируют игру в Снукер в двух измерениях, есть и трехмерные версии [17]. Помимо этого, в телевизионных передачах используются системы отслеживания траекторий шара (такие как *HawkEye* [18]), которые моделируют

и прогнозируют движение. Упомянутые виртуальные игры и прогнозирование траекторий движения будут более реалистичными, если использовать высокоточное моделирование соударений шаров.

Соударения шаров обычно анализируются без учета действия трения. При этом полагается, что после соударения прицельный шар перемещается по линии, проходящей через центры шаров при их контакте [19]. Обширный обзор существующей литературы показывает, что существует две категории моделей соударений на бильярде. В одной из них при анализе соударений шаров вообще не принимается во внимание их вращение. К этой категории относятся работы Де Ля Торре Хуареса [4] и Уолласа со Шрёдером (*Wallace and Schroeder*) [20]. В трех других работах – Марлоу (*Marlow*) [21], Кондич (*Kondic*) [22] и Доменек (*Domenech*) [23] – учитывается эффект вращения шара. Марлоу [21] выдвинул на первый план последствия вращения шаров, но не предложил модели соударения. Работа Кондич [22] ограничивается лишь рассмотрением случая соударений без резки. Доменек [23] представил подробный анализ соударений бильярдных шаров. В этой работе четко учитывается действие касательных импульсов, возникающих при пространственных вращениях шаров; рассматриваются различные случаи контакта между поверхностями шаров, а также между шаром и столом – например, однонаправленное скольжение и различные режимы контакта – сцепляющегося и с проскальзыванием. Для каждого рассмотренного случая представлены аналитические решения. Кроме того, в работе анализируется случай соударения шаров, при котором биток находится в состоянии естественного качения и не обладает боковым вращением; для него рассмотрены условия изменения режимов контакта (сцепление и проскальзывание). Однако, не определено, как на такие условия влияют интенсивности продольного (верхнего и нижнего) и бокового вращений; таким образом, нет возможности аналитически определить углы и скорости после соударения шаров.

Обзор опубликованных работ, рассматривающих соударения шаров, показывает, что общих моделей соударения, учитывающих вращения, не разработано. Лучшая из законченных моделей, с помощью которой можно предсказывать последствия заданного удара, была представлена Уолласом и Шрёдером [20]. В работе Матхэвена, Джэксона и Паркина [24] показано, что применение модели Уолласа и Шрёдера [20] приводит к ошибкам определения направлений движения шара после соударения вплоть до шести градусов. Такая величина угловой неопределенности достаточна для того, чтобы ошибка попадания по лузе прицельного шара, расположенного в 200 мм от нее, составила 20 мм. В такой же мере это относится и к битку, неопределенность угла отражения которого может приводить к совершенно иному конечному положению на столе. Так как точность попадания прицельного шара в лузу и достоверность предсказания положения битка после удара играют первостепенную роль в лузном бильярде, значительные отклонения между фактическими и прогнозируемыми траекториями шаров сказываются на достоверности моделируемой игры. Поэтому, для обеспечения реалистичности моделирования необходимо проведение исследования соударений снукерных или бильярдных шаров в самом общем виде.

В представленном ниже анализе сначала будет получено общее решение для соударения идентичных шаров на резке, а затем будут применены параметры шара для игры в Снукер. Рассмотрим соударение на резке битка  $C$  и прицельного шара  $O$  (см. рисунок 2). Полагается, что оба шара имеют равные массы и радиусы. Обращаясь к рисунку 2, важно отметить, что шар  $C$  не обладает вращением вокруг своей фронтальной оси (вокруг направления вектора поступательной скорости  $V_0$ ); такое вращение характерно для ударов массе, редко встречающихся в Снукере.

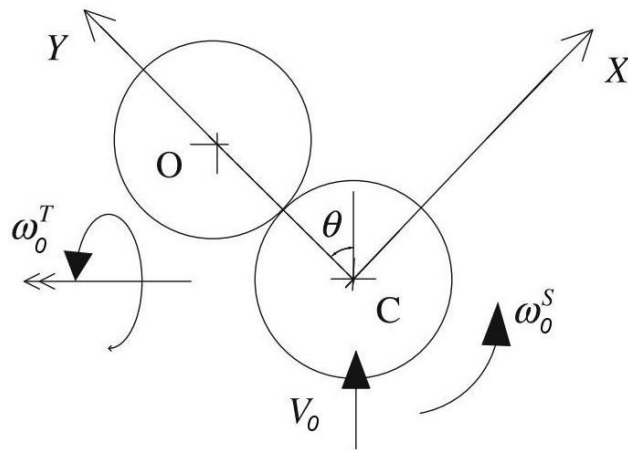


Рис.2. Соударение шаров на резке (направление угловой скорости  $\omega_0^T$  определяется по правилу правой руки).

В силу того, что при соударении сферические тела деформируются, контакт происходит по некоторой ограниченной области их поверхностей. Обычно, размер этой области оценивается с помощью теории Герца. Однако, мы будем полагать характер соударения точечным. Такое же допущение было использовано другими авторами, например – Кондич [22] и Доменек [23].

В этой работе соударения между двумя снукерными шарами изучаются в рамках принципов ударной механики. Следующий раздел посвящен теоретическим выводам. Результаты моделирования представлены и обсуждаются ниже.

## 2. Теория

Предполагается, что шары передвигаются по плоской поверхности; отсюда следует, что точка контакта шаров располагается на высоте  $R$  от этой поверхности (см. рисунок 3).

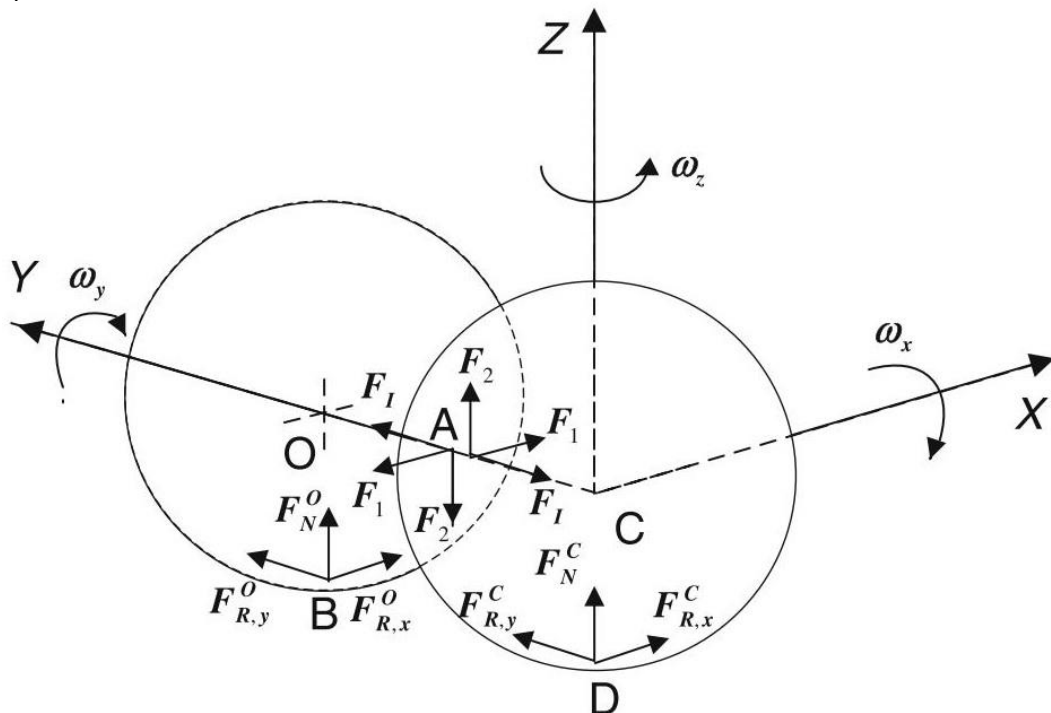


Рис.3. Силы, действующие при соударении шаров.

## 2.1. Общие уравнения движения

Согласно рисунку 3, уравнения поступательного перемещения бита  $C$  в направлениях  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  могут быть представлены в виде (для этого используется дифференциальная форма второго закона Ньютона и проектирование действующих сил на оси системы координат; прим. пер.):

$$F_1 + F_{R,x}^C = M\ddot{x}_G^C, \quad (1a)$$

$$-F_1 + F_{R,y}^C = M\ddot{y}_G^C, \quad (1b)$$

$$F_2 + F_N^C - Mg = M\ddot{z}_G^C. \quad (1c)$$

Здесь  $M$  – масса шара;  $g$  – ускорение свободного падения;  $x_G^C$ ,  $y_G^C$ ,  $z_G^C$  – координаты центра бита.  $F$  обозначает мгновенную нормальную силу, действующую в точках контакта шаров между собой и с поверхностью стола. В уравнениях (1) верхний индекс указывает на тот шар, к которому относится соответствующий параметр. Нижний индекс  $G$  отмечает, что параметр относится к центру масс шара. Таким образом,  $\ddot{z}_G^C$  обозначает ускорение центра масс бита по оси  $Z$ .

Рассматривая бесконечно малый промежуток времени  $\Delta t$ , можно выразить приращение импульса и накопленный импульс следующим образом:

$$\Delta P = \int_t^{t+\Delta t} F dt, \quad (2a)$$

$$P = \sum \Delta P = \int_0^t F dt. \quad (2b)$$

Следующие соотношения получим, используя связь между импульсом силы и изменением количества движения по указанным выше направлениям. Рассматривая момент  $t$  и приращение времени  $\Delta t$  для бита  $C$ , из (1) и (2a) найдем:

$$\Delta P_1 + \Delta P_x^C = M[\dot{x}_G^C(t + \Delta t) - \dot{x}_G^C(t)], \quad (3a)$$

$$-\Delta P_1 + \Delta P_y^C = M[\dot{y}_G^C(t + \Delta t) - \dot{y}_G^C(t)], \quad (3b)$$

$$\Delta P_2 + \Delta P_N^C = M[\dot{z}_G^C(t + \Delta t) - \dot{z}_G^C(t)]. \quad (3c)$$

Следует отметить, что в соотношении (3c) отсутствует слагаемое, учитывающее действие гравитационной силы  $Mg$  на шар. Из работы [4] следует, что в предельном случае, когда  $\Delta t$  стремится к нулю, можно пренебрегать влиянием сил, направление которых не меняется (в частности – гравитационных), на изменение количества движения шара.

Моменты импульса и угловые моменты относительно центра масс бита по направлениям  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  определяются следующим образом (для вращающегося твердого тела момент импульса и угловой момент равны друг другу; в ниже представленных уравнениях левые части соответствуют моментам импульса, а правые – угловым моментам; прим. пер.):

$$(\Delta P_2 + \Delta P_y^C) R = \frac{2MR^2}{5} [\omega_x^C(t + \Delta t) - \omega_x^C(t)]. \quad (3d)$$

$$-\Delta P_x^C R = \frac{2MR^2}{5} [\omega_y^C(t + \Delta t) - \omega_y^C(t)], \quad (3e)$$

$$-\Delta P_1 R = \frac{2MR^2}{5} [\omega_z^C(t + \Delta t) - \omega_z^C(t)]. \quad (3f)$$

Аналогичные наборы уравнений можно получить и для прицельного шара  $O$ . Так, эквивалентным уравнением для (3а) будет следующее соотношение:

$$-\Delta P_1 + \Delta P_x^O = M[\dot{x}_G^O(t + \Delta t) - \dot{x}_G^O(t)]. \quad (4)$$

Пять других уравнений, соответствующих (3b) – (3f), также могут быть выписаны. Здесь они не приведены для экономии места.

## 2.2. Динамика соударения

Пусть в точке соударения  $A$  биток  $C$  обладает скоростью  $S(t)$  относительно прицельного шара  $O$ , направленной под углом  $\Phi(t)$  к оси  $X$  (вектор относительной скорости располагается в плоскости  $XZ$ ). Мгновенная величина нормального импульса  $P_I$  (накопленное к моменту времени  $t$  значение  $\Delta P_I$ ), которая всегда положительна в течение интервала контакта шаров, монотонно возрастает по времени; поэтому, при анализе примем ее в качестве независимой переменной – вместо традиционной переменной  $t$  [25]. Скорости скольжения по осям  $X$  и  $Z$  определяются следующим образом:

$$\dot{x}_A = \dot{x}_A^C - \dot{x}_A^O = S(P_I) \cos[\Phi(P_I)], \quad (5a)$$

$$\dot{z}_A = \dot{z}_A^C - \dot{z}_A^O = S(P_I) \sin[\Phi(P_I)]. \quad (5b)$$

Выразим и нормальную компоненту относительной скорости:

$$\dot{y}_A = \dot{y}_A^C - \dot{y}_A^O = \dot{y}_G^C - \dot{y}_G^O. \quad (5c)$$

Используя закон трения Амонтона – Кулона, для номинальных скоростей скольжения по положительным направлениям осей  $X$  и  $Z$  при скольжении поверхностей шаров друг относительно друга в точке контакта  $A$  будем иметь:

$$\Delta P_1 = -\mu_{bb} \cos[\Phi(P_I)] \Delta P_I, \quad (6a)$$

$$\Delta P_2 = -\mu_{bb} \sin[\Phi(P_I)] \Delta P_I, \quad (6b)$$

где  $\mu_{bb}$  – коэффициент трения скольжения между шарами.

Заметим, что в зависимости от величины вертикальной компоненты скорости скольжения между шарами, то есть значения  $\dot{z}_A$ , определяемого связью (5b), некоторые из импульсов в соотношениях (3) или (4) будут нулевыми. Если величина  $\dot{z}_A$  отрицательна, шар  $C$  в точке контакта  $A$  обладает большей направленной вниз скоростью, чем прицельный шар, и импульс трения между шарами  $\Delta P_2$  будет действовать по оси  $Z$  так, как показано на рисунке 3. Это условие характеризуется неравенством

$$\Delta P_2 > 0. \quad (6c)$$

Если биток не покидает пределов стола, то из (3c) следует, что

$$\Delta P_2 + \Delta P_N^C < 0. \quad (6d)$$

Условия (6с) и (6d) могут быть одновременно удовлетворены, когда

$$\Delta P_N^C < 0, \quad (6e)$$

и очевидно, что условие (6е) невозможно выполнить, так как стол не может придать отрицательную реакцию шару. Поэтому

$$\Delta P_N^C = 0. \quad (6f)$$

Условие (6с) свидетельствует и о том, что и соответствующие импульсы трения отсутствуют, то есть

$$\Delta P_x^C = 0; \Delta P_y^C = 0. \quad (6g)$$

Рассмотрим далее случай, при котором биток отрывается от поверхности стола – так, как это бывает при выполнении удара «джамп»; Кондич [22] и Доменек [23] также рассматривали этот эффект. Тем не менее, в этой работе полагается, что в течение длительности действия импульса шар занимает одинаковое пространственное местоположение прямо над столом без изменения геометрической конфигурации, представленной на рисунке 3. Такое предположение является вполне корректным, так как время действия импульса между шарами весьма мало и заключено в пределах 0.3 миллисекунды [21].

В случае, когда величина  $\dot{z}_A$  положительна, выполняются условия

$$\Delta P_N^O = 0; \Delta P_x^O = 0; \Delta P_y^O = 0. \quad (6h)$$

Наконец, если  $\dot{z}_A$  равно нулю, то

$$\Delta P_2 = 0. \quad (6i)$$

Если имеет место условие (6i), то оба шара (биток и прицельный) контактируют, одновременно находясь на столе либо над его поверхностью. Следовательно

$$\Delta P_N^C = \Delta P_N^O = 0, \quad (6j)$$

и при этом соответствующие фрикционные компоненты также будут нулевыми.

Если биток в течение любого момента контакта касается поверхности стола, то для выполнения условия  $\dot{z}_G^C(t + \Delta t) - \dot{z}_G^C(t) = 0$ , с учетом (3с) должно выполняться равенство

$$\Delta P_N^C = -\Delta P_2 = \mu_{bb} \text{Sin}[\Phi(P_I)] \Delta P_I. \quad (7a)$$

Наоборот, если на столе располагается прицельный шар, то можно показать, что для выполнения условия  $\dot{z}_G^O(t + \Delta t) - \dot{z}_G^O(t) = 0$  необходимо соблюдение следующего равенства:

$$\Delta P_N^O = \Delta P_2 = -\mu_{bb} \text{Sin}[\Phi(P_I)] \Delta P_I. \quad (7b)$$



Если биток, соприкасаясь со столом в точке  $D$ , проскальзывает по его поверхности со скоростью  $S'$ , направленной под углом  $\Phi'$  к оси  $X$  (вектор  $S'$  располагается в плоскости  $XY$ ), то из (7а) следует условие скольжения:

$$\Delta P_x^C = -\mu_s \text{Cos} [\Phi' (P_I)] \Delta P_N^C = -\mu_{bb} \mu_s \text{Sin} [\Phi' (P_I)] \text{Cos} [\Phi' (P_I)] \Delta P_I. \quad (8a)$$

Аналогичные выражения можно получить для компонент по оси  $Y$  и по осям  $X$  и  $Y$  для прицельного шара, проскальзывающего по поверхности стола со скоростью  $S''$ , направленной под углом  $\Phi''$  к оси  $X$  (вектор  $S''$ , так же как и  $S'$ , располагается в плоскости  $XY$ ). Не приводя их здесь, обозначим через (8b) – (8d).

В (8а)  $\mu_s$  представляет собой коэффициент трения скольжения между шарами и поверхностью стола. Выразим скорости скольжения:

$$\dot{x}_D = \dot{x}_D^C = S' (P_I) \text{Cos} [\Phi' (P_I)], \quad (9a)$$

$$\dot{y}_D = \dot{y}_D^C = S' (P_I) \text{Sin} [\Phi' (P_I)], \quad (9b)$$

или

$$\dot{x}_B = \dot{x}_B^O = S'' (P_I) \text{Cos} [\Phi'' (P_I)], \quad (9c)$$

$$\dot{y}_B = \dot{y}_B^O = S'' (P_I) \text{Sin} [\Phi'' (P_I)]. \quad (9d)$$

Ниже, для простоты не будем явно указывать зависимость величин от независимой переменной  $P_I$ . Например, величина  $S' (P_I)$  будет обозначаться просто  $S'$ .

### 2.2.1. Условия качения

Когда имеет место качение, скорость скольжения  $S$  (или  $S'$  и  $S''$  для скольжения по столу) обращается в нуль. В этом частном случае относительное движение тел в точке контакта прекращается, а силы трения скольжения перестают действовать.

1. Когда между шарами нет проскальзывания (то есть,  $S = 0$ ), их сферические поверхности прокатываются друг относительно друга в точке контакта  $A$ . При этом  $\Delta P_1 = \Delta P_2 = 0$ , а поэтому  $\Delta P_N^O = \Delta P_x^O = \Delta P_y^O = 0$ .
2. При  $S' = 0$  справедливо равенство  $\Delta P_x^C = \Delta P_y^C = 0$ , и биток естественно катится по игровой поверхности без скольжения.
3. При  $S'' = 0$  справедливо равенство  $\Delta P_x^O = \Delta P_y^O = 0$ , и прицельный шар естественно катится по поверхности стола.

### 2.2.2. Коэффициент восстановления

Согласно работе [25], коэффициент восстановления энергии  $e$  не зависит от трения и протекания процесса скольжения. Квадрат величины  $e$  представляет собой взятое с обратным знаком отношение работы, выполненной импульсом силы на стадии восстановления формы, к работе, выполненной на стадии сжатия. Обозначим через  $P_I^f$  значение накопленного импульса в момент окончания действия импульса, а через  $P_I^C$  – накопленный импульс в момент завершения сжатия. Нетрудно показать, что выполненная работа выражается соотношением:

$$\Delta W_y = \int F_I \dot{y}_A dt = \int \dot{y}_A dP_I. \quad (10a)$$

Коэффициент восстановления определяется связью

$$e^2 = - \int_{P_I^C}^{P_I^f} y_A dP_I / \int_0^{P_I^C} y_A dP_I, \quad (10b)$$

которую можно переписать в виде

$$W_y(P_I^f) = (1 - e^2) W_y(P_I^C). \quad (10c)$$

Сжатие заканчивается, когда нормальная компонента относительной скорости обращается в нуль, то есть – при выполнении условия:

$$y_A(P_I^C) = 0. \quad (10d)$$

### 2.3. Соотношения для скорости

Скорость любой точки, находящейся на поверхности шара, можно выразить с помощью скорости центра масс в векторном виде:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}. \quad (11a)$$

Здесь  $\mathbf{V}$  – вектор поступательной скорости рассматриваемой точки;  $\mathbf{V}_G$  – вектор поступательной скорости центра шара;  $\boldsymbol{\omega}$  – вектор угловых скоростей вращения шара вокруг его центра;  $\mathbf{R}$  – вектор, определяющий пространственное положение рассматриваемой точки относительно центра шара;  $\times$  – символ векторного произведения.

Для точки контакта шаров  $A$  из уравнения (11a) имеем:

$$\dot{x}_A^C = \dot{x}_G^C - R\omega_z^C; \quad \dot{z}_A^C = \dot{z}_G^C + R\omega_x^C; \quad \dot{x}_A^O = \dot{x}_G^O + R\omega_z^O; \quad \dot{z}_A^O = \dot{z}_G^O - R\omega_x^O. \quad (11b)$$

Аналогичные выражения можно получить для точек  $D$  и  $B$  для битка и прицельного шара.

С использованием вытекающей из (11a) связи

$$\Delta \mathbf{V} = \Delta \mathbf{V}_G + \Delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}, \quad (11c)$$

получим аналоги указанных уравнений в конечных разностях:

$$\Delta \dot{x}_A^C = \Delta \dot{x}_G^C - R\Delta\omega_z^C; \quad \Delta \dot{z}_A^C = \Delta \dot{z}_G^C + R\Delta\omega_x^C; \quad \Delta \dot{x}_A^O = \Delta \dot{x}_G^O + R\Delta\omega_z^O; \quad \Delta \dot{z}_A^O = \Delta \dot{z}_G^O - R\Delta\omega_x^O. \quad (11d)$$

$$\Delta \dot{x}_D^C = \Delta \dot{x}_G^C - R\Delta\omega_y^C; \quad \Delta \dot{y}_D^C = \Delta \dot{y}_G^C + R\Delta\omega_x^C. \quad (11e)$$

$$\Delta \dot{x}_B^O = \Delta \dot{x}_G^O - R\Delta\omega_y^O; \quad \Delta \dot{y}_B^O = \Delta \dot{y}_G^O + R\Delta\omega_x^O. \quad (11f)$$

### 2.4. Решение для скоростей шаров

С помощью выражений, полученных в предыдущем разделе, и в зависимости от того, какой шар не касается поверхности стола (то есть, когда выполняются условия  $\Delta P_N^C = 0$  или  $\Delta P_N^O = 0$ ), можно получить две системы из двенадцати дифференциальных уравнений. Кроме того, еще одна подобная система получается для условия  $\Delta P_2 = 0$ , соответствующего случаям, когда оба шара одновременно находятся на столе или над

его поверхностью. Ни для одной из этих трех систем дифференциальных уравнений нельзя отыскать аналитического решения. Однако, возможно решение с помощью численной процедуры. Например, в задаче соударения вращающихся сфер, находящихся в воздушном пространстве, Кейн и Левинсон (*Kane and Levinson*) [26] предложили схему для определения вариаций скоростей скольжения и пр. в течение интервала контакта для обеих сфер. Там же дополнительно находится и численное решение.

Работу, выполненную за счет приращения нормального импульса между шарами  $\Delta P_I$ , следует рассчитывать численно с помощью соотношения (10а):

$$(W_y)_{n+1} - (W_y)_n = \Delta P_I \frac{[(\dot{y}_A)_{n+1} + (\dot{y}_A)_n]}{2}. \quad (12)$$

Пояснения к численному алгоритму приведены в разделе 2.4.3.

#### 2.4.1. Начальные условия

При  $P_I = 0$  скорости центра масс бита определяются соотношениями

$$(\dot{x}_G^C)_1 = V_0 \sin \theta, \quad (\dot{y}_G^C)_1 = V_0 \cos \theta, \quad (\dot{z}_G^C)_1 = 0, \quad (13a)$$

а угловые скорости можно вычислить следующим образом:

$$(\omega_x^C)_1 = -\omega_0^T \cos \theta, \quad (\omega_y^C)_1 = \omega_0^T \sin \theta, \quad (\omega_z^C)_1 = \omega_0^S. \quad (13b)$$

Для прицельного шара начальные условия – нулевые:

$$(\dot{x}_G^O)_1 = 0, \quad (\dot{y}_G^O)_1 = 0, \quad (\dot{z}_G^O)_1 = 0, \quad (\omega_x^O)_1 = 0, \quad (\omega_y^O)_1 = 0, \quad (\omega_z^O)_1 = 0. \quad (13c)$$

Начальная скорость и угол скольжения между шарами:

$$S(0) = \left| \sqrt{(V_0 \sin \theta - R\omega_0^S)^2 + (R\omega_0^T \cos \theta)^2} \right|, \quad \Phi(0) = \arctg \left( -\frac{R\omega_0^T \cos \theta}{V_0 \sin \theta - R\omega_0^S} \right). \quad (13d)$$

Начальная скорость скольжения между прицельным шаром и столом:

$$S''(0) = 0. \quad (13e)$$

Начальная скорость и угол скольжения между битком и столом:

$$S'(0) = |V_0 - R\omega_0^T|, \quad \Phi'(0) = 0. \quad (13f)$$

#### 2.4.2. Значения коэффициентов трения и восстановления

Определим значения коэффициентов трения между шарами  $\mu_{bb}$ , между шарами и поверхностью стола  $\mu_s$ , а также коэффициента восстановления при соударении шаров  $e$ . Авторы нашли, что коэффициент трения скольжения между шарами и столом  $\mu_s$  для Снукера заключен в пределах от 0.178 до 0.245 [24]. В этой работе для

моделирования было использовано среднее значение, равное 0.21. Значения параметров  $\mu_{bb}$  и  $e$ , приведенные в литературе, весьма расплывчаты. Лишь в работе Марлоу [21] дана вполне конкретная информация по этому поводу. (Здесь авторы что-то недоработали или кривят душой. Подобную информацию можно найти не только у Марлоу, но и в целом ряде других источников. Прим. пер.). Для хорошо отполированных шаров Марлоу предлагает значение коэффициента  $\mu_{bb}$ , равное 0.06. (Кстати, Г.Кориолис в своей известной книге «[Математическая теория явлений бильярдной игры](#)» предлагал несколько меньшее значение  $\mu_{bb} = 0.03$ , которое он нашел в результате самостоятельно проведенных опытов. Прим. пер.). Кроме того, в случае, когда поверхность шаров загрязнена (например, мелом), Марлоу полагает, что величина  $\mu_{bb}$  может возрасти вплоть до 0.2. Марлоу также привел противоречивую зависимость коэффициента трения  $\mu_{bb}$  от скорости скольжения между шарами  $S$  в виде

$$\mu_{bb} = 0.009951 + 0,108 e^{-1.088S} .$$

Здесь  $e$  – основание натурального логарифма; величина скорости  $S$  должна быть выражена в м/с (На мой взгляд, ничего противоречивого, как утверждают авторы, в этой формуле нет. Марлоу вполне логично и подробно объясняет – как такая зависимость была получена на основании экспериментальных данных. К сожалению, книга [21] довольно редка, и ознакомиться с ее содержанием мало кому довелось. Но вывод обсуждаемой формулы аккуратно и дотошно изложен в работе Доктора Дэйва (David Alciatore aka Dr. Dave) «[Влияние угла резки, скорости и вращения битка на отброс прицельного шара](#)», свободно доступной в Интернете. Представляется, что зависимость была получена для «чистых» новых шаров, используемых для игры в Пул. Модель, учитывающая изменение коэффициента трения скольжения в зависимости от скорости, демонстрирует гораздо более реалистичное приближение к истине, чем «статичная» модель с зафиксированной величиной  $\mu_{bb}$ . Полагаю, что упомянутое выше постоянное значение  $\mu_{bb} = 0.06$  именно и соответствует статичной модели, возможность применения которой вполне допускал Марлоу. Возможно также, что авторы назвали зависимость  $\mu_{bb}$  от  $S$  противоречивой, потому что из нее никак не «вытекает» и величина  $\mu_{bb} = 0.2$ , «объявленная» Марлоу. Ну, а как она может вытекать, если это значение соответствует грязным и потертым шарам, а Марлоу, по всей видимости, проводил эксперимент с практически идеальным комплектом шаров? Прим. пер.). Эксперименты, проведенные для получения этой зависимости, представляются не вполне достоверными. Согласно Марлоу, величина  $e$  больше, чем 0.92. Проведенные авторами измерения с использованием высокоскоростной видеосъемки, представляются гораздо более точными по сравнению с методами, использованными Марлоу [21]; и поэтому результаты этих измерений используются для расчетов и моделирования.

Для отыскания значений коэффициента восстановления и коэффициента трения скольжения были использованы как экспериментальные данные, представленные на рисунке 4, так и результаты проведенных численных расчетов. Основное соображение заключалось в том, чтобы воспроизвести экспериментальные значения путем численного моделирования, подбирая при этом два численных значения методом проб и ошибок. Экспериментальный график, изображенный на рисунке 4, был получен для следующих значений: угол резки  $\theta = 0^\circ$ ; угловая скорость бокового вращения битка

$\omega_0^S = 0$ ; угловая скорость верхнего вращения битка  $\omega_0^T = V_0/R$ . (Иными словами, рассматривался случай соударения шаров в лоб – то есть, без резки; биток не обладал боковым вращением и в момент контакта с прицельным шаром находился в состоянии естественного качения; прим. пер.). Для каждого значения поступательной скорости битка при соударении  $V_0$ , представленного на рисунке 4, рассчитывалась величина поступательной скорости  $\dot{y}_G^O(P_I^f)$ , приобретаемой прицельным шаром в момент прекращения контакта; при этом рассматривались величины коэффициента восстановления  $e$  в интервале значений от 0.7 до 1 с шагом 0.01 и коэффициента трения между шарами  $\mu_{bb}$  в интервале значений от 0 до 0.2 с шагом 0.01. При фиксированных значениях пар коэффициентов  $e$  и  $\mu_{bb}$  для всех величин  $V_0$  определялись, а затем суммировались квадраты отклонений экспериментально определенных величин  $\dot{y}_G^O(P_I^f)$  от аналогичных величин, полученных расчетным путем. В итоге было найдено, что минимальная сумма квадратов отклонений достигается при значениях  $\mu_{bb} = 0.05$  и  $e = 0.89$ . Следует отметить, что эти значения хорошо согласуются с коэффициентами Марлоу [21]  $\mu_{bb} = 0.06$  и  $e = 0.92$ . (Таким образом, авторы воспользовались тривиальным перебором в сочетании с идеей метода наименьших квадратов; прим. пер.).

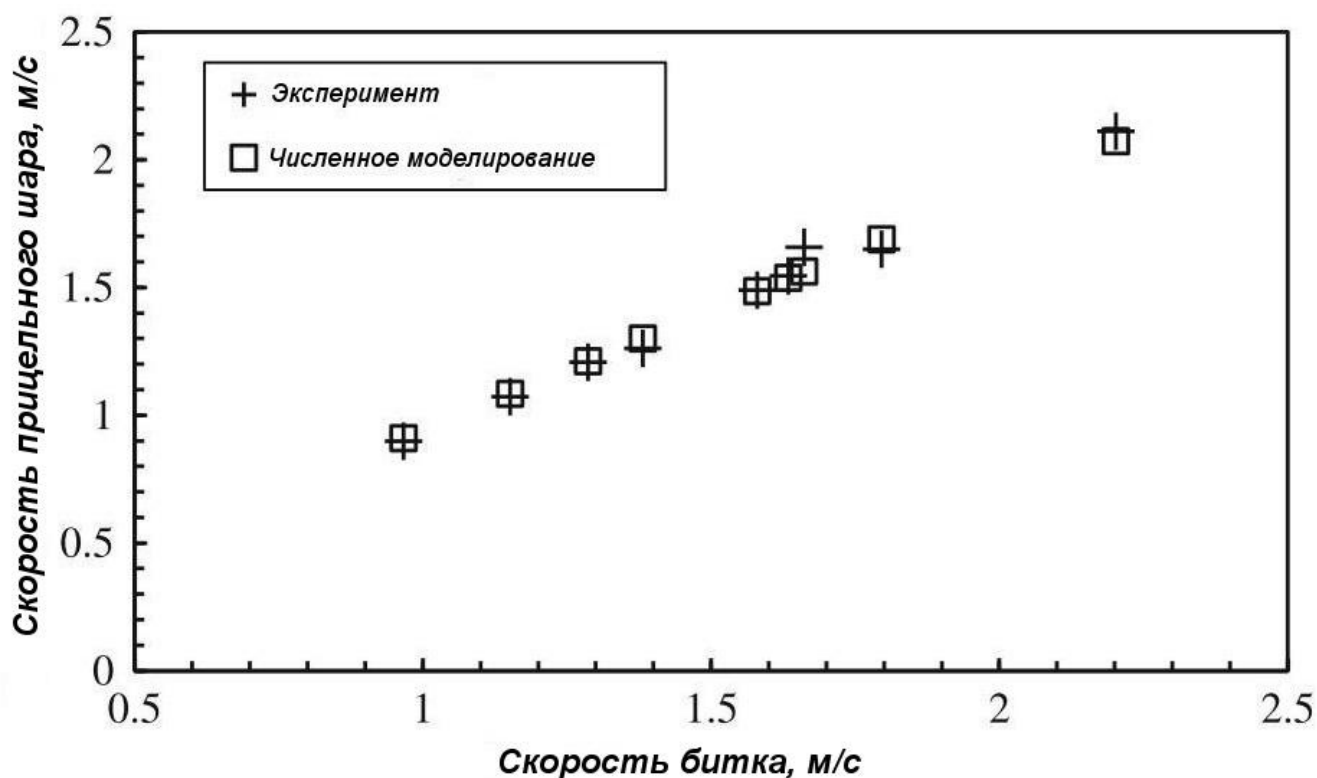


Рис. 4. Результаты эксперимента и численного расчета для  $\mu_{bb} = 0.05$  и  $e = 0.89$ , полученные при  $\theta=0^\circ$ ;  $\omega_0^S = 0$ ;  $\omega_0^T = V_0/R$ .

### 2.4.3. Численный алгоритм

Масса шара для Снукера  $M$  и его радиус  $R$  составляют, соответственно, 0.1406 кг и 26.25 мм. Численный алгоритм был реализован с помощью языка программирования MATLAB®. Исходными данными для вычислительной схемы являются значения скоростей битка ( $V_0$ ,  $\omega_0^T$ ,  $\omega_0^S$ ) и угла резки  $\theta$ . Использование меньших значений прироста нормального импульса  $P_I$  (то есть,  $\Delta P_I$ ), который выбран в качестве независимой

переменной, приводит к более точным результатам. Задачей вычислительной процедуры является отыскания скоростей шаров в момент, когда накопленный импульс станет равен  $P_I^f$ .

Чтобы начать вычислительную процедуру, необходимо задать приемлемое значение  $\Delta P_I$ . Для расчета предварительной оценки величины  $P_I^f$  можно использовать значение  $(1 + e)MV_0 \cos \theta$ , являющееся величиной конечного накопленного нормального импульса горизонтально перемещающегося прицельного шара, не имеющего вращения и соударяющегося с жесткой вертикальной стенкой. Следовательно, для  $N$  итераций (шагов) можно найти приближенное значение

$$\Delta P_I = (1 + e)MV_0 \cos \theta / N. \quad (14)$$

Очевидно, что величины накопленного импульса в момент завершения сжатия и конечное значение накопленного импульса (то есть,  $P_I^c$  и  $P_I^f$ ) определяют истинное количество итераций, которое получится при расчетах.

На каждой итерации вычислительной схемы определяется состояние шаров в точках контакта  $A$ ,  $B$  и  $D$ , то есть выясняется – какой режим (качение или скольжение) реализуется в текущей ситуации, а также определяется – где находятся шары (на поверхности или над ней). С этой целью используются наборы соотношений из раздела 2.2. Затем, для каждого приращения нормального импульса между шарами  $\Delta P_I$  программа сначала вычисляет приращения импульсов, которые определяют изменения компонент скоростей для обоих шаров – при этом используются соотношения (3) и (4). В результате, подсчитываются приращения скоростей с последующим определением новых величин скоростей шаров – как поступательных, так и угловых. Также оценивается (при помощи соотношения (12)) и приращение выполненной работы. Наконец, определяется режим движения в точках  $A$ ,  $B$  и  $D$ , и алгоритм продолжается до того состояния, когда нормальная относительная скорость между шарами (см. (5с)) станет отрицательной, то есть – до окончания фазы сжатия. Работа, выполненная до этой итерации, будет равна  $W_y(P_I^c)$ . С помощью этого значения, из (10с) легко вычисляется величина  $W_y(P_I^f)$ . Численный алгоритм следует остановить, когда будет выполнено условие

$$W = W_y(P_I^f). \quad (15)$$

## 2.5. Параболическая траектория движения после соударения

Применение численной схемы, представленной в разделе 2.4.2, показывает, что в общем случае после соударения оба шара будут обладать вращением вокруг направления своего поступательного перемещения. На рисунке 5 изображена траектория шара, вращающегося с угловой скоростью  $\omega_1$  вокруг оси, по которой направлен вектор скорости центра масс  $V$ . В этом случае, независимо от того, каковы при этом две другие вращательные компоненты, шар будет перемещаться по изогнутой траектории. В бильярде это называется «массе» [21]. Чтобы заставить шар так двигаться сразу же после контакта с кием, нужно нанести удар по шару, наклонив кий к игровой плоскости. *(Но и этого мало! Необходимо еще выполнить удар, сместив плоскость удара в сторону от вертикальной плоскости, проходящей через центр битка – иначе, эффекта массе не удастся добиться. Прим. пер.)*. Изогнутые траектории также имеют место и после соударений шаров (а также после соударений бильярдного шара с бортом). Именно этот случай и представляет здесь интерес. Тем

не менее, выводы, представленные в этом разделе, по существу применимы для любого удара, порождающего эффект криволинейности траектории.

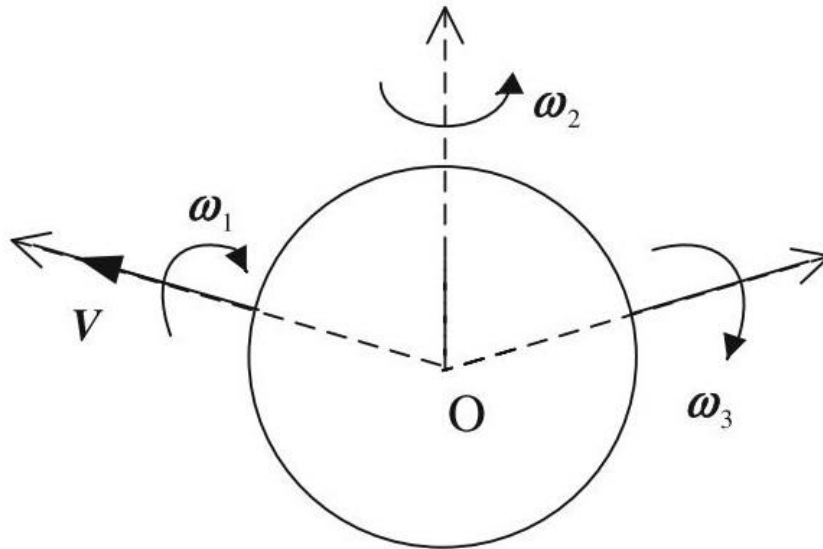


Рис.5. Шар, вращающийся вокруг оси своего поступательного перемещения.

Для примера, рассмотрим проявление эффекта массе по отношению к прицельному шару  $O$ . Трение между шаром и поверхностью стола обычно придает вращение вокруг оси поступательной скорости шара – подобно тому, как вращается пуля. За счет этого, траектория прицельного шара искривляется сразу же после прекращения контакта с битком, приводя к тому, что конечное направление перемещения не совпадает с направлением импульса при разделении. Такой эффект особенно заметен при больших величинах  $\mu_{bb}$ . Пользуясь математическими терминами, можно сказать, что при окончании контакта шаров, когда после последней итерации численного алгоритма  $n$  равно  $N_f$ , это условие искривления создается при

$$\Phi''_{N_f} = \beta_{N_f} \cdot \quad (16)$$

Здесь  $\beta_{N_f}$  – угол, определяющий направление скорости перемещения центра масс прицельного шара, который можно найти из соотношения

$$\text{Tg } \beta_{N_f} = \frac{(\dot{y}_G^O)_{N_f}}{(\dot{x}_G^O)_{N_f}}, \quad (17)$$

а  $\Phi''$  – направление скорости скольжения по столу. Можно показать, что последующая траектория движения шара имеет параболический вид. Ее удобно рассмотреть в системе координат  $X'Y'$ , повернутой по отношению к системе  $XY$  на угол  $\psi$  (см. рисунок 6). Угол  $\psi$  определяется связью

$$\text{Tg } \psi = -\frac{1}{\text{Tg } \Phi''_{N_f}}, \quad (18)$$

а угол  $\Phi''_{N_f}$  получается из численного алгоритма, приведенного в разделе 2.4.3. Выражения для расчета значений  $X'_V$  и  $Y'_V$  приведены в работе Хопкинса и Паттерсона

(Hopkins and Patterson) [27], в которой детально проанализирована изогнутая траектория шара для игры в боулинг. (Совершенно неведомо – зачем здесь нужно было приплетать литературу, связанную с боулингом, а не бильярдом? Конечно же, такие соотношения – вовсе не редкость. С ними можно познакомиться и в массе других источников. Уже в 1835 году они были получены и приведены Г.Кориолисом в вышедшей в свет [книге](#). Прим. пер.).

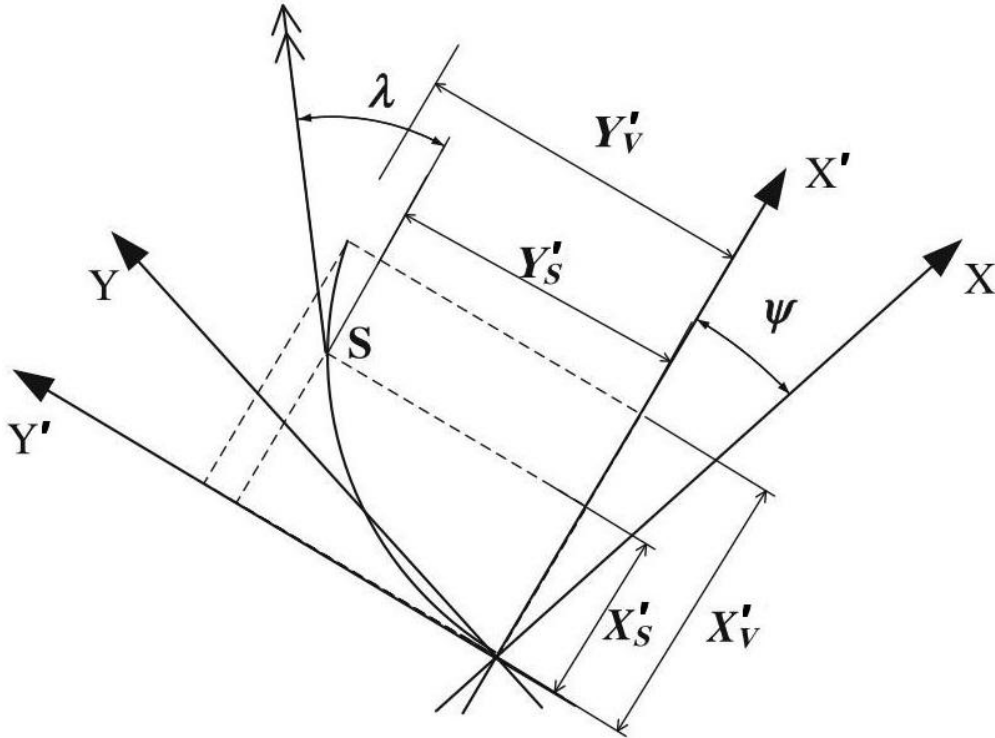


Рис.6. Искривленная траектория прицельного шара.

Время движения шара  $T_S$  до точки траектории  $S$ , в которой прекращается скольжение и начинается естественное качение (а, соответственно, изогнутый участок движения заканчивается, и далее траектория приобретает прямолинейный вид; прим. пер.), можно определить из зависимости

$$T_S = \frac{2 S''_{Nf}}{7 \mu_S g}, \quad (19)$$

в которой  $S''_{Nf}$  – скорость скольжения прицельного шара в момент завершения контакта шаров, полученная на последнем шаге численного расчета. Используя выводы Хопкинса и Паттерсона [27], а также соотношение (18), можно получить выражения для  $X'_S$  и  $Y'_S$ , а также для компонент скорости  $\dot{X}'_S$  и  $\dot{Y}'_S$  в конце криволинейного участка траектории.

Поступательная скорость шара  $V_S$  в точке траектории  $S$  определяется зависимостью

$$V_S^2 = \dot{X}'_S^2 + \dot{Y}'_S^2 \quad (20a)$$

и направлена под углом  $\theta_S$  к оси  $X$  в системе координат  $XY$ :



$$\theta_s = \psi + \lambda = \psi + \operatorname{arctg}\left(\frac{Y'_S}{X'_S}\right). \quad (20b)$$

Соотношения (20a) и (20b) полностью определяют движение шара после завершения этапа скольжения, за исключением того, что не дают информации о боковом вращении. Угловая скорость такого вращения сразу же по завершении контакта шаров известна на «выходе» численного алгоритма. Величина угловой скорости при прекращении скольжения (при  $t = T_s$ ) может быть найдена с помощью следующих зависимостей:

$$\omega_z^O(t) = (\omega_z^O)_{N_f} - \dot{\omega}_r t, \text{ если } (\omega_z^O)_{N_f} > 0 \text{ и } t < \left| \frac{(\omega_z^O)_{N_f}}{\dot{\omega}_r} \right|. \quad (21a)$$

$$\omega_z^O(t) = (\omega_z^O)_{N_f} + \dot{\omega}_r t, \text{ если } (\omega_z^O)_{N_f} < 0 \text{ и } t < \left| \frac{(\omega_z^O)_{N_f}}{\dot{\omega}_r} \right|. \quad (21b)$$

$$\omega_z^O(t) = 0, \text{ если } t \geq \left| \frac{(\omega_z^O)_{N_f}}{\dot{\omega}_r} \right|. \quad (21c)$$

Здесь  $\dot{\omega}_r$  – сопротивление стола боковому вращению шара, величина которого была измерена первым из авторов для снукерных шаров; она составляет 22 рад/с<sup>2</sup>[15]. Следует отметить, что в качестве положительного направления бокового вращения шара было принято вращение по часовой стрелке, если наблюдать за шаром сверху вниз. В то время, когда шар движется со скольжением, условия для его скоростей и вращений также приведены в работе [27]. Дополнительно, интенсивность бокового вращения шара может быть оценена с помощью соотношения (21a).

### 3. Результаты и обсуждение

Для оценки точности, обеспечиваемой предлагаемой в этой работе методикой, были использованы данные о пяти ударах и соответствующих им соударениях шаров при игре в Сункер [24]. Для того чтобы отслеживать движение шаров, авторы использовали установленную над столом высокоскоростную видеокамеру, обеспечивающую пространственное разрешение 1 мм и позволяющую определять местоположение шара на столе с точностью 0.25 мм. Была придумана экспериментальная методика, основанная на диаграммах зависимости скорости от времени перед соударением, для битка, находящегося в состоянии естественного качения. Были рассмотрены только удары, приводящие биток к качению, при котором угловая скорость верхнего вращения  $\omega_0^T$  равна отношению поступательной скорости к радиусу  $V_0/R$ . Однако, угловые скорости бокового вращения битка перед соударением не могут быть измерены [24]. Но, с другой стороны, интенсивность бокового вращения битка весьма мала, если наносить удар в точки битка, расположенные как можно ближе к вертикальной плоскости, проходящей через центр шара. В представленной ниже таблице 1 приведены расчетные и измеренные величины скоростей шаров в конце этапов движения со скольжением после соударения (то есть,  $V_s$ ). Информация об исходных данных, использованных в этом разделе, и методологии, принятой для их получения, детально изложена в работе [24].

Для проведения моделирования были использованы пять экспериментальных ударов, данные о которых были представлены в [24]. Сравнение результатов, размещенных в таблице 1, с аналогичными результатами, полученными по методике Уолласа и Шрёдера [20], показывает, что предлагаемая здесь методика позволяет

снизить ошибки предсказания на порядок (см. также рисунок 7). Выполняя удары при игре в Снукер, важно не только отправить прицельный шар в лузу, но и добиться конечной позиции битка, перспективной для успешного продолжения серии. Поэтому, для предсказания положения битка важно иметь точную информацию о его скорости непосредственно после соударения с прицельным шаром. Следовательно, с точки зрения перспектив создания бильярдных роботов, представленный в этой работе алгоритм можно использовать в качестве хорошего «предсказателя» позиции битка.

Скорость битка $V_0$ (м/с)	Угловая скорость верхнего вращения $\omega_0^+$ , рад/с	Угол резки $\theta$ , град	Измеренное значение $V_s$ для битка, м/с	Измеренное значение $V_s$ для прицельного шара, м/с	Предсказанное значение $V_s$ для битка, м/с	Предсказанное значение $V_s$ для прицельного шара, м/с	Ошибка в $V_s$ для битка, %	Ошибка в $V_s$ для пр. шара, %
1.539	58.63	33.83	0.816	0.836	0.914	0.831	10.70	-0.62
1.032	39.31	26.36	0.520	0.629	0.520	0.599	-0.03	-5.00
1.364	51.96	40.52	0.925	0.700	0.917	0.676	-0.90	-3.52
1.731	65.94	46.50	1.275	0.787	0.128	0.780	0.18	-0.94
0.942	35.89	18.05	0.365	0.581	0.383	0.579	4.81	-0.38

Таблица 1. Теоретически предсказанные и экспериментальные значения скоростей

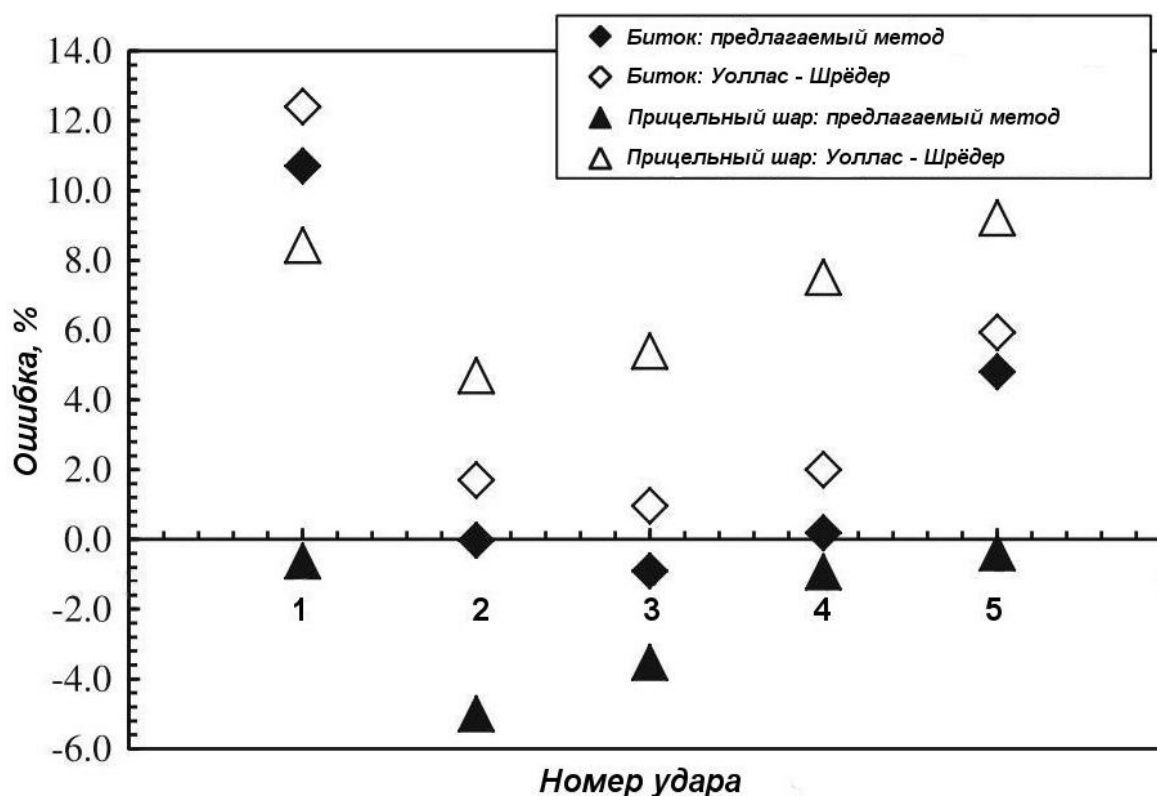


Рис.7. Сравнение ошибок предсказания скоростей битка и прицельного шара  $V_s$ , полученных предлагаемым методом и по методике Уолласа и Шрёдера [20].

Для тех же самых ударов, которые были рассмотрены при формировании таблицы 1, представлены предсказанные и измеренные угловые величины (см. таблицу 2). Все спрогнозированные значения углов сравниваются с результатами измерений для пяти ударов. По сравнению с предсказаниями, не учитывающими вращения шара [20,24], предлагаемый в этой работе метод позволяет уменьшить ошибки вычисления конечных углов траектории битка  $\theta_s$  вплоть до шести раз, как это

показано на рисунке 8. Ошибка предсказания конечных углов прицельного шара снижается с 9 – 12% (как представлено в [24]) до 5% и ниже (см. таблицу 2 и рисунок 8). Для реалистичности бильярдного моделирования точность предсказания конечного угла прицельного шара крайне важна, так как непосредственно влияет на точность попадания в лузу. Указанные выше снижения ошибок предсказания конечных углов движущихся шаров свидетельствуют о том, что модель, учитывающая вращения при соударении, предпочтительней моделей, не принимающих такие вращения во внимание.

Скорость битка $V_0$ (м/с)	Угловая скорость верхнего вращения $\omega'_0$ , рад/с	Угол резки $\theta$ , град	Измеренное значение $\theta_s$ для битка, м/с	Измеренное значение $\theta_s$ для прицельного шара, град	Предсказанное значение $\theta_s$ для битка, град	Предсказанное значение $\theta_s$ для прицельного шара, град	Ошибка в $\theta_s$ для битка, %	Ошибка в $\theta_s$ для пр. шара, %
1.539	58.63	33.83	35.96	33.83	31.93	32.20	-11.21	-4.81
1.032	39.31	26.36	33.20	26.36	32.45	25.07	-2.27	-4.91
1.364	51.96	40.52	30.50	40.51	29.91	38.62	-0.90	-4.67
1.731	65.94	46.50	27.97	46.50	27.32	44.38	-2.34	-4.57
0.942	35.89	18.05	29.86	18.05	29.47	17.15	-1.31	-4.99

Таблица 2. Теоретически предсказанные и экспериментальные значения конечных углов

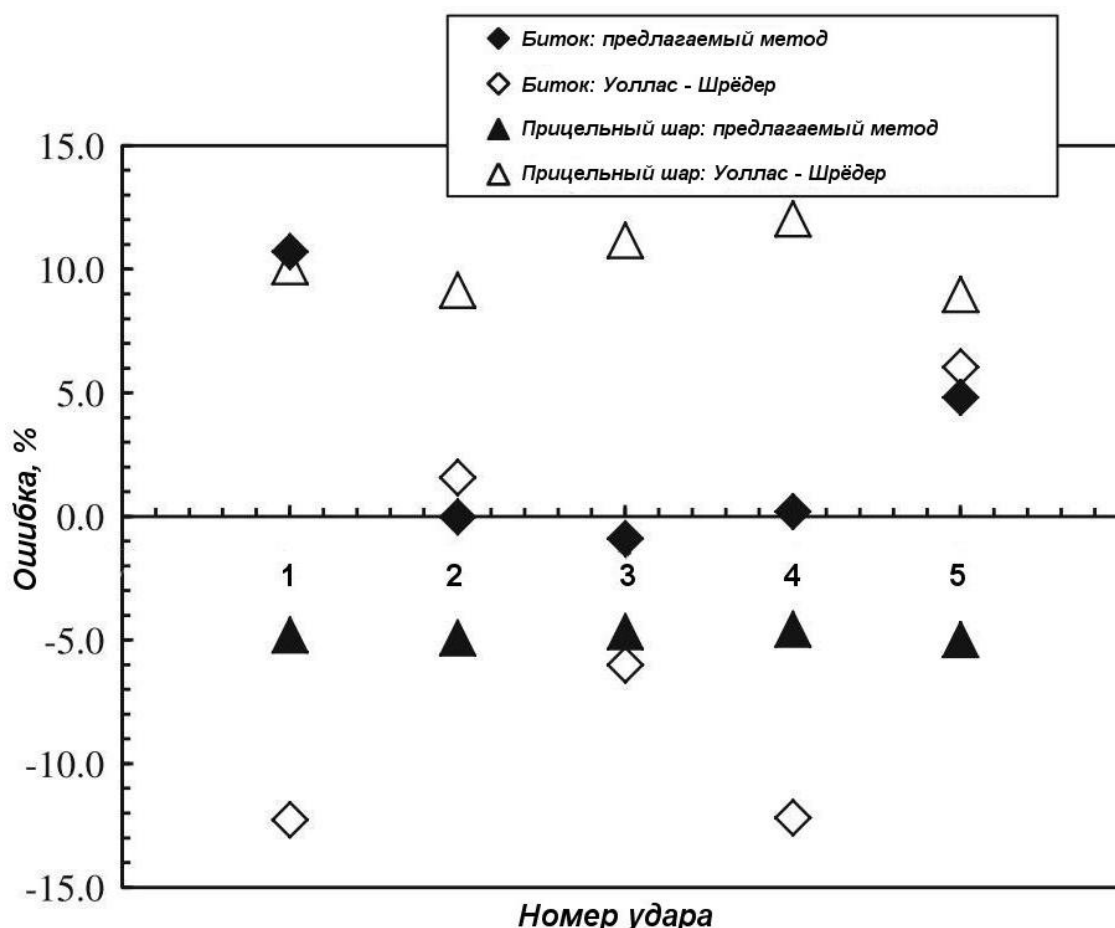


Рис.8. Сравнение ошибок предсказания конечных углов траекторий битка и прицельного шара  $\theta_s$ , полученных предлагаемым методом и по методике Уолласа и Шрёдера [20].

Несмотря на то, что ошибки предсказания, характерные для методов, не учитывающих вращений шаров, удалось уменьшить, необходимо констатировать, что существенные ошибки все-таки имеют место. Чтобы количественно оценить погрешности проведения эксперимента, был сделан анализ соответствующих ошибок. С учетом того, что точность определения расположения шаров составляла 0.25 мм, а съемки проводились с частотой 45 кадров в секунду [24], можно найти, что точность измерения скорости была равна 0.011 м/с. Поэтому, для пяти экспериментальных ударов, в которых скорость битка колебалась в пределах от 0.94 до 1.73 м/с, неопределенность результатов измерений составляла от 0.5 до 1%; при этом ошибкам измерений были сильнее подвержены более слабые удары. Следовательно, ошибки предсказания величин скорости вплоть до  $\pm 5\%$ , обеспечиваемые предлагаемым методом (рисунок 7), в значительной мере вытекают из не вполне корректного теоретического построения математической модели, главным образом – вследствие использованного предположения о точечном характере контакта шаров. Поскольку, для определения конечных углов использовались по меньшей мере 4 – 5 последовательных положений шара [24] на расстоянии 150 – 200 мм друг от друга, а точность определения местоположения составляла 0.25 мм, угловые ошибки должны не превышать 0.1 градуса. Следовательно, ошибки конечных углов, представленные в таблице 2 и на рисунке 8, должны быть следствием допущений, принятых в самом начале этой статьи.

#### **4. Заключение**

В этой работе представлена комплексная методика для предсказания параметров движения двух шаров, соударяющихся на плоскости. Представленные алгоритмы основаны на общей теории движения вращающихся сфер по ровной поверхности и теории фрикционного взаимодействия, предполагающей точечный характер контакта шаров между собой и с поверхностью стола. В значительной мере учитывается динамика вращения. В итоге, представлен количественный анализ для этапов движения шара со скольжением после соударения. Величины конечных скоростей и углов после завершения контакта шаров, существенно зависящие от вращательной динамики, сначала были смоделированы, а затем сравнены с результатами экспериментов для нескольких ударов. Улучшенные точности предсказания недвусмысленно показывают превосходство предлагаемой модели по сравнению с существующими моделями, не учитывающими последствий вращений при соударении. Представленный метод будет полезен для роботизированных и других виртуальных систем, предназначенных для игры в Снукер и вообще – в бильярд.

#### **Ссылки**

1. World Snooker (2012) [http://www.worldsnooker.com/page/NewsArticles/013165\\*2352434.00.html](http://www.worldsnooker.com/page/NewsArticles/013165*2352434.00.html)  
Last accessed on the 11th of November 2012 at 19:26 hours (GMT)
2. Coriolis G.-G. (1835) [Théorie Mathématique des Effets du Jeu de Billard](#) (Carilian-Goeury, Paris, 1835)  
translated by David Nadler [Mathematical Theory of Spin, Friction, and Collision in the Game of Billiards (David Nadler, USA, 2005)]
3. Salazar A., Sanchez-Lavega A. (1990) Motion of a ball on a rough horizontal surface after being struck by a tapering rod. Eur J Phys 11:228–232
4. de la Torre Juárez M. (1994) The effect of impulsive forces on a system with friction: the example of the billiard game. Eur J Phys 15(4): 184–190
5. Cross R. (2005) Bounce of a spinning ball near normal incidence. Am J Phys 73(10):914–992
6. Cross R. (2012) Rolling motion of a ball spinning about a near-vertical axis. Phys Teach 50:25–27

7. Long F., Herland J., Tessier M.-C., Naulls D., Roth A., Roth G., Greenspan M. (2004) Robotic pool: an experiment in automatic potting. In Proceedings of the IROS'04: IEEE/RSJ international conference on intelligent robotics and systems, Sendai, Japan, 3: 2520–2525
8. Ho KHL, Martin T., Baldwin J. (2007) Snooker robot player— 20 years on. In Proceedings of the IEEE symposium on computational intelligence and games (CIG 2007), Hawaii, 1–5 April 2007: 1–8
9. Cheng B.-R., Li J.-T., Yang, J.-S. (2004) Design of the neural-fuzzy compensator for a billiard robot. In Proceedings of the 2004 IEEE international conference on networking, sensing and control, Taipei, Taiwan, 21 – 23 March 2004:909–913
10. Alian M.E., Shouraki S.E., Shalmani M.T.M., Karimian P., Sabzmejdani P. (2004) Roboshark: a gantry pool player. In Proceedings of the 35th international symposium on robotics (ISR), Paris, France, 2004
11. Jebara T., Eyster C., Weaver J., Starner T., Pentland A. (1997) Stochasticicks: augmenting the billiards experience with probabilistic vision and wearable computer. In Proceedings of the IEEE international symposium on wearable computers, Cambridge, MA, October 1997:138–145
12. Larsen L.B., Jensen M.D., Vodzi W.K. (2012) Multi modal user interaction in an automatic pool trainer. In: Proceedings of the fourth IEEE international conference on multimodal interfaces (ICMI'02), Pittsburgh, USA, pp 361–366, 14–16 October 2002
13. Uchiyama H., Saito H. (2007) AR display of visual aids for supporting pool games by online markerless tracking. In Proceedings of the 17th international conference on artificial reality and telexistence (ICAT 2007), Esbjerg, Denmark, 28–30 November 2007: 172–179
14. Hoferlin M., Grundy E., Borgo R., Weiskopf D., Chen M., Griffiths I.W., Griffiths W. (2010) Video visualization for snooker skill training. *Comput Graph Forum* 29(3):1053–1062
15. Mathavan S. (2009) Trajectory solutions for a game-playing robot using non-prehensile manipulation methods and machine vision. PhD Thesis, Loughborough University, Loughborough, UK
16. Mathavan S., Jackson M.R., Parkin R.M. (2010) [A theoretical analysis of billiard ball dynamics under cushion impacts](#). In: Proceedings of the IMechE, Part C. Journal of Mechanical Engineering Science, vol 224, no 9, pp 1863–1873
17. Nolan A. (2006) The development and implementation of an interactive snooker game. Bachelor Degree Thesis, The University of Bath, UK. Last accessed from <http://www.cs.bath.ac.uk/~mdv/courses/CM30082/projects.bho/2005-6/nolan-ap-dissertation-2005-6.pdf> on the 11 of November 2012 20:19 hours (GMT)
18. Bal B., Dureja G. (2012) Hawk eye: a logical innovative technology use in sports for effective decision making. *Sport Sci Rev* 1–2:107–119
19. Bayes J.H., Scott W.T. (1962) Billiard-ball collision experiment. *Am J Phys* 3(31):197–200
20. Wallace R.E., Schroeder M.C. (1988) Analysis of billiard ball collisions in two dimensions. *Am J Phys* 56(9):815–819
21. Marlow W.C. (1994) The physics of pocket billiards \_MAST. Palm Beach Gardens, Florida
22. Kondic L. (1999) Dynamics of spherical particles on a surface: collision-induced sliding and other effects. *Phys Rev E* 60(1):751–770
23. Doménech A. (2008) Non-smooth modelling of billiard- and super billiard-ball collisions. *Int J Mech Sci* 50(4):752–763
24. Mathavan S., Jackson M.R., Parkin R.M. (2009) Application of high-speed imaging in determining the dynamics involved in billiards. *Am J Phys* 77(9):788–794
25. Stronge W.J. (2000) Impact mechanics. Cambridge University Press, Cambridge
26. Kane T.R., Levinson DA (1987) An explicit solution of the general two-body collision problem. *Comput Mech* 2:75–87
27. Hopkins D.C., Patterson J.D. (1977) Bowling frames: paths of a bowling ball. *Am J Phys* 45:263–266