

На правах рукописи

Ишханян Маргарита Владимировна

**Динамика однородного шара
на горизонтальной плоскости с трением
скольжения, верчения и качения**

01.02.01 – Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2010

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и
мехатроники механико-математического факультета
Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

- Научный руководитель:** доктор физико-математических наук,
профессор А.В. Карапетян,
- Официальные оппоненты:** доктор физико-математических наук,
профессор А.П. Иванов,
кандидат физико-математических наук,
И.Ф. Кожевников
- Ведущая организация:** Институт проблем механики
имени А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук

Защита состоится 30 апреля 2010 года в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.22 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание МГУ, 14 этаж).

Автореферат разослан 30 марта 2010 года

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук,
доцент,

В.А. Прошкин

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Задача о движении твердого тела по неподвижной опорной поверхности является одной из классических задач динамики твердого тела, привлекавшей внимание многих ученых. За последние триста лет в задаче о движении тела по поверхности получено много важных результатов, и интерес к этой задаче в последнее время только усиливается. Для постановки данной задачи очень важным и непростым моментом является выбор математической модели, описывающей взаимодействие между телом и опорной поверхностью. Здесь можно выделить три основные модели: модель абсолютно гладкой поверхности, модель абсолютно шероховатой поверхности и модель поверхности с трением. В последнем случае чаще всего предполагается, что на тело действует только сила трения, описываемая моделью Кулона. Однако, эта модель пригодна, вообще говоря, только при поступательном движении тела, тогда как при поступательно-вращательном движении тело нередко возникает несоответствие между теоретическими (в рамках модели Кулона) и экспериментальными результатами. Впервые на необходимость уточнения закона Кулона обратил внимание Контенсу, предложив модель трения, учитывающую как силу трения, так и момент трения верчения. Впоследствии эта модель была развита в работах В.Ф. Журавлева, А.П. Иванова, А.В. Карапетяна, А.А. Киреевкова и др. Таким образом, исследование динамики твердого тела при наличии трения представляется весьма актуальным.

Цель диссертационной работы. Диссертация посвящена качественному, аналитическому и численному анализу динамики однородного шара, движущегося по неподвижной шероховатой горизонтальной плоскости, с учетом всех видов трения в рамках модифицированной модели Контенсу, предложенной А.В. Карапетяном.

Научная новизна работы. Все основные результаты, полученные в работе, являются новыми, ранее неизвестными. Впервые

поставлена и решена задача о движении однородного шара по неподвижной горизонтальной плоскости в предположении, что взаимодействие шара с опорной плоскостью описывается обобщенной моделью Контенсу, в рамках которой учитываются все виды трения – скольжения, верчения и качения.

Достоверность результатов. Все результаты диссертационной работы обоснованы с помощью методов аналитической механики и методов качественной теории дифференциальных уравнений. Качественно–аналитические результаты проиллюстрированы и подтверждены с помощью численного анализа.

Теоретическая и практическая ценность работы. Работа носит теоретический характер, полученные результаты могут быть использованы в исследованиях, проводимых в МГУ имени М.В. Ломоносова, Институте проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, Вычислительном центре имени А.А. Дородницына РАН, Институте прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Московском физико-техническом институте (Государственный Университет) и других научно-исследовательских центрах.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

- Семинар по аналитической механике и устойчивости движения кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством чл.-корр. РАН В.В. Белецкого, проф. А.В. Карапетяна и проф. Я.В. Татаринова, 2008, 2009г.
- Конференция молодых ученых Института механики МГУ, 2008, 2009г.
- Научная конференция ”Ломоносовские чтения” МГУ, 2009г.
- Международная научная конференция по механике ”Пятые Поляховские чтения”, г. Санкт-Петербург, 2009г.

- Симбирская молодежная научная школа по аналитической динамике, устойчивости и управлению движениями и процессами, посвященная памяти академика Валентина Витальевича Румянцева, Ульяновск, 2009г.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы изложены в трех печатных работах, две из которых опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 59 наименований. Общий объем диссертации – 100 страниц.

Содержание работы

Во введении описана предметная область и цель настоящей диссертации, дан обзор работ, посвященных исследованию движения однородного шара по шероховатым поверхностям с сухим трением, а также приведено краткое содержание работы.

В первой главе приведена постановка задачи, выписаны сила и момент трения в рамках модифицированной модели трения, а также исследованы свойства этой модели, которые существенно используются при анализе динамики шара.

В рамках рассматриваемой модели сила трения \mathbf{F} и главный момент \mathbf{M} сил трения, действующие на шар и приложенные в точке контакта шара с опорной плоскостью, могут быть представлены в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \varepsilon a \boldsymbol{\omega}, \mu), \quad \mathbf{M} = \varepsilon a \Phi(\mathbf{u}, \varepsilon a \boldsymbol{\omega}, \mu)$$

Здесь \mathbf{u} – скорость скольжения шара, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость шара, a – радиус шара, $\mu = \varepsilon \delta$ ($\varepsilon \in [0, 1]$, $\delta \in [0, 1]$ – параметры, характеризующие рассматриваемую модель трения). Доказано, что рассматриваемая модель трения обладает полной диссипацией.

Для описания движения шара вводится подвижный ортонормированный репер $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ такой, что орт \mathbf{e}_1 направлен вдоль скорости скольжения $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_1$ шара, орт \mathbf{e}_2 ортогонален скорости скольжения \mathbf{u} и, как и \mathbf{e}_1 , лежит в горизонтальной плоскости, а орт \mathbf{e}_3 направлен вдоль восходящей вертикали. В проекциях на оси, связанные с этим репером, сила и момент трения имеют, соответственно, вид $\mathbf{F} = F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2, \mathbf{M} = M_1\mathbf{e}_1 + M_2\mathbf{e}_2 + M_3\mathbf{e}_3$.

Функции \mathbf{F} и \mathbf{M} аналитичны по μ , следовательно, компоненты F_i ($i = 1, 2$) силы трения и M_j ($j = 1, 2, 3$) момента сил трения можно разложить в ряды по степеням μ :

$$F_i = F_i^{(0)} + \mu F_i^{(1)} + \mu^2 F_i^{(2)} + O(\mu^3)$$

$$M_j = M_j^{(0)} + \mu M_j^{(1)} + \mu^2 M_j^{(2)} + O(\mu^3)$$

Явные выражения функций $F_1^{(0)}$ и $M_3^{(0)}$ были получены В.Ф. Журавлевым (1998). В диссертационной работе получены явные выражения для остальных функций $F_i^{(k)}, M_j^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2$), в частности, показано, что $F_2^{(0)} = 0, M_1^{(0)} = M_2^{(0)} = M_1^{(1)} = 0$.

Доказано, что компонента F_2 силы трения, ортогональная скорости скольжения шара, и компонента M_1 момента сил трения, параллельная скорости скольжения, обращаются в нуль, если и только если угловая скорость шара ортогональна скорости его скольжения ($\omega_1 = 0$). Если при этом еще и угловая скорость вращения шара $\omega_3 = 0$, то и вертикальная компонента M_3 момента сил трения обращается в нуль.

Во второй главе приводится качественно-аналитическое исследование динамики шара. Уравнения движения шара в проекциях

на подвижные оси, связанные с репером $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, имеют вид

$$\begin{aligned} m\dot{u} &= \frac{7F_1}{2} - \frac{5M_2}{2a} \\ u\Omega &= \frac{7F_2}{2} + \frac{5M_1}{2a} \\ ma(\dot{\omega}_1 - \omega_2\Omega) &= \frac{5F_2}{2} + \frac{5M_1}{2a} \\ ma(\dot{\omega}_2 + \omega_1\Omega) &= -\frac{5F_1}{2} + \frac{5M_2}{2a} \\ am\dot{\omega}_3 &= \frac{5M_3}{2a} \end{aligned}$$

Здесь m – масса шара, $\mathbf{\Omega} = \Omega\mathbf{e}_3$ угловая скорость подвижного репера.

В первом параграфе второй главы проведена интерпретация основных свойств динамики шара в рамках модели Контенсу–Журавлева с точки зрения метода обобщенных диаграмм Смейла.

Во втором параграфе второй главы проведен анализ динамики шара в рамках рассматриваемой модели трения. Отмечено существование инвариантных множеств $\omega_1 = 0$ и $\omega_1 = \omega_3 = 0$. Доказано, что за конечное время t_R шар остановится, причем в момент времени t_R скорость скольжения шара \mathbf{u} и его угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ обращаются в нуль одновременно.

В третьей главе проводится аналитическое исследование некоторых частных режимов движения шара в приближенной постановке (сила и момента трения, действующие на шар в точке контакта шара с опорной плоскостью, берутся с точностью до членов порядка μ^2 включительно). В частности, рассмотрено движение шара на инвариантном множестве $\omega_1 = \omega_3 = 0$. Получен первый интеграл соответствующих уравнений движения. Доказано, что качение шара без скольжения и скольжение шара без качения невозможны. Также показано, что во всех случаях, когда в начальный момент времени $u(0)^2 + a^2\omega_2^2(0) \neq 0$ и $u(0) \cdot \omega_2(0) = 0$, имеет место неравенство $u(t)\omega_2(t) > 0 \forall t \in (0, t_R)$. В заключительном параграфе

третьей главы доказано, что возможны качения шара по плоскости со скольжением и закручиванием, не сопровождающиеся верчением шара вокруг вертикальной оси, а также, что, как и в рамках модели Контенсу–Журавлева, возможны равнозамедленные верчения шара.

Четвертая глава посвящена численному анализу динамики шара на горизонтальной плоскости. Проведен анализ типичных режимов движения шара и подтверждены качественно-аналитические результаты, приведенные во второй и в третьей главах. Численные результаты представлены графически.

На рисунке 1 приведены наиболее типичные результаты численных расчетов: зависимости фазовых переменных от времени (масштаб времени неравномерный).

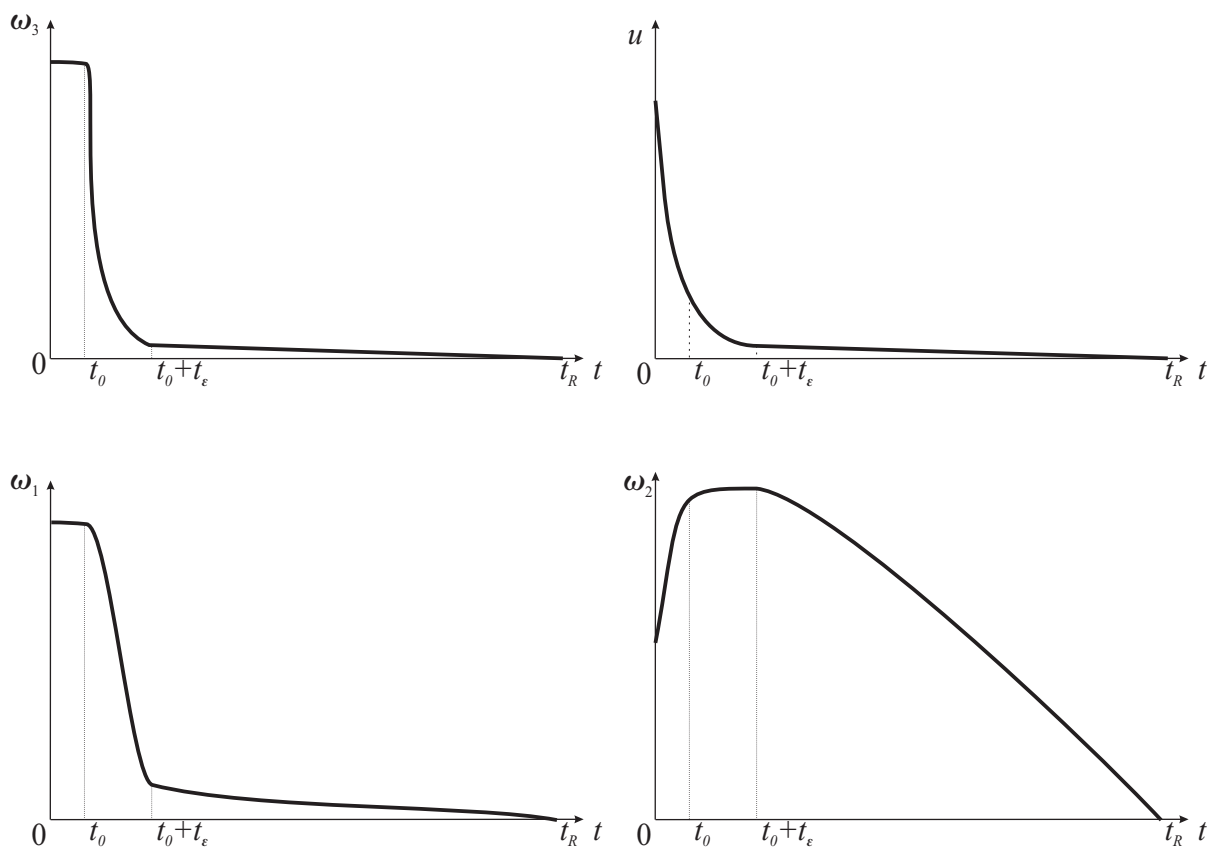


Рис. 1.

Численное интегрирование показывает, что время полной оста-

новки шара можно разбить на три интервала: $t_R = t_0 + t_\varepsilon + t_\mu$, где

$$t_0 \sim \frac{2u(0)}{7kg}, \quad t_\varepsilon \sim \frac{32a\omega_3(0)}{15\pi kg} \frac{1}{\varepsilon}, \quad t_\mu \sim \frac{a\omega_2(0)}{kg} \frac{1}{\varepsilon\mu}$$

На первом интервале времени $[0, t_0]$ скорость скольжения шара (u) "быстро" убывает до значений порядка ε , горизонтальная компонента угловой скорости, перпендикулярная скорости скольжения (ω_2) возрастает, а остальные компоненты угловой скорости (ω_1, ω_3) почти не меняются. На втором интервале времени $[t_0, t_0 + t_\varepsilon]$ до значений порядка μ убывают u ("медленно"), ω_1 и ω_3 ("быстро"), а ω_2 почти не меняется. На третьем интервале времени $[t_\varepsilon, t_\varepsilon + t_\mu]$ все переменные медленно убывают до нуля.

В Заключение сформулированы основные результаты:

- Доказаны основные свойства двухпараметрической модели трения, использованной для описания взаимодействия шара с опорной плоскостью. Получены точные аналитические выражения для разложений компонент результирующей силы трения и главного момента сил трения с точностью до второго порядка по μ включительно.
- Проведен глобальный анализ динамики однородного шара на плоскости с трением в рамках двухпараметрической модели трения: доказано, что шар остановится за конечное время t_R ; скорость скольжения и угловая скорость шара обратятся в нуль одновременно; качение шара без скольжения и скольжение шара по плоскости без качения невозможны; качения (скольжения) шара, сопровождающиеся закруткой, без скольжения (без качения), невозможны.
- Проведен численный анализ динамики шара: построены типичные графики изменения фазовых переменных с течением времени и типичные траектории центра масс шара. Получена оценка времени полной остановки шара.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

1. *Ишханян М. В.* Динамика однородного шара на плоскости с трением // Труды конференции-конкурса молодых ученых Института механики МГУ (8-10 октября 2008г). Изд-во МГУ. 2009. С. 99-105.
2. *Ишханян М. В., Карапетян А. В.* Динамика однородного шара на горизонтальной плоскости с учетом трения скольжения, верчения и качения // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 2. С. 3-14.
3. *Ишханян М. В.* О взаимосвязанности скольжения и качения в задаче о движении однородного шара по шероховатой горизонтальной плоскости // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 2. С. 216-220.
4. *Ишханян М.В.* Динамика однородного шара на плоскости с трением //Тезисы докладов Международной научной конференции по механике, Санкт-Петербург, 3-6 февраля 2009 г. Изд-во СПбГУ, 2009. С. 38.
5. *Ишханян М.В.* О взаимосвязанности скольжения и качения в задаче о движении однородного шара по шероховатой горизонтальной плоскости// Симбирская молодежная научная школа по аналитической механике, устойчивости и управлению движениями и процессами, Ульяновск, 8-12 июня 2009 г. Изд-во УлГУ, 2009. С. 50.