Джастин Янкунас, Ричард Зэйр

Почему в Пуле одни удары труднее других

2014

Justin Jankunas and Richard N. Zare

Why Some Pool Shots are More Difficult than Others

Перевод: С.Тихонов

Июль, 2014

Физика бильярда, также как и классическая механика, весьма неплохо изучена. В этой работе мы представляем математическое объяснение тому, что удары на резке намного сложнее прямых ударов. Несмотря на наличие множества работ, посвященных изучению физики бильярда, простого объяснения этому факту до сих пор не было дано. Мы показываем, что при ударах с тонкой резкой угловой разброс в попадании по прицельному шару сказывается сильнее, чем при прямых ударах (с соударением шаров почти «в лоб»). Этот эффект можно осмыслить, воспользовавшись нелинейной связью между параметром соударения шаров и углом рассеяния, а также тем фактом, что игрок не в состоянии направить биток в прицельный шар абсолютно точно. Иными словами, реальное распределение вероятностей параметра соударения представляется не в виде дельта-функции, а имеет конечный разброс. Чтобы получить простые математические соотношения и не «затенять» основные физические закономерности, при анализе мы пренебрегаем вращением шара и действием трения.

Каждый из тех, кто когда-нибудь играл в Пул (одна из разновидностей бильярда), интуитивно познакомился с таким сценарием: когда биток, прицельный шар и луза располагаются примерно на одной линии (рисунок 1a), выполнить точный удар намного проще, чем в случае, когда биток, прицельный шар и луза образуют приблизительно прямой угол (рисунок 1b). Почему это так? Рассмотрение этой проблемы показывает – как можно применить прямые выводы из классической механики к динамике соударения.

В теории рассеяния, описывающей соударения молекул и частиц, одной из самых простых для решения является задача соударений твердых тел, имеющих форму шара. Соударения бильярдных шаров являются хорошими примерами рассеяния твердых частиц сферической формы. Когда биток проходит мимо прицельного шара, он продолжает двигаться прямолинейно, а прицельный шар остается неподвижным. Иначе говоря, два шара не взаимодействуют и потенциал, как говорится, нулевой. Для анализа взаимодействия двух шаров весьма точной является модель абсолютно упругого соударения. При использовании такой модели предполагается, что общая кинетическая энергия сохраняется. При этом можно сказать, что потенциал V бесконечно велик. Математически это можно выразить следующим образом: $V(b) = 0$ при $b > d$ и $V(b) = \infty$ при $b \leq d$. Здесь b – хорошо известный параметр соударения, представляющий собой расстояние от центра прицельного шара до линии, проходящей по траектории битка в момент соударения; d – диаметр бильярдного шара. Само собой разумеется, что величина b всегда положительна. Эти два параметра рассеяния (вместе с прочими) показаны на рисунке 2. (*Авторы утверждают, что параметр b хорошо известен. Может быть, в теории рассеяния это и так, но в бильярде обычно оперируют другим параметром – плотностью контакта шаров. Эта плотность характеризуется величиной части диаметра прицельного шара, «закрытой» от игрока битком во время соударения и равной разности $d - b$; прим. пер.*).

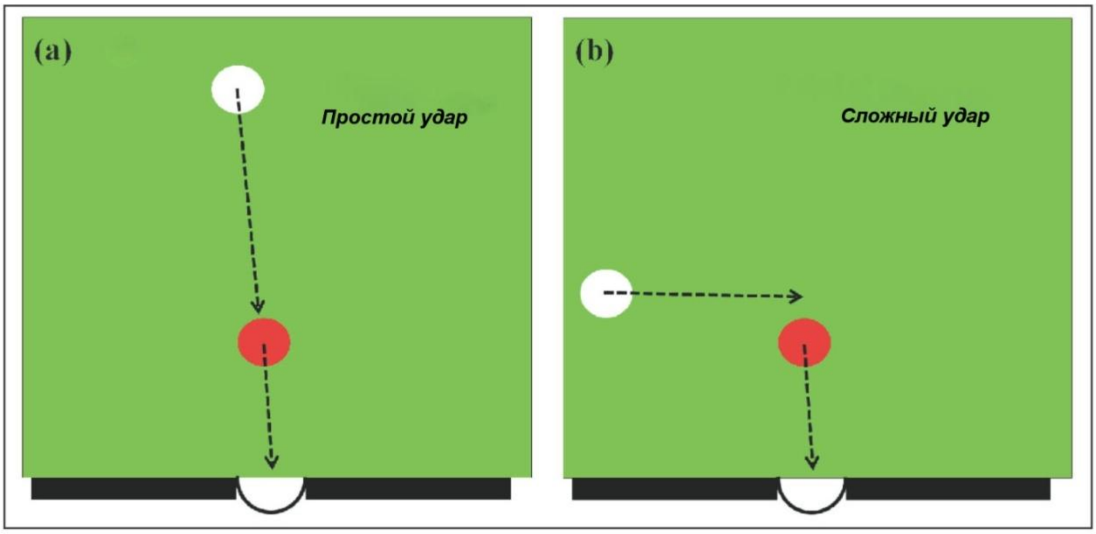

Рис.1. Сопоставление простого (a) и сложного (b) ударов при игре в Пул. При простом ударе биток (белого цвета), прицельный шар (красного цвета) и луза располагаются почти на одной прямой линии. При сложном ударе шары и луза образуют угол, близкий к прямому. Такие же соображения применимы и к настольной игре Carroms (Karroms). Эта игра весьма популярна в Южной Азии – в основном в таких странах, как Индия, Пакистан, Бангладеш, Шри-Ланка, Непал. Она приобрела и некоторую популярность в Европе и США, где получила распространение благодаря индийской диаспоре.

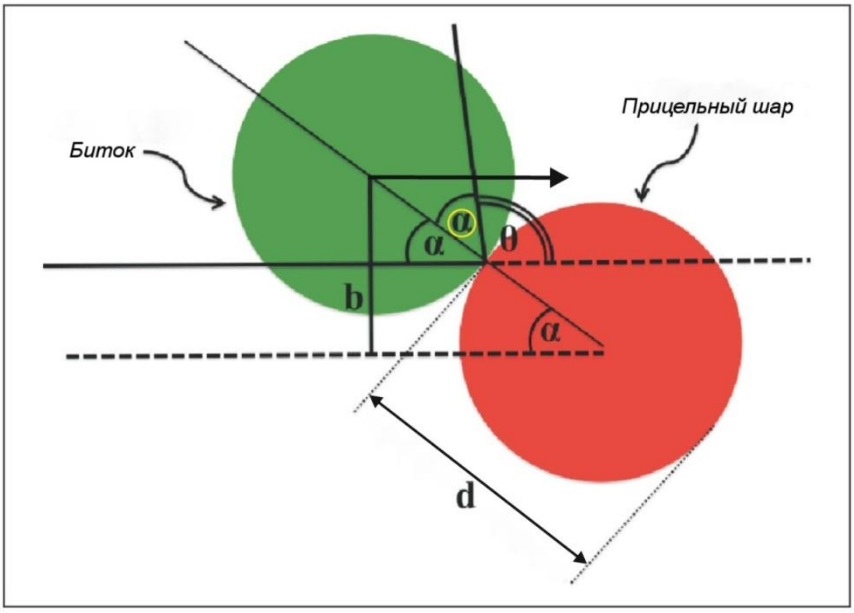

Рис.2. Типичная диаграмма рассеяния жесткой сферы: b – параметр соударения; d – диаметр бильярдного шара, α – угол падения и отражения; θ – угол рассеяния в центре масс системы шаров.

На рисунке 2 изображены биток и прицельный шар в момент их контакта. При этом угол падения α (*в теории бильярда его называют углом резки; этот угол образован вектором поступательной скорости битка и линией соударения, проходящей через центры шаров при их контакте; прим. пер.*) в случае упругого соударения равен углу отражения. (*Весьма странное утверждение. Об отражении битка под углом α можно было бы с определенной натяжкой говорить, если прицельный шар был бы жестко закреплен, то есть оставался неподвижным как до, так и после соударения. На рисунке я обозначил этот так называемый угол отражения окружностью желтого цвета. Прим. пер.*). Из рисунка понятно, что $Sin\ \alpha = b/d$. Угол рассеяния θ в центре масс (ЦМ) системы двух шаров находится просто: $\theta = \pi - 2\alpha$. Отсюда следует выражение

$$\theta = \pi - 2Sin^{-1}(b/d)\ , \tag{1a}$$

из которого можно выразить параметр соударения

$$b = d\ Sin(\theta/2 - \pi/2) = d\ Cos(\theta/2)\ . \tag{1b}$$

Равенства (1a) и (1b) составляют ключевую формулу для анализа рассеяния жесткой сферы. Ответ на вопрос, поставленный в начале статьи – почему удары на резке труднее прямых ударов – в конечном счете, следует из этой определяющей формулы.

Тем не менее, из (1a) с очевидностью следует, что между углом рассеяния и параметром соударения существует однозначная связь. С этой точки зрения, можно предположить, что прямые и косые соударения одинаковы по сложности. Математически это означает, что распределение вероятностей параметра соударения должно представляться в виде дельта-функции, то есть $P(b) = \delta(b)$.

Однако, такое распределение параметра соударения никогда не реализуется на практике. Даже в распределении параметра соударения, соответствующего игре искусного мастера Пула, будет наблюдаться ограниченный разброс. Иными словами, можно утверждать, что всем игрокам присуще несовершенное прицеливание. (*На самом деле, не все определяется лишь не вполне точным прицеливанием, хотя и этого уже достаточно. Например, ударное движение тоже никак не может быть выполнено абсолютно точно. Есть и еще целый ряд факторов. Прим. пер.*).

Будет весьма разумно предположить, что параметр соударения имеет Гауссовское (*нормальное; прим. пер.*) распределение вероятностей. Таким образом, с помощью двух функций Гаусса можно представить математические модели соударений бильярдных шаров, как для прямого контакта, так и для контакта «вскользь». Этим двум различным соударениям будет соответствовать один и тот же параметр ширины (*имеется в виду величина d; прим. пер.*) и разные величины параметра b – маленькие для прямых соударений (практически «в лоб») и большие для «скользящих» соударений. Гауссовская плотность распределения вероятностей $P(b)$ случайного параметра b выражается зависимостью

$$P(b) = \propto Exp\left[-\frac{(b-fd)^2}{2\sigma^2}\right], \tag{2}$$

где σ – среднеквадратическое отклонение величины b. Коэффициент резки f, заключенный в пределах $0 \leq f \leq 1$, определяет долю величины b по отношению к диаметру d. (*Иными словами, коэффициент f характеризует «плотность» контакта шаров. При полном контакте, то есть при соударении в лоб, величина f равна нулю. Соответственно, при этом и значение b нулевое. При контакте же «по воздуху» (вскользь) $f = 1$, и выполняется равенство $b = d$. Величину f можно интерпретировать и несколько иначе. Она представляет собой отклонение точки прицеливания от центра прицельного шара, выраженное в долях диаметра. При прицеливании точно в центр шара этого отклонения фактически нет ($f = 0$); при прицеливании в край прицельного шара $f = 0.5$, а соударение происходит в половину шара (естественно, если после правильного прицеливания и выполнения удара биток точно движется по прямой линии, проходящей через центр битка в его начальном положении и краем прицельного шара); в случае же, когда прицеливание производится в точку, удаленную от центра прицельного шара на расстояние диаметра ($f = 1$), шары при соударении лишь касаются друг друга. Если же подойти к пониманию физического смысла коэффициента резки f с помощью формулы (2), то произведение fd следует рассматривать как математическое ожидание значения случайной величины b. Прим. пер.*). С помощью величины σ из соотношения (2) можно определить ширину плотности распределения вероятностей (ШПРВ) случайной величины b при значении функции $P(b)$, равном половине максимального значения, соответствующего математическому ожиданию величины b: *ШПРВ* $= 2\sqrt{2\ln 2}\,\sigma$. (*Значение ШПРВ, так же как и σ, характеризует величину области разброса случайной величины b относительно ее среднего и наиболее вероятного значения fd. Чем меньше значение ШПРВ, тем в среднем точнее биток попадает в район точки прицеливания при соприкосновении с прицельным шаром. С другой стороны, площадь под кривой функции $P(b)$, рассчитанная на интервале значений b, принадлежащих ШПРВ, представляет собой ничто иное, как вероятность попадания параметра b в этот интервал. И в этом смысле, значение ШПРВ характеризует вероятность выполнения ударов с малыми промахами траектории битка от желаемой точки прицеливания. Далее авторы будут использовать значение среднеквадратического отклонения $\sigma = 0.02d$. Чтобы понять, насколько точным будет попадание битка при этой величине σ, рассчитаем ШПРВ, использовав значение диаметра шара для Русского Бильярда $d = 68$ мм: ШПРВ $= 3.2$ мм. На мой взгляд, такая величина вполне «прилична» при игре в Пул, но великовата для гораздо более строго Русского Бильярда. Прим. пер.*). В качестве примера предположим, что двум функциям плотности распределения вероятностей $P(b)$ соответствуют одинаковые величины среднеквадратического отклонения $\sigma = 0.02d$. Для такого значения σ величины ШПРВ примерно равны $0.047d$. Будем считать, что для почти прямого соударения коэффициент резки равен $f = 0.05$, то есть прицеливание производится в точку $b = 0.05d$. Для соударения же на тонкой резке будем полагать $f = 0.95$, что соответствует прицеливанию в точку $b = 0.95d$. Две функции плотностей распределения вероятностей изображены на рисунке 3а.

Возникает вопрос – а как выглядят функции распределения вероятностей $P(\theta)$ для углового параметра θ в системе координат, связанной с ЦМ?

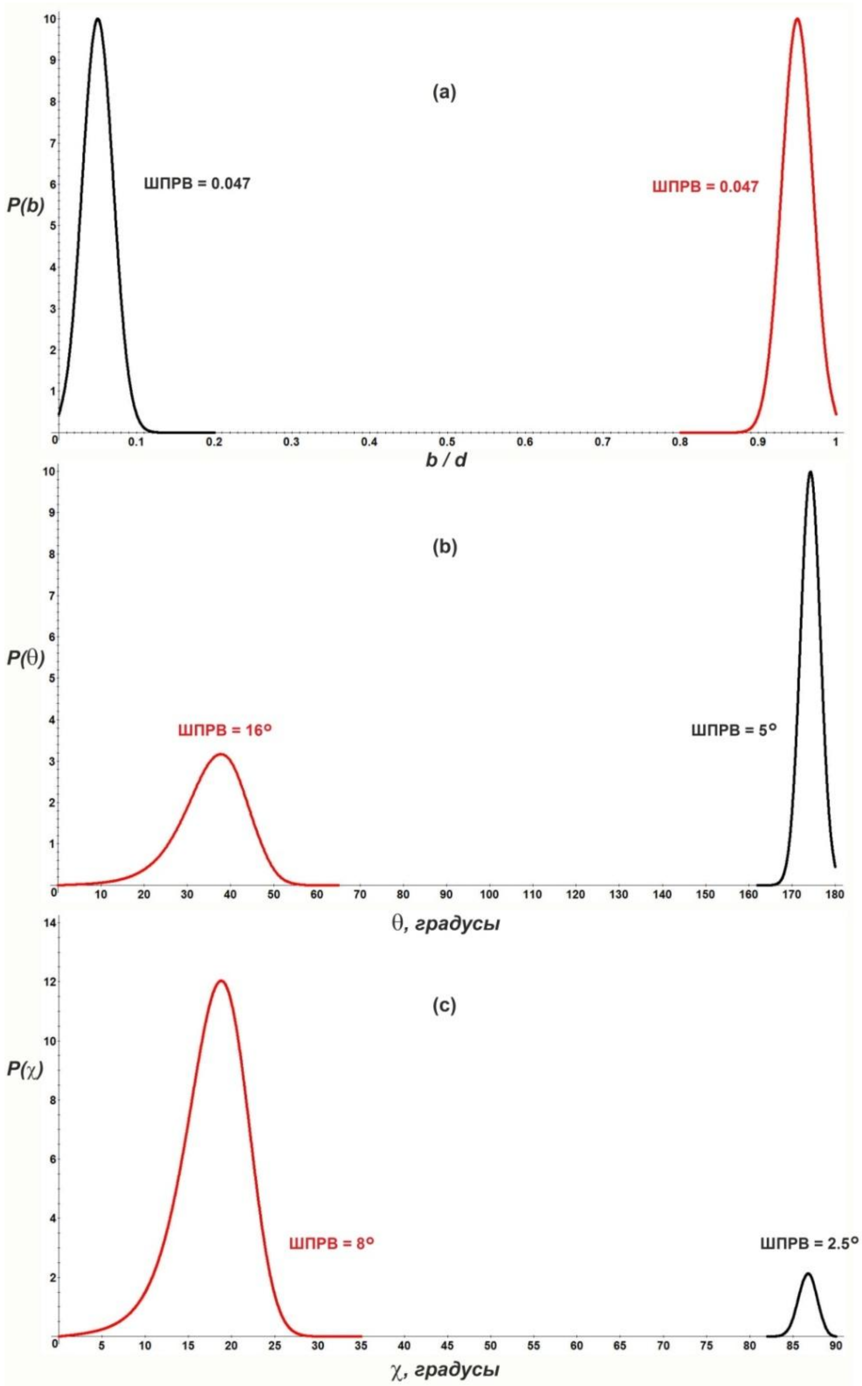

Рисунок 3. (a) Гауссовские плотности распределения вероятностей $P(b)$ параметра контакта b для прямого соударения (b = 0.05 d, кривая черного цвета) и соударения на тонкой резке (b = 0.95 d, кривая красного цвета). (b) Плотности распределения вероятностей $P(\theta)$ угла θ в системе координат, связанной с ЦМ, для прямого соударения (кривая черного цвета) и соударения на тонкой резке (кривая красного цвета). (c) Плотности распределения вероятностей $P(\chi)$ угла χ в лабораторной системе координат, то есть так, как это видится в реальной игре. Несмотря на то, что две функции распределения параметра соударения b имеют одинаковые значения ширины d, следует обратить внимание на то, что для соответствующих функций распределения угловых параметров это не так. Это наглядно объясняет – почему удары на резке труднее прямых ударов.

Так же как и для любых двух плотностей распределения вероятностей, функции $P(b)$ и $P(\theta)$ связаны соотношением:

$$P(\theta) = P(b(\theta)) \left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right| . \tag{3}$$

Чтобы определить вид функции $P(\theta)$ при известном выражении для $P(b)$, нужно иметь только соотношение для $\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right|$, которое легко найти из (1b). Таким образом, для функции $P(b)$, определенной выражением (2), плотность распределения вероятностей угла θ имеет вид:

$$P(\theta) = \propto Exp\left[-\frac{(Cos(\theta/2)-f)^2}{2\sigma'^2}\right] Sin(\theta/2), \tag{4}$$

где $\sigma' = \sigma/d$. Графики двух функций $P(\theta)$ с одинаковыми величинами $\sigma' = 0.02$ и различными коэффициентами резки $f = 0.05$ и $f = 0.95$ изображены на рисунке 3b.

Отличие между графиками, изображенными на рисунках 3a и 3b, разительно. Даже при том, что у обоих Гауссовских распределений одинаковы разбросы линейного параметра соударения – иначе говоря, при одинаково хороших по точности прицеливаниях для прямого удара и удара на резке – разброс углового параметра прямого ($\theta \sim 180°$) и «косого» ($\theta \sim 0°$) соударений различаются. Разброс угла рассеяния θ значительнее по величине для ударов на резке, чем для прямых ударов! В нашем частном примере мы получаем ШПРВ $= 5°$ при $f = 0.05$ и ШПРВ $= 16°$ при $f = 0.95$.

Этот пример объясняет – почему так называемые «косые» удары (удары на резке) сложнее прямых ударов в любой игре на бильярде. Причин тому две: специфическая форма связи (1a) и наличие разброса в плотности распределения вероятностей $P(b)$.

До сих пор мы анализировали динамику соударения в системе координат, связанной с ЦМ, для которой $0° \leq \theta \leq 180°$. Но игрок видит удар в системе, связанной с бильярдным залом, то есть – в лабораторной системе координат (ЛСК). Хорошо известно, что наибольший угол, на котором прицельный шар может быть «срезан», в ЛСК составляет $\sim 90°$. При этом биток едва отражается. Поэтому в ЛСК угол рассеяния χ должен изменяться от $0°$ до $90°$.Связь между двумя обсуждаемыми системами координат определяется зависимостью [1]:

$$P(\chi) = 4\,Cos(\theta/2)\,P(\theta)\,, \tag{5}$$

где $\chi = \theta/2$. График функции $P(\chi)$ изображен на рисунке 3c. Основной вывод остается прежним: рассеяние битка, движущегося вперед при ударе на резке, имеет больший угловой разброс, чем при прямом ударе. (*Угол χ образуется траекторией битка при подходе к прицельному шару и касательной линией, проведенной в точке контакта шаров. Если не учитывать трения и вращения битка, как это делают авторы, то именно параллельно этой касательной и будет перемещаться биток после соударения. Таким образом, угол χ косвенно характеризует и расположение* *номинальной линии перемещения прицельного шара после контакта с битком – она совпадает с линией соударения, проходящей через центры шаров при соприкосновении. Нужно отметить, что авторы долго и «нудно» шли от линейного параметра соударения b к понятному для игроков угловому параметру χ – через угол резки α, затем через угол «мифического» отражения, также равный α, и, наконец, через угол θ со скрытым физическим смыслом. Прим. пер.*).

В этом месте проницательный читатель мог бы возразить. Общее утверждение по поводу соударений твердой сферы можно найти в любом учебнике по теории рассеяния. Оно звучит так: «Рассеяние твердой сферы является изотропным» [2]. Полученные же здесь результаты, которые представлены на рисунках 3b и 3c, далеки от того, чтобы свидетельствовать об изотропности. Так, что же происходит на самом деле?

Рассеяние твердой сферы является действительно изотропным в трех измерениях. Производная $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ определяется как отношение числа частиц N, рассеивающихся внутри конкретного телесного угла $\mathrm{d}\Omega$, к общему числу частиц N_0, «налетающих» внутри определенного диапазона контакта $\mathrm{d}b$. То есть, $2\pi\, b\, \mathrm{d}b\, N_0 = 2\pi\, Sin\theta\, \mathrm{d}N$. Перегруппировка и подстановка выражений для b и $\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right|$ позволяет получить

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \equiv \frac{N}{N_0} = \frac{b}{Sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right| = \frac{d\ Cos(\theta/2)}{Sin\theta}\,\frac{d\ Sin(\theta/2)}{2} = \frac{d^2}{4}\,. \tag{6}$$

В учебниках справедливо утверждается, что рассеяние жесткой сферы изотропно. В случае двумерных соударений, таких как при игре в Пул, справедливо равенство $\mathrm{d}bN_0 = \mathrm{d}\theta N$, из которого следует

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \equiv \frac{N}{N_0} = \left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right| = \frac{d\ Sin(\theta/2)}{2}\,, \tag{7}$$

то есть производная анизотропна!

Хотя случай рассеяния твердой сферы представляет весьма ограниченный интерес при рассмотрении молекулярных соударений, главным образом потому, что атомы и молекулы почти всегда обладают ограниченными уровнями притяжения и отражения, его использование в других приложениях может быть забавным и даже поучительным! Проведенное короткое исследование объясняет то, что интуитивно понимает любой бильярдный игрок: удары на резке часто приносят разочарованные вздохи и недовольные покачивания головой, но ситуации, в которых биток, прицельный шар и луза располагаются почти на одной прямой линии, часто являются вожделенными, суля улыбки и жесты триумфа. Это, прежде всего, вызвано ошибками прицеливания, влекущими за собой конечный разброс плотности распределения вероятностей параметра соударения. Перефразируя слова Марк Антония о Бруте в драме Шекспира «Юлий Цезарь», можно сказать, что удары на резке «являются самыми злыми из всех ударов» [3].

Литература

[1] N.E.Henriksen and F.Y.Hansen – Theories of Molecular Reaction Dynamics: The Microscopic Foundation of Chemical Kinetics, Oxford University Press, Oxford, 2008.

[2] R.D.Levine and R.B.Bernstein – Molecular Reaction Dynamics and Chemical Reactivity, Oxford University Press, New York, p.73, 1987.

[3] W.Shakespeare – Julius Caesar, Act 3, Scene 2, pp.181–186.