

С.Матхэвен, М.Р.Джэксон, Р.М.Паркин

Теоретический анализ динамики бильярдного шара при соударениях с бортом

S.Mathavan, M.R.Jackson, R.M.Parkin

*Mechatronics Research Group, Wolfson School of Mechanical and Manufacturing Engineering,
Loughborough University, Loughborough, UK*

**A theoretical analysis of billiard ball dynamics under cushion impacts
2009**

Перевод: С.Тихонов, март 2013

В последние два десятилетия возрос интерес к исследованиям, связанным с бильярдом. Был выполнен ряд работ для создания обучающих систем, роботов и компьютерных имитаторов бильярдной игры. Во всех этих системах важное место отводится определению траекторий бильярдного шара. Соударения шара с бортом происходят в бильярде очень часто, и при этом резко меняется траектория, в особенности – когда шар обладает вращением. Цель этой работы – предсказание величины угла отражения и скорости шара после контакта с бортом, в рамках справедливости предположения о незначительности его деформации. Используются и численно решаются различные уравнения динамики шара при соударении с бортом. Численные расчеты в совокупности с ранее выполненными авторами экспериментальными работами показывают, что для соударения шара с бортом величины коэффициентов восстановления и трения скольжения составляют 0.98 и 0.14, соответственно. Сравнение численных результатов с экспериментальными данными показывает, что модель твердого борта можно применять при ограничении сверху на величину нормальной скорости (*направленной перпендикулярно борту; прим. пер.*), равном 2.5 м/с. Приведен ряд графиков, представляющих характеристики шара после отражения для заданных значений его скорости и вращения перед соударением. Эти графики демонстрируют некоторые явления, которые до сих пор лишь обсуждались в бильярдной литературе.

1. Введение

Снукер и Пул – две разновидности спортивной игры, известной под названием Бильярд (далее термин «бильярд» будет использоваться как по отношению к Снукеру, так и к Пулу). Бильярд классически демонстрирует такие понятия динамики, как вращение, качение и скольжение сферических тел. Бильярд стал первой из игр, которая была научно проанализирована с технической точки зрения. Труд французского ученого Г.Кориолиса «Математическая теория явлений бильярдной игры», вышедший в свет в 1835-м году, стал пионером научных работ по спортивной динамике. Количество проводимых исследований, связанных с бильярдом, неуклонно возрастает. В последние годы создан ряд роботов для игры в бильярд [2]-[5]. Помимо этого, разрабатывалось несколько проектов по созданию систем обучения бильярдной игре [6]-[8]. Исследования, связанные с компьютерным бильярдом, моделирующим реальную игру, также привлекли повышенное внимание специалистов, занявшихся

созданием систем искусственного интеллекта, способных формулировать общепринятые стратегии игры [9]-[11].

Бильярд основан на точном управлении шарами, перемещающимися по различным траекториям. Игра ведется так, что прицельные шары в определенном порядке отправляются в лузы, а биток переводится в такую точку стола, из которой удобно выполнять следующий удар. Чтобы биток достиг нужного местоположения, игроки часто используют его соударения с бортом, позволяющие добиваться большей вариативности в игре. Соударения с бортом в комбинации с приданием битку вращений дают возможность применения более гибкого стратегического игрового подхода (см. рисунок 1).

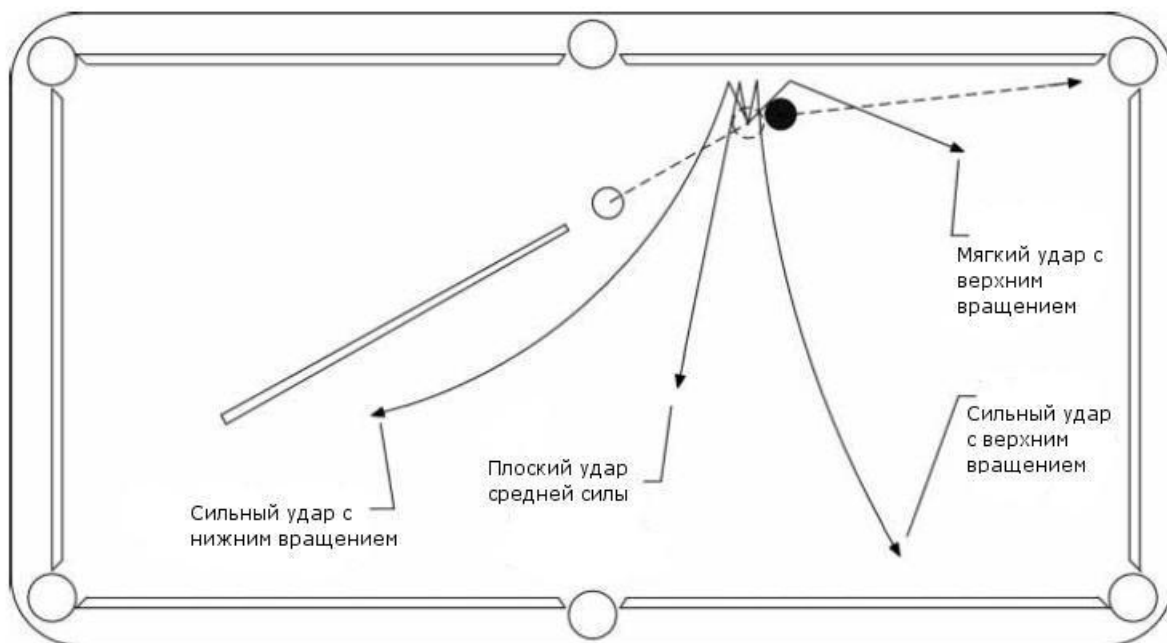


Рис.1. Управление конечным положением битка за счет отражения от борта и придания вращения. Прицельный шар, изображенный черным цветом, при этом отправляется в лузу.

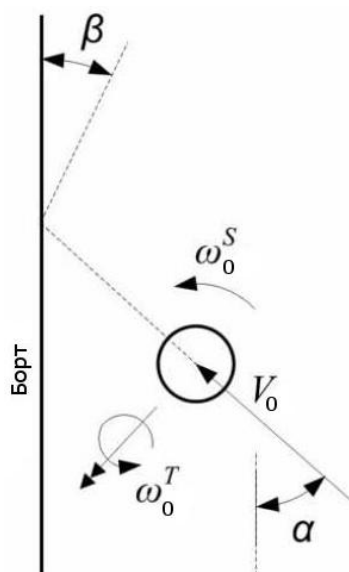


Рис.2. Бильярдный шар перед соударением с бортом.

Ранее, при анализе полагалось, что единственным параметром, влияющим на отражение, является коэффициент восстановления между шаром и бортом, а единственной переменной величиной считалась нормальная составляющая скорости. Согласно соответствующим теоретическим представлениям, считалось, что после отражения от борта (см. рисунок 2) шар обладает перпендикулярной борту скоростью $e_e V_0 \sin \alpha$ и параллельной ему скоростью $V_0 \cos \alpha$, где e_e – коэффициент восстановления. *(Здесь авторы явно передедегивают. Уже в девятнадцатом веке – в книге Г.Кориолиса – была представлена гораздо более сложная модель, не говоря уже о других современных работах. Пусть, на сегодня в этой части теории бильярда сняты далеко не все вопросы, но от использования подобной простейшей модели уже давным-давно отказались. Она применяется, по-видимому, лишь в простейших компьютерных имитирующих программах. Прим. пер.)*. При простом анализе не учитываются эффекты влияния вращения бита и силы трения во время соударения, а сам контакт рассматривается в плоском представлении.

Известно, что вращение шара, как боковое ω_0^S , так и продольное (*верхнее или нижнее; прим. пер.*) ω_0^T (см. рисунок 2), влияют на скорость шара после отражения от борта и угол отражения β . Две последние указанные величины весьма важны для предварительного расчета траектории отраженного шара. Несмотря на то, что автор работы [12] пытался обращаться к этим проблемам, выполненный им анализ опирался на такие параметры, величины которых были неизвестны (например – длительность контакта шара с бортом). В дополнение к этому, иные допущения, сделанные в [12] (например – предположение о постоянстве направления скольжения шара относительно борта), были не вполне корректны. Но важнее то, что анализ, представленный в [12], недостаточно полон.

В этой работе представлен трехмерный анализ соударения шара с бильярдным бортом. Полученные при анализе результаты дают возможность просчитывать последствия соударения при заданных начальных условиях (см. рисунок 2). Представленный материал может быть использован для проведения исследований в автоматизированном бильярде при построении траекторий движения шаров. Такие расчеты необходимы и при разработке тренировочных систем для любителей бильярдной игры – ведь для обучающихся весьма важна информация о том, как конкретный удар (с заданными скоростью и вращениями) меняет позицию шаров на столе. Помимо этого, использование результатов трехмерного анализа в имитирующих системах позволит получать при игре более реалистичные ощущения. К тому же, эта работа может быть интересна для исследователей, работающих в области физики бильярда (практически исчерпывающий список публикаций по этой тематике см. в [13]).

2. Теория

Бильярдный борт изготовлен из чистой резины, обладающей очень хорошей способностью отражения. Поперечное сечение типичного борта показано на рисунке 3. Обычно, резина наклонена к плоскости стола так, что точка соприкосновения I всегда расположена выше центра шара; за счет такого конструктивного решения создается усилие, удерживающее шар от подсакивания при соударении. В представленном ниже анализе предполагается, что во время контакта с шаром геометрия борта не изменяется. Такое предположение может быть не вполне справедливым при высоких скоростях движения шара, так как его нормальная составляющая скорости в точке I , направленная в отрицательном направлении оси Z' (см. рисунок 3), стремится приподнять верхнюю кромку борта. Помимо этого, ниже используется предположение о

контакте шара с бортом в точке, что также может приводить к погрешностям при высоких скоростях, когда шар глубже продавливает бортовую резину.

На рисунке 3 символом h обозначена высота точки контакта шара с бортом I. Как в Снукере, так и в Пуле, $h = 7R/5$, где R – радиус шара. Общая (к поверхностям шара и борта; прим. пер.) нормальная линия Z' составляет с осью Y угол θ , а значит, $\sin \theta = 2/5$.

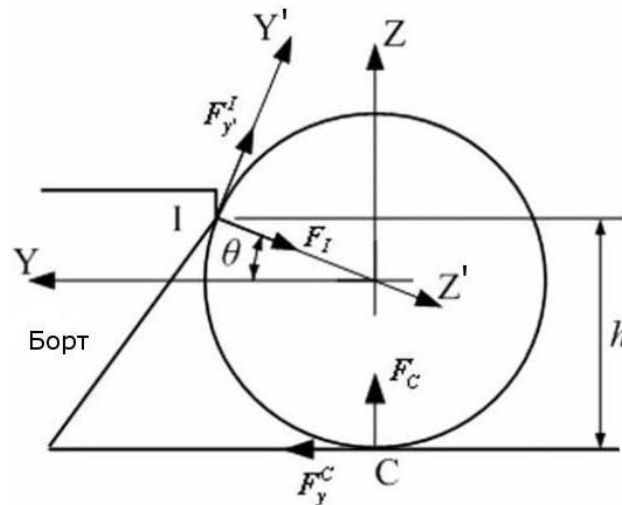


Рис.3. Силы, действующие на шар в момент соударения: вид сбоку вдоль борта на уровне игровой поверхности.

2.1. Основные уравнения движения

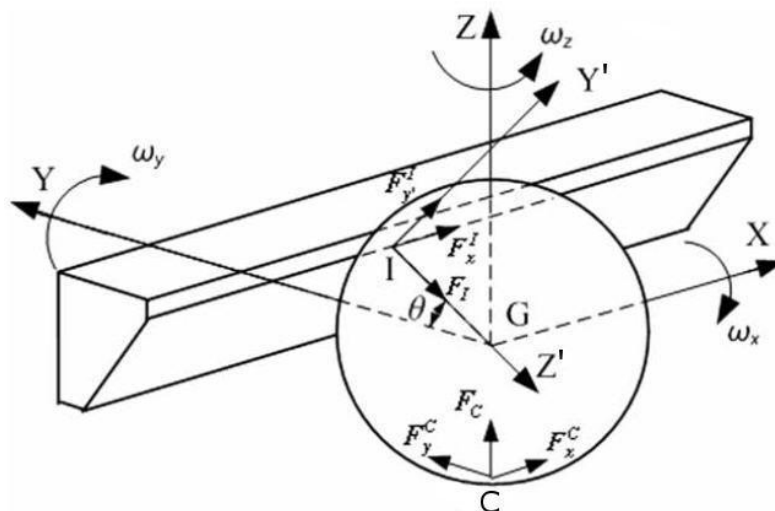


Рис.4. Силы, действующие на шар при соударении (показана часть борта).

Согласно рисунку 4, уравнения поступательного перемещения центра шара G в направлениях X, Y и Z могут быть представлены в виде (для этого припоминаем дифференциальную форму второго закона Ньютона и проектируем действующие силы на оси системы координат; прим. пер.):

$$F_x^I + F_x^C = M\ddot{x}_G, \quad (1a)$$

$$-F_I \cos \theta - F_y^I \sin \theta + F_y^C = M\ddot{y}_G, \quad (1b)$$

$$-F_I \sin \theta + F_y^I \cos \theta + F_C - Mg = M\ddot{z}_G. \quad (1c)$$

Здесь M – масса шара; g – ускорение свободного падения; x_G, y_G, z_G – координаты центра шара. В любой из моментов времени $t = \tau$, находящийся внутри интервала соударения, рассмотрим бесконечно малый промежуток $\Delta\tau$. Обозначим через ΔP импульс суммарной силы F , действующей на шар в течение времени $\Delta\tau$, а через P – суммарный импульс за полное время соударения T (полагая при этом, что контакт начинается в момент времени $t = 0$). Согласно сказанному, справедливы соотношения:

$$\Delta P = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} F dt, \quad (2a)$$

$$P = \sum \Delta P = \int_0^T F dt. \quad (2b)$$

Используя связь между импульсом силы и изменением количества движения, с помощью (2a) получим следующие уравнения:

$$\Delta P_x^I + \Delta P_x^C = M \Delta \dot{x}_G, \quad (3a)$$

$$-\Delta P_I \cos \theta - \Delta P_{y'}^I \sin \theta + \Delta P_y^C = M \Delta \dot{y}_G, \quad (3b)$$

$$-\Delta P_I \sin \theta + \Delta P_{y'}^I \cos \theta + \Delta P_c = M \Delta \dot{z}_G. \quad (3c)$$

Необходимо отметить, что в соотношении (3c) отсутствует слагаемое, учитывающее действие гравитационной силы Mg на шар. Силы, направление действия которых не меняется (в частности – вес шара Mg), при стремлении $\Delta\tau$ к нулю практически не влияют на изменение количества движения шара [14]. *(Справедливость подхода, при котором пренебрегают действием гравитационной силы во время контакта, была продемонстрирована численными примерами и в известной теоретической работе: Ron Shepard, «Amateur Physics For The Amateur Pool Player», 3rd Edition, 1997. Прим. пер.).* Помимо этого, следует заметить, что наклон борта ограничивает вертикальное перемещение шара. Следовательно, в уравнении (3c) $\Delta \dot{z}_G = 0$, а само оно может быть представлено в виде:

$$\Delta P_c = \Delta P_I \sin \theta - \Delta P_{y'}^I \cos \theta. \quad (3d)$$

Аналогичным образом можно составить уравнение для угловой скорости вращения шара вокруг оси X , обозначаемой далее $\dot{\theta}_x$:

$$(\Delta P_{y'}^I + \Delta P_y^C) R = I \Delta \dot{\theta}_x.$$

Здесь $I = 2MR^2/5$ – момент инерции шара, при помощи которого последнее соотношение можно записать следующим образом:

$$\Delta P_{y'}^I + \Delta P_y^C = \frac{2MR}{5} \Delta \dot{\theta}_x. \quad (4a)$$

Таким же путем получают и уравнения для угловых скоростей вращения вокруг других осей:

$$\Delta P_x^I \sin \theta - \Delta P_x^C = \frac{2MR}{5} \Delta \dot{\theta}_y, \quad (4b)$$

$$-\Delta P_x^I \cos \theta = \frac{2MR}{5} \Delta \dot{\theta}_z. \quad (4c)$$

2.2. Динамика соударения в точках I и C

В большинстве случаев шар контактирует с бортом в точке I при наличии скольжения (прокатывание шара по борту может быть отнесено к частной ситуации, при которой скорость скольжения равна нулю). Скольжение происходит в плоскости $X'Y'$ (то есть, в тангенциальной плоскости); отметим также, что ось Y' располагается в плоскости YZ . Пусть скорость скольжения шара в точке I, обозначаемая $s(t)$ (как это обычно принято, здесь и далее переменная, помещенная в скобки, является аргументом указанной функции; прим. пер.), направлена под углом $\Phi(t)$ к оси X . В силу того, что величина F_I принимает значение, большее нуля, мгновенное значение нормального импульса P_I , согласно соотношению (2b), всегда будет положительным. К

тому же, величина P_I монотонно возрастает по времени t внутри интервала контакта. В связи с этим, при анализе соударения вместо традиционной независимой переменной t можно использовать величину P_I [15]. (Для более подробного пояснения подхода, использованного в подразделе 2.2, смотри работу [15]).

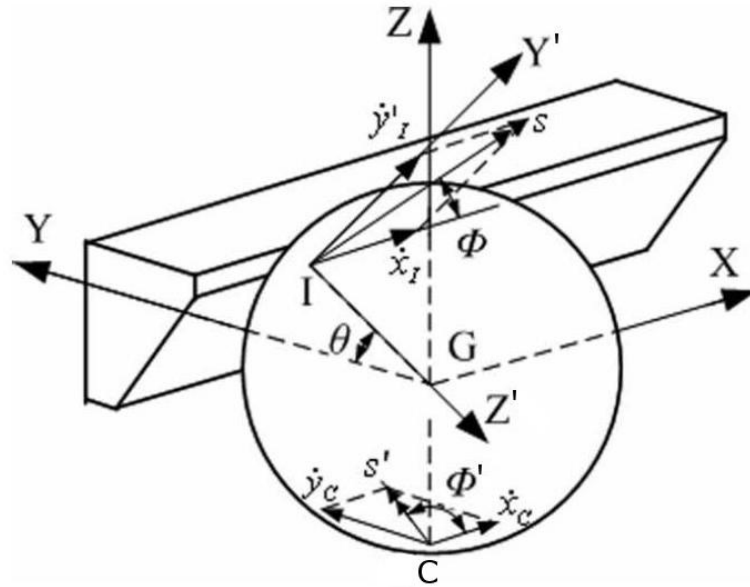


Рис.5. Скорости скольжения в точках I и C.

Обращаясь к рисунку 5, выпишем зависимости, которым подчиняются скорости скольжения в направлении осей X и Y':

$$\dot{x}_I = s(P_I) \cos[\Phi(P_I)], \quad (5a)$$

$$\dot{y}'_I = s(P_I) \sin[\Phi(P_I)]. \quad (5b)$$

Однако, величина \dot{y}'_I может быть выражена также и следующим образом:

$$\dot{y}'_I = -\dot{y}_I \sin \theta + \dot{z}_I \cos \theta. \quad (6)$$

Используя закон трения Амонтона – Кулона при $s > 0$, а также обращая внимание на то, что силы трения и их импульсы направлены противоположно скорости скольжения, выразим импульсы силы трения в направлении осей X и Y':

$$\Delta P_x^I = -\mu_w \cos[\Phi(P_I)] \Delta P_I, \quad (7a)$$

$$\Delta P_{y'}^I = -\mu_w \sin[\Phi(P_I)] \Delta P_I, \quad (7b)$$

где μ_w – коэффициент трения скольжения между шаром и бортом.

Из уравнений (3d) и (7b) определим нормально направленную реакцию поверхности стола, приложенную к шару в точке C:

$$\Delta P_C = \{\sin \theta + \mu_w \sin[\Phi(P_I)] \cos \theta\} \Delta P_I. \quad (8)$$

На основании выше приведенных рассуждений, для контакта в точке C в качестве независимой переменной должна быть принята величина мгновенного импульса P_C . Однако, уравнение (8) показывает, что P_C непосредственно зависит от значения P_I . Это позволяет использовать величину P_I в качестве независимой переменной для всех импульсов сил, действующих на шар.

Скольжение при контакте в точке C происходит в плоскости XY. Обозначим через s' скорость скольжения, направление которой отклонено от оси X на угол Φ' . Тогда, проекции скорости скольжения на оси X и Y выражаются соотношениями

$$\dot{x}_C = s'(P_I) \cos[\Phi'(P_I)], \quad (9a)$$

$$\dot{y}_C = s'(P_I) \sin[\Phi'(P_I)]. \quad (9b)$$

В дальнейших выкладках для простоты не будем явно указывать зависимость величин от независимой переменной P_I . Учитывая, что $s' > 0$, с помощью (8) выразим проекции на оси X и Y действующих в точке C импульсов силы:

$$\Delta P_x^C = -\mu_s \text{Cos} \Phi' \Delta P_C = -\mu_s \text{Cos} \Phi' (\text{Sin} \theta + \mu_w \text{Sin} \Phi \text{Cos} \theta) \Delta P_I, \quad (10a)$$

$$\Delta P_y^C = -\mu_s \text{Sin} \Phi' \Delta P_C = -\mu_s \text{Sin} \Phi' (\text{Sin} \theta + \mu_w \text{Sin} \Phi \text{Cos} \theta) \Delta P_I, \quad (10b)$$

где μ_s – коэффициент трения скольжения между шаром и поверхностью стола.

2.3. Соотношения для скорости

Скорость любой точки, находящейся на поверхности шара, можно выразить векторным уравнением: $V = V_G + \omega \times R$. Здесь V – вектор поступательной скорости рассматриваемой точки; V_G – вектор поступательной скорости центра шара; ω – вектор угловых скоростей вращения шара вокруг его центра; R – вектор, определяющий пространственное положение рассматриваемой точки относительно центра шара; \times – символ векторного произведения. Отсюда следует, что

$$\Delta V = \Delta V_G + \Delta \omega \times R. \quad (11)$$

Раскрывая соотношение (11) для проекций на оси системы координат, можно выразить скорости скольжения через скорости поступательного перемещения центра шара.

Для точки I получим:

$$\Delta \dot{x}_I = \Delta \dot{x}_G + \Delta \dot{\theta}_y R \text{Sin} \theta - \Delta \dot{\theta}_z R \text{Cos} \theta, \quad (12a)$$

$$\Delta \dot{y}_I = -\Delta \dot{y}_G \text{Sin} \theta + \Delta \dot{z}_G \text{Cos} \theta + \Delta \dot{\theta}_x R. \quad (12b)$$

Аналогично, найдем соотношения для точки C:

$$\Delta \dot{x}_C = \Delta \dot{x}_G - \Delta \dot{\theta}_y R, \quad (13a)$$

$$\Delta \dot{y}_C = \Delta \dot{y}_G + \Delta \dot{\theta}_x R. \quad (13b)$$

Уравнения (12), (13) дают возможность вычислять скорости и углы скольжения шара, как на поверхности стола, так и в точке его касания с бортом.

2.4. Описание динамики шара

С помощью подстановки выражений для ΔP_x^I и ΔP_x^C из уравнений (7a) и (10a) в (3a) можно выразить $\Delta \dot{x}_G$ – прирост скорости центра шара x_G в направлении оси X – через углы скольжения Φ и Φ' :

$$\Delta \dot{x}_G = -\frac{1}{M} [\mu_w \text{Cos} \Phi + \mu_s \text{Cos} \Phi' (\text{Sin} \theta + \mu_w \text{Sin} \Phi \text{Cos} \theta)] \Delta P_I.$$

При стремлении ΔP_I к нулю, последнее соотношение трансформируется к виду

$$\frac{d\dot{x}_G}{dP_I} = -\frac{1}{M} [\mu_w \text{Cos} \Phi + \mu_s \text{Cos} \Phi' (\text{Sin} \theta + \mu_w \text{Sin} \Phi \text{Cos} \theta)]. \quad (14a)$$

С помощью подобного подхода можно получить соотношения:

$$\frac{d\dot{y}_G}{dP_I} = -\frac{1}{M} [\text{Cos} \theta - \mu_w \text{Sin} \theta \text{Sin} \Phi + \mu_s \text{Sin} \Phi' (\text{Sin} \theta + \mu_w \text{Sin} \Phi \text{Cos} \theta)], \quad (14b)$$

$$\frac{d\dot{z}_G}{dP_I} = 0, \quad (14c)$$

$$\frac{d\dot{\theta}_x}{dP_I} = -\frac{5}{2MR} [\mu_w \text{Sin} \Phi + \mu_s \text{Sin} \Phi' (\text{Sin} \theta + \mu_w \text{Sin} \Phi \text{Cos} \theta)], \quad (14d)$$

$$\frac{d\dot{\theta}_y}{dP_I} = -\frac{5}{2MR} [\mu_w \text{Cos} \Phi \text{Sin} \theta - \mu_s \text{Cos} \Phi' (\text{Sin} \theta + \mu_w \text{Sin} \Phi \text{Cos} \theta)], \quad (14e)$$

$$\frac{d\dot{\theta}_z}{dP_I} = \frac{5}{2MR} (\mu_w \text{Cos} \Phi \text{Cos} \theta). \quad (14e)$$

Дифференциальные уравнения (14) полностью описывают движение шара. С помощью соотношений из подраздела 2.3, углы скольжения Φ и Φ' можно выразить через величины $\{\dot{x}_G, \dot{y}_G, \dot{z}_G, \dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y, \dot{\theta}_z\}$. В результате, получится система из шести

дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных $\{\dot{x}_G, \dot{y}_G, \dot{z}_G, \dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y, \dot{\theta}_z\}$, входящих в правые части уравнений в квадратичном виде. Аналитическое решение этой системы уравнений найти чрезвычайно трудно (да и вообще, есть серьезные сомнения в том, что это – подъемная задача; прим. пер.). Однако, ее можно решать численно, и при построении вычислительной схемы удобно использовать форму уравнений (14).

3. Численное решение

Как было указано выше, для решения системы из шести дифференциальных уравнений используем численный метод. Для применения вычислительного алгоритма необходимо знать: начальные условия – значения скоростей шара; условия, при которых происходят изменения в движении (такие, как переход от перемещения со скольжением к обычному вращению); численные значения параметров, входящих в уравнения (например, μ_s).

3.1. Начальные условия

Согласно рисунку 2, начальными условиями для скоростей центра шара являются следующие значения:

$$\begin{aligned} (\dot{x}_G)_1 &= V_0 \cos \alpha, \quad (\dot{y}_G)_1 = V_0 \sin \alpha, \quad (\dot{z}_G)_1 = 0, \\ (\dot{\theta}_x)_1 &= -\omega_0^T \sin \alpha, \quad (\dot{\theta}_y)_1 = \omega_0^T \cos \alpha, \quad (\dot{\theta}_z)_1 = \omega_0^S. \end{aligned}$$

Начальные скорости скольжения в точках I и C:

$$s(0) = \sqrt{[V_0 \cos \alpha + R(\omega_0^T \cos^2 \alpha \sin^2 \theta - \omega_0^S \cos \theta)]^2 + [-V_0 \sin \alpha \sin^2 \theta - R\omega_0^T \sin^2 \alpha]^2},$$

$$s'(0) = |V_0 - R\omega_0^T|.$$

Начальные величины углов скольжения:

$$\Phi(0) = \text{Arctg} \left[\frac{-V_0 \sin \alpha \sin^2 \theta - R\omega_0^T \sin^2 \alpha}{V_0 \cos \alpha + R(\omega_0^T \cos^2 \alpha \sin^2 \theta - \omega_0^S \cos \theta)} \right],$$

$$\Phi'(0) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } V_0 - R\omega_0^T > 0 \\ 180^\circ + \alpha, & \text{если } V_0 - R\omega_0^T < 0 \end{cases}$$

В случае $V_0 - R\omega_0^T = 0$ угол $\Phi'(0)$ не определен, так как при этом шар находится в состоянии естественного качения.

3.2. Коэффициенты трения и условия естественного качения

При качении скорость скольжения s (или скорость скольжения шара по сукну на игровой поверхности s') становится нулевой. При этом относительное перемещение поверхности шара относительно стола в точке соприкосновения прекращается, а величина сил трения обращается в нуль (если пренебречь эффектом сцепления).

1. При выполнении условия $s = 0$ шар будет прокатываться по борту стола в точке I. При этом $\Delta P_x^I = \Delta P_y^I = 0$ и из уравнения (3с) следует, что $\Delta P_C = 0$.

Следовательно,

$$\Delta P_x^C = \Delta P_y^C = 0. \quad (15a)$$

2. При естественном качении шара по поверхности стола $s' = 0$ и

$$\Delta P_x^C = \Delta P_y^C = 0. \quad (15b)$$

До написания этой работы авторы провели эксперименты с использованием высокоскоростной видеокамеры. С помощью них были получены оценки величины коэффициента трения скольжения шара по столу μ_s , находящиеся в интервале от 0.178

до 0.245 [16]. В [12] для игры в Пул предлагалось значение 0.2. Авторы провели многочисленные эксперименты с оборудованием для игры в Снукер, из которых следует, что в численных расчетах применимо среднее значение величины μ_s , составляющее 0.212. При этом шар для Снукера имеет следующие характеристики: $M = 0.1406$ кг; $R = 26.25$ мм.

3.3. Коэффициент восстановления и механика соударения

Согласно [15], коэффициент восстановления энергии e_e не зависит от трения и протекания процесса скольжения. Величина e_e^2 (квадрат коэффициента восстановления) представляет собой взятое с обратным знаком отношение работы, выполненной импульсом силы на стадии восстановления, к работе, выполненной на стадии сжатия. *(Использованные авторами названия «стадия сжатия» и «стадия восстановления», с одной стороны, удачно отражают процесс, происходящий при контакте шара с бортом. Действительно, на начальном этапе бортовая резина сжимается, а затем восстанавливает свою форму, за счет чего шар отражается. Более того, при соударении сам шар несколько деформируется и впоследствии принимает исходную форму. Однако, этим эффектом вполне разумно пренебрегать, если брать в расчет степень деформации упругого борта. С другой стороны, применение терминов «сжатие» и «восстановление» противоречит принятой жесткой модели бильярдного борта. Возможно, названия «этап торможения» и «этап набора скорости при отражении» были бы несколько удачнее. Прим. пер.).* Работа сил, действующих в точке I по направлению оси Z' , равна

$$\Delta W_{Z'_I} = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} F_I \dot{z}'_I dt = \int_{P_I}^{P_I+\Delta P_I} \dot{z}'_I dP_I.$$

Представим последнее соотношение в разностной форме:

$$(W_{Z'_I})_{n+1} - (W_{Z'_I})_n = \Delta P_I \frac{[(\dot{z}'_I)_{n+1} + (\dot{z}'_I)_n]}{2}. \quad (16a)$$

Здесь \dot{z}'_I – относительная скорость между шаром и бортом в направлении общей нормали к точке I. (Предполагается, что борт не перемещается настолько, чтобы влиять на изменение относительной скорости; иными словами, борт рассматривается в качестве жесткого тела). Сила F_I действует на шар по нормали от борта. Обозначим через P_I^f и P_I^c накопленный импульс в момент окончания действия силы и в момент окончания сжатия, соответственно. Тогда, согласно [15]:

$$e_e^2 = - \int_{P_I^c}^{P_I^f} \dot{z}'_I dP_I / \int_0^{P_I^c} \dot{z}'_I dP_I.$$

Пользуясь (16a), представим это соотношение в следующем виде:

$$W_{Z'_I}(P_I^f) = (1 - e_e^2) W_{Z'_I}(P_I^c). \quad (16b)$$

Сжатие заканчивается, когда нормальная компонента относительной скорости обращается в нуль. Иными словами, это наступает при выполнении условия:

$$\dot{z}'_I(P_I^c) = 0. \quad (16c)$$

$(\dot{z}'_I = -\dot{y}_G \cos \theta - \dot{z}_G \sin \theta = -\dot{y}_G \cos \theta$. Отсюда следует, что условие (16c) будет выполняться в момент, когда \dot{y}_G меняет знак. Именно этот факт отслеживается численным алгоритмом, блок-схема которого изображена на рисунке 6. Прим. пер.). Согласно [15], коэффициент восстановления между шаром и бортом для Пула составляет $e_e = 0.55$. *(Точно такую же величину указывает в своем труде [1] и Г.Кориолис. При этом, он в общих чертах описывает суть опыта, на основании которого и получил такое значение. Прим. пер.).* Тем не менее, авторы экспериментальным путем получили график, рассчитанный для перпендикулярного

соударения шара с бортом стола для Снукера. При этом видеосъемками фиксировалось соударение и отражение шара, находящегося в стадии естественного качения и не имеющего бокового вращения [15]. Результаты исследований показали, что в таком случае величина коэффициента восстановления в среднем составляла 0.818 (процедура этого эксперимента кратко описана в подразделе 3.5). Нужно отметить, что величина 0.818 аккумулирует в себе эффекты действия трения и трехмерности импульса силы; она может рассматриваться лишь в качестве оценки типичного значения.

3.4. Численный алгоритм

Соотношения (14) можно представить в разностной (алгебраической) форме. Например, (14а) примет вид:

$$(\dot{x}_G)_{n+1} - (\dot{x}_G)_n = -\frac{1}{M} \{ \mu_w \text{Cos}(\Phi)_n + \mu_s \text{Cos}(\Phi')_n [\text{Sin} \theta + \mu_w \text{Sin}(\Phi)_n \text{Cos} \theta] \} \Delta P_I, \quad (17a)$$

где углы $(\Phi)_n$ и $(\Phi')_n$ определяются следующими уравнениями, вытекающими из (12) и (13):

$$\text{Tg}(\Phi)_n = \frac{-(\dot{y}_G)_n \text{Sin}^2 \theta + (\dot{z}_G)_n \text{Cos}^2 \theta + (\dot{\theta}_x)_n R}{(\dot{x}_G)_n + (\dot{\theta}_y)_n R \text{Sin}^2 \theta - (\dot{\theta}_z)_n R \text{Cos}^2 \theta}, \quad \text{Tg}(\Phi')_n = \frac{(\dot{y}_G)_n + (\dot{\theta}_x)_n R}{(\dot{x}_G)_n - (\dot{\theta}_y)_n R}.$$

(Соотношения в разностной форме, следующие из (14) (в частности – (17а)), реализуют численный метод Эйлера для решения систем дифференциальных уравнений. Прим. пер.). Численный алгоритм был реализован с помощью языка программирования MATLAB®. Исходными данными для вычислительной схемы являются значения V_0 , ω_0^T , ω_0^S , α , а сама она построена на подсчете изменений величин V_0 , ω_0^T , ω_0^S , α при возрастании переменной P_I малыми «шагами». Использование меньших значений прироста импульса P_I (то есть, ΔP_I) в уравнениях типа (17а) приводит к более точным результатам. Задачей вычислительной процедуры является отыскания скоростей центра шара в момент, когда накопленный импульс станет равен P_I^f .

Численная процедура, блок-схема которой изображена на рисунке 6, стартует с вычисления начальных скоростей центра шара и соответствующих скоростей и углов скольжения (подраздел 3.1). Создаются массивы для хранения промежуточных значений скоростей шара, скоростей и углов скольжения для каждого приращения ΔP_I . С помощью (17а) и еще пяти подобных ей формул рассчитываются приращения скоростей центра шара. С использованием этих приращений и зависимостей (12а), (12б), (13а), (13б) подсчитываются новые скорости скольжения. В программе предусмотрено отслеживание факта выполнения условий прекращения скольжения (15а), (15б). Значения скоростей шара сохраняются в массивах, включающих в себя также и величины работы, выполненной в точке I силой, направленной по оси Z' (то есть, значения $W_{Z'I}$, вычисляемые согласно (16а)). Очередные значения параметров заносятся в эти массивы, когда величина ΔP_I добавляется.

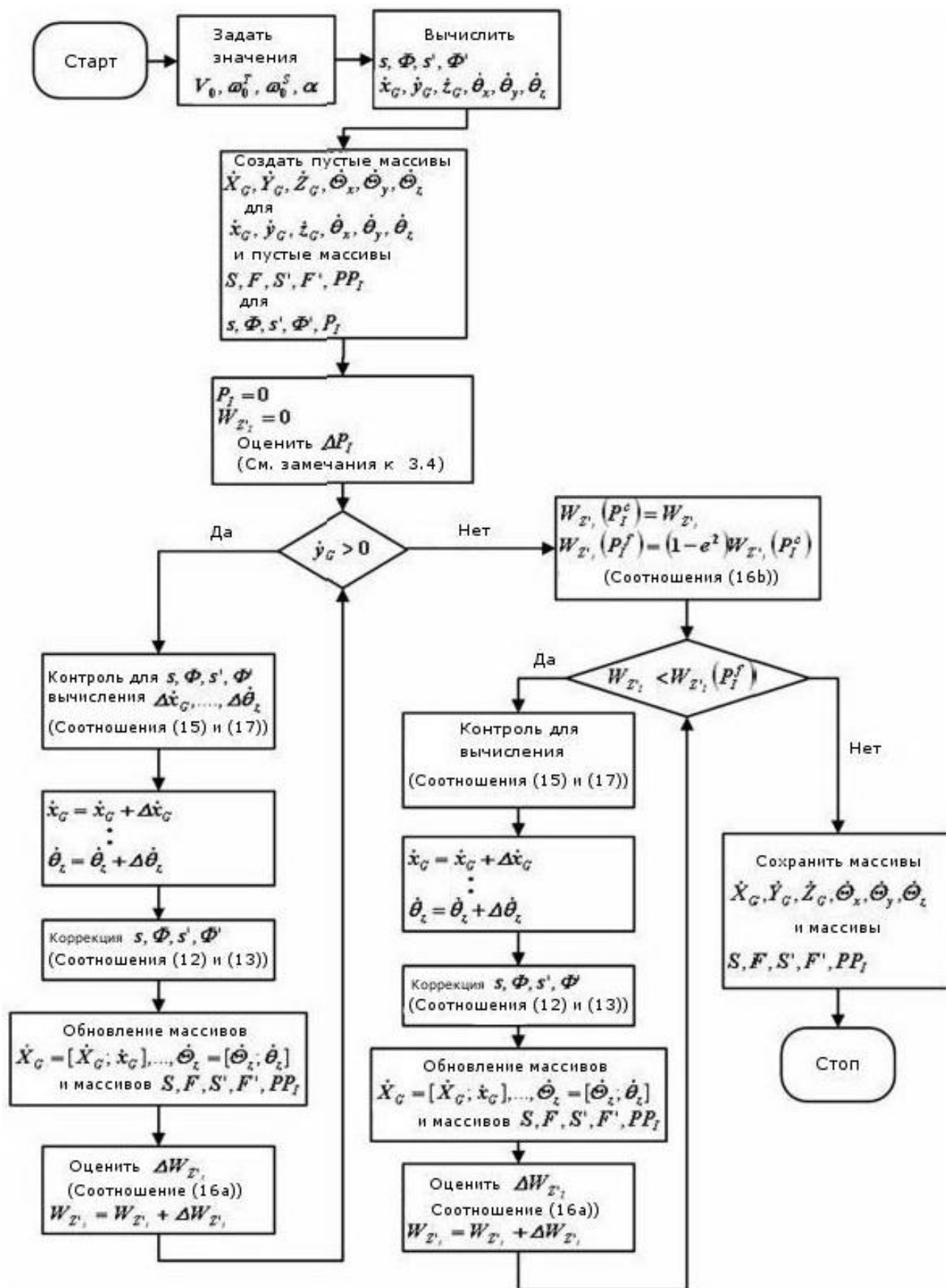


Рис.6. Блок-схема численного алгоритма.

Значение P_I^f не может быть найдено аналитически и должно быть получено численно с помощью соотношений (16a) и (16b). Численные расчеты сначала приостанавливаются при выполнении условия $\dot{z}'_I = 0$ (когда заканчивается фаза сжатия), а соответствующее значение выполненной работы $W_{z'_I}(P_I^c)$ считывается из массива. Если коэффициент e_e известен, то из соотношения (16b) с помощью $W_{z'_I}(P_I^c)$ можно определить величину $W_{z'_I}(P_I^f)$. После этого процесс расчета возобновляется и продолжается вплоть до выполнения условия $W_{z'_I} = W_{z'_I}(P_I^f)$. Скорости отраженного бортом шара будут последними среди запомненных в массивах значений.

Замечания: Для того чтобы начать вычислительную процедуру, необходимо задать приемлемое значение ΔP_I . В качестве предварительной оценки для величины P_I^f можно использовать выражение $(1 + e_e)MV_0 \sin \alpha$, которое определяет величину конечного накопленного нормального импульса горизонтально перемещающегося шара, не имеющего вращения и соударяющегося с жесткой вертикальной стенкой. Следовательно, для N итераций (шагов) можно найти приближенное значение $\Delta P_I = [(1 + e_e)MV_0 \sin \alpha / N]$. Очевидно, что значения P_I^c и P_I^f определяют истинное количество итераций, которое будет получиться при расчетах. Для представленной вычислительной схемы вполне удовлетворительно начальное приближение $N = 5000$.

3.5. Оценивание e_e и μ_w

Данные, представленные на рисунке 7, были получены при проведении экспериментов на столе для Снукера *Riley Renaissance* (такие столы используются на профессиональных турнирах, проводимых под эгидой Всемирной Ассоциации Снукера) со следующими исходными данными: $\omega_0^S = 0$; $\alpha = 90^\circ$; $\omega_0^T = V_0/R$. (Последнее равенство означает, что исследовались соударения при естественном качении шара. Прим. пер.). Скорость шара рассчитывалась при помощи экспериментальной процедуры с использованием стационарной высокоскоростной видеокамеры (эта процедура подробно представлена в работе [16]). Известно, что величина e_e удовлетворяет неравенству $0 < e_e \leq 1$. Для каждого экспериментально полученного значения скорости при соударении (V_0), принадлежащего интервалу $V_0 < 1.5$ м/с, применялся численный алгоритм вычисления величины $y'_G(P_I^f)$. При этом расчеты проводились для набора значений e_e и μ_w в интервале от 0 до 1 с шагом 0.01. Более высокие скорости соударения не рассматривались в связи с тем, что предположение о твердости борта при этом может быть непригодным. Искомыми были такие значения e_e и μ_w , при которых минимальна сумма квадратов отклонений расчетных величин скорости от экспериментально полученных значений. Вычисления показали, что указанный минимум обеспечивает пара значений $e_e = 0.98$ и $\mu_w = 0.14$.

Численно полученные значения скорости шара после его отражения от борта, соответствующие величинам $e_e = 0.98$ и $\mu_w = 0.14$, представлены в виде графика на рисунке 7. Там же нанесены и значения скорости, полученные при натурном экспериментировании. Из правой части рисунка 7, обозначенной символом b), видно, что при скоростях $V_0 > 2.5$ м/с рассчитанные значения скорости после отражения отклоняются от измеренных величин. Вполне логично предположить, что значение $V_0 = 2.5$ м/с выступает в качестве ограничения для обоснованного использования модели борта в виде жесткого тела. Скорость $V_0 = 2.5$ м/с довольно высока для игры в Снукер. С помощью численного алгоритма, приведенного в подразделе 3.4, можно

анализировать наклонные соударения с бортом, для которых нормальная составляющая скорости шара перед соударением не превышает 2.5 м/с.

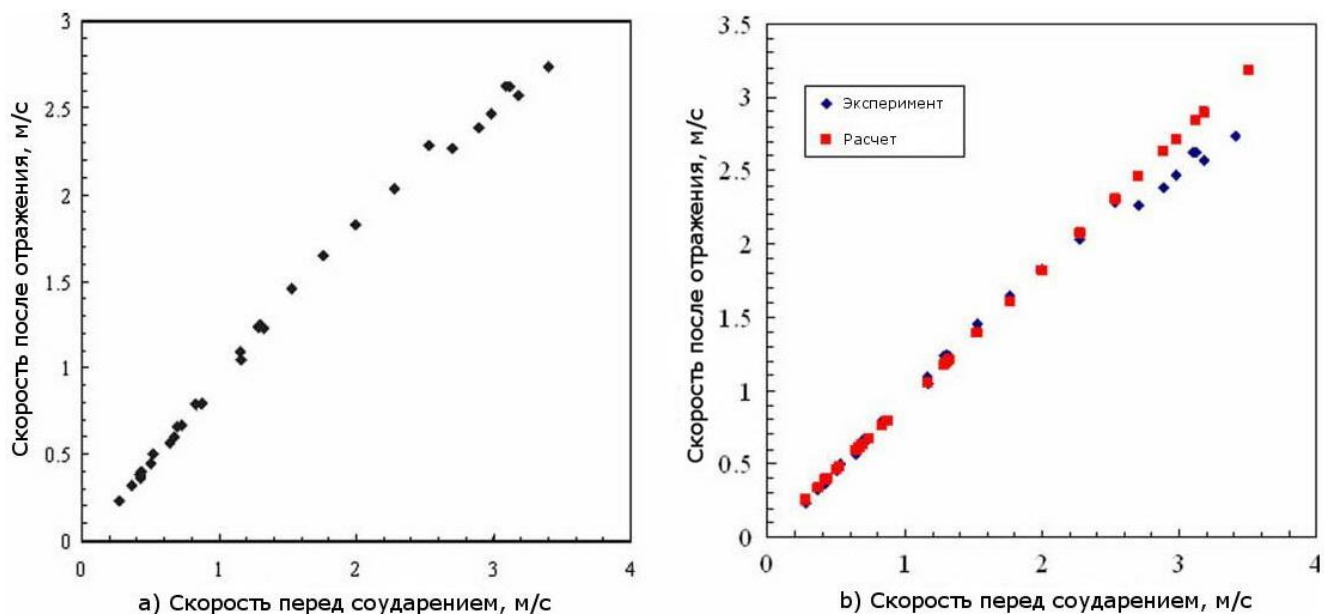


Рис.7. Зависимости скорости шара после отражения от скорости перед соударением, полученные экспериментально и численно.

4. Результаты и обсуждение

Результаты, полученные при помощи численного алгоритма для различных комбинаций поступательной скорости и вращения шара, представлены на рисунках 8 – 10.

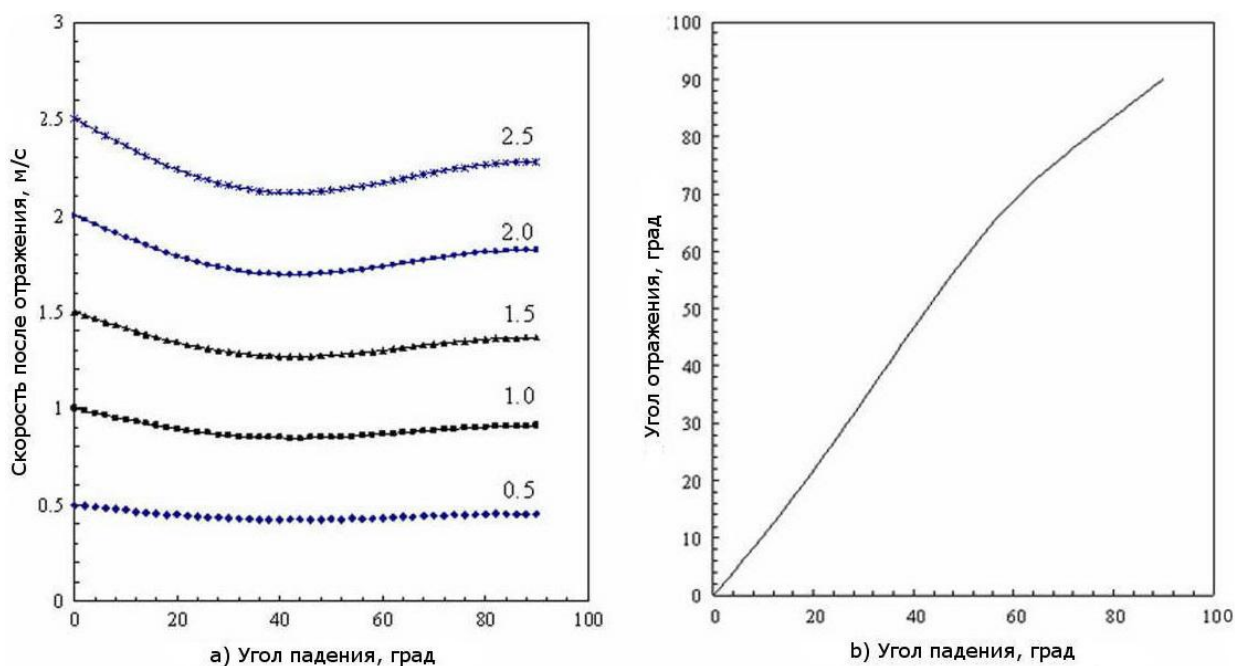


Рис.8. Зависимости скорости и угла отражения от угла падения для различных скоростей качения без бокового вращения ($\omega_0^T = V_0/R$; $\omega_0^S = 0$).

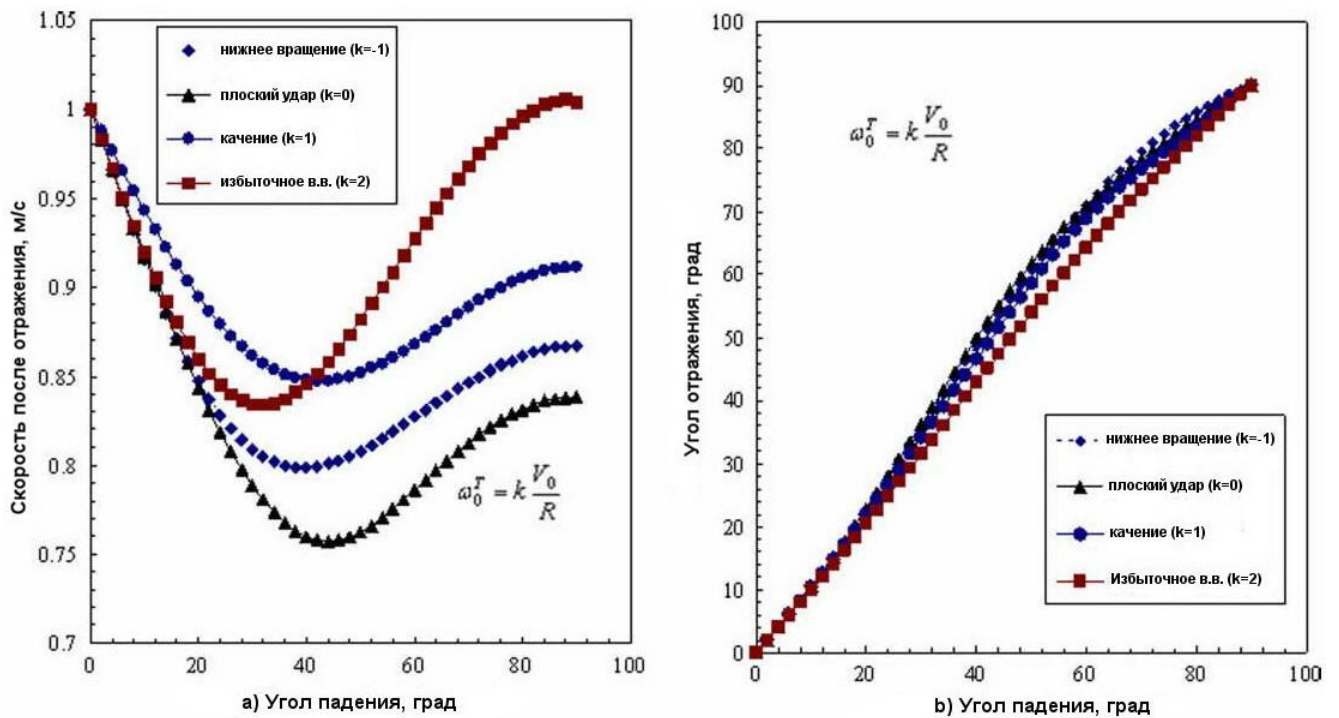


Рис.9. Зависимости скорости и угла отражения от угла падения для различных продольных вращений $\omega_0^T = kV_0/R$ при $V_0 = 1$ м/с и отсутствии бокового вращения ($\omega_0^S = 0$).

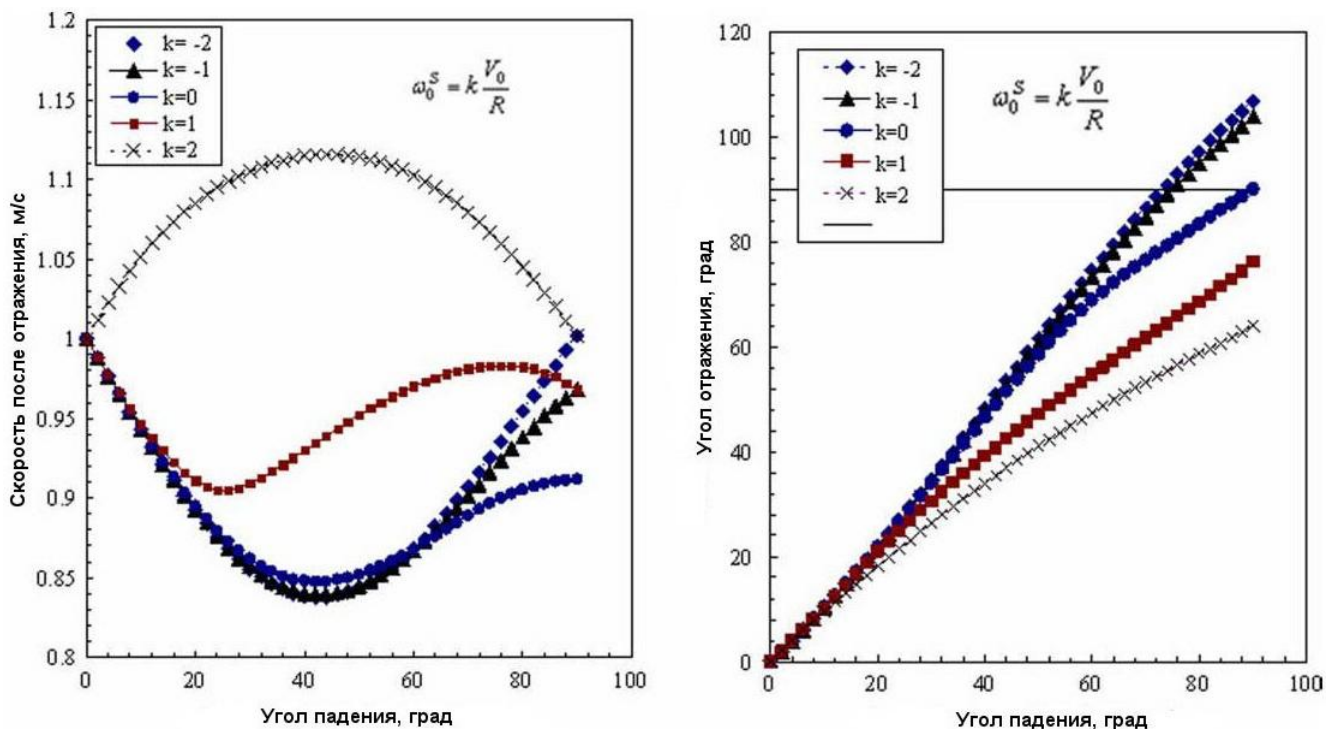


Рис.10. Зависимости скорости и угла отражения от угла падения для различных боковых $\omega_0^S = kV_0/R$ вращений при $V_0 = 1$ м/с и естественном качении ($\omega_0^T = V_0/R$).

После удара, нанесенного кием, бильярдный шар в большинстве случаев начинает двигаться со скольжением, и при этом $\omega_0^T \neq V_0/R$. Однако, вскоре условие

естественного качения $\omega^T = V/R$ начинает выполняться. Это происходит за счет действия трения между шаром и бильярдным сукном (заинтересованные читатели могут обратиться к графическому материалу, полученному при высокоскоростной видеосъемке и представленному в [16]). В результате, в большинстве случаев к моменту соударения с бортом шар начинает катиться, иногда обладая при этом и боковым вращением. Графики, соответствующие простейшему случаю соударения с бортом при естественном качении и без бокового вращения, представлены на рисунке 8. Зависимость скорости отраженного бортом шара от угла падения ясно показывает монотонное возрастание скорости отражения при увеличении скорости перед соударением. Из правой части рисунка 8 видно, что угол отражения остается одним и тем же при различных скоростях шара перед соударением. График свидетельствует, что для соударения при естественном качении и без бокового вращения угол отражения определяется лишь углом падения.

На рисунке 9 изображены результаты расчетов отражения шара, имевшего перед соударением под различными углами падения поступательную скорость $V_0 = 1 \text{ м/с}$ и разные продольные вращения. По рисунку видна общая тенденция: шар, имеющий перед соударением избыточное верхнее вращение, обычно отражается с большей скоростью. При избыточном верхнем вращении $\omega_0^T = 2V_0/R$ и угле падения $\alpha = 90^\circ$ скорость отражения достигает скорости шара перед соударением. Для всех вариантов продольного вращения (*нижнее вращение при соударении, плоское соударение, качение, избыточное верхнее вращение; прим. пер.*) наибольшие потери скорости за счет соударения проявляются при углах падения, располагающихся вблизи величины $\alpha = 40^\circ$. Из правой части рисунка 9 видно, что направление и интенсивность продольного вращения весьма слабо влияют на величину угла отражения.

Рисунок 10 представляет результаты расчетов последствий соударений, произошедших при качении шара, обладающего боковым вращением различной интенсивности. Графики отображают некоторые весьма интересные результаты. При правом боковом вращении (согласно бильярдной терминологии, таким вращением обладает шар, изображенный на рисунке 2; противоположно направленное боковое вращение называется левым), скорость отражения превышает скорость перед соударением. Кроме того, при высоких интенсивностях левого бокового вращения и углах падения, приближающихся к 90° , скорость отражения также превышает скорость перед соударением. Из правой части рисунка 10 видно, что при наличии левого бокового вращения ($k < 0$) для углов падения, близких к 90° , шар отражается в ту же сторону (по отношению к нормали), с которой он подошел к борту (см. рисунок 11). Такой эффект отражения был описан в [17] в приложении к бильярду и в [18] для общей постановки задачи исследования отражения шара или мяча. В [18] представлены результаты экспериментов при исследовании характеристик отражения теннисного мяча, отскакивающего от шероховатой поверхности.

График зависимостей скоростей скольжения от величины накопленного импульса силы приведен на рисунке 12. Из него видно, что предположение о неизменности углов скольжения не является верным.

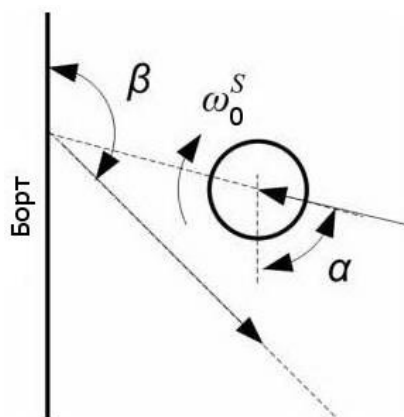


Рис. 11. Шар отражается в ту же сторону, с которой он подходит к борту при соударении с левым вращением и углом падения, близким к 90° .

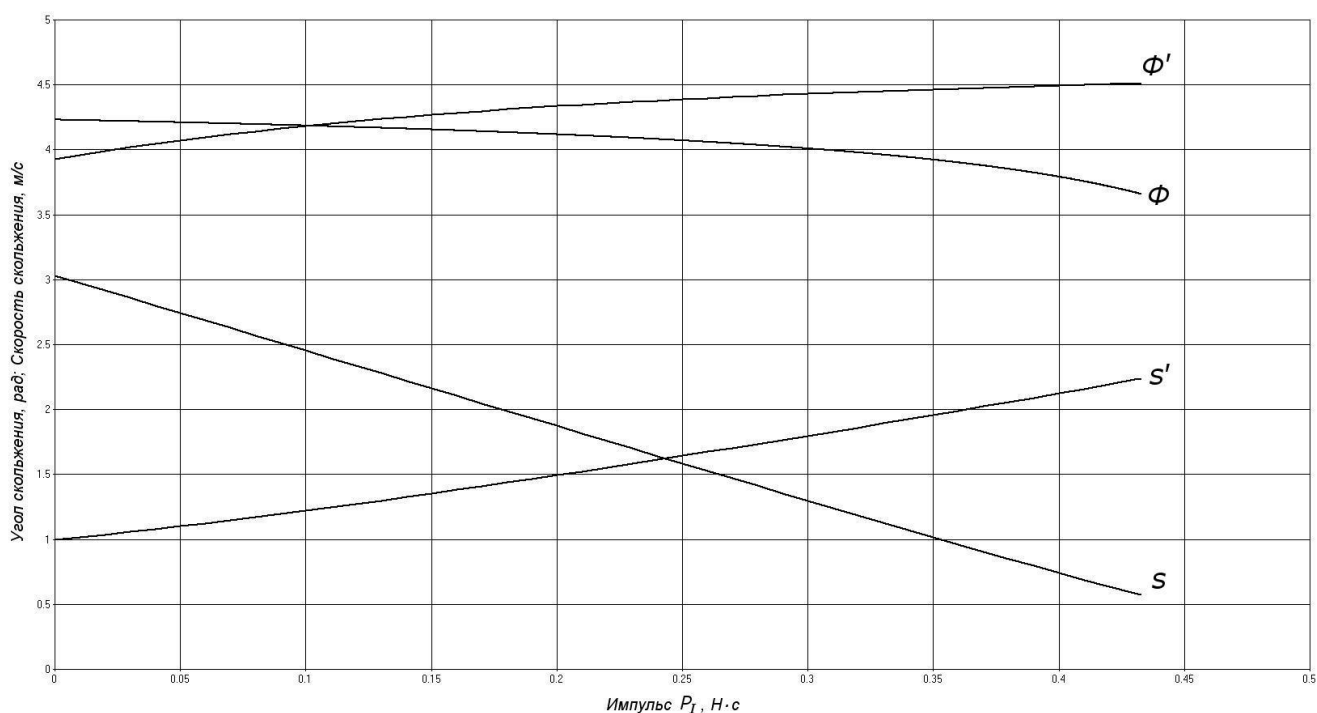


Рис. 12. Зависимости характеристик скольжения от импульса силы, рассчитанные при $V_0 = 2$ м/с, $\alpha = 45^\circ$, $\omega_0^S = 2V_0/R$, $\omega_0^T = 1.5V_0/R$ (s , Φ – скорость и угол скольжения на борту; s' , Φ' – скорость и угол скольжения на игровой поверхности).

5. Заключение

В работе представлен трехмерный анализ соударения вращающегося шара с бортом. Найдены численные решения полученных дифференциальных уравнений, описывающих динамику шара в течение периода соударения. Объединяя полученные численные решения с результатами ранее проведенных экспериментов, удалось найти величину коэффициента восстановления при соударении шара с бортом: 0.98. Попутно с этим, было определено значение коэффициента трения скольжения, составляющее 0.14. Графически представлены зависимости углов и скоростей отражения шара от углов падения и скоростей перед соударением. Графики построены для различных

сочетаний поступательной и угловых скоростей шара. Получены результаты, подтверждающие, что при интенсивных боковых вращениях скорость отражения превышает скорость шара перед соударением. Помимо этого, показано, что шар может отражаться в ту же сторону, с которой он под углом приближался к борту.

Несмотря на то, что проведенный анализ дает количественные оценки для многих явлений, связанных с бортовыми соударениями, обсуждавшимися в бильярдной литературе, их следует подтвердить измерениями характеристик вращения бильярдного шара. Для этих целей может быть полезна цветная разрисовка белого шара.

Ссылки

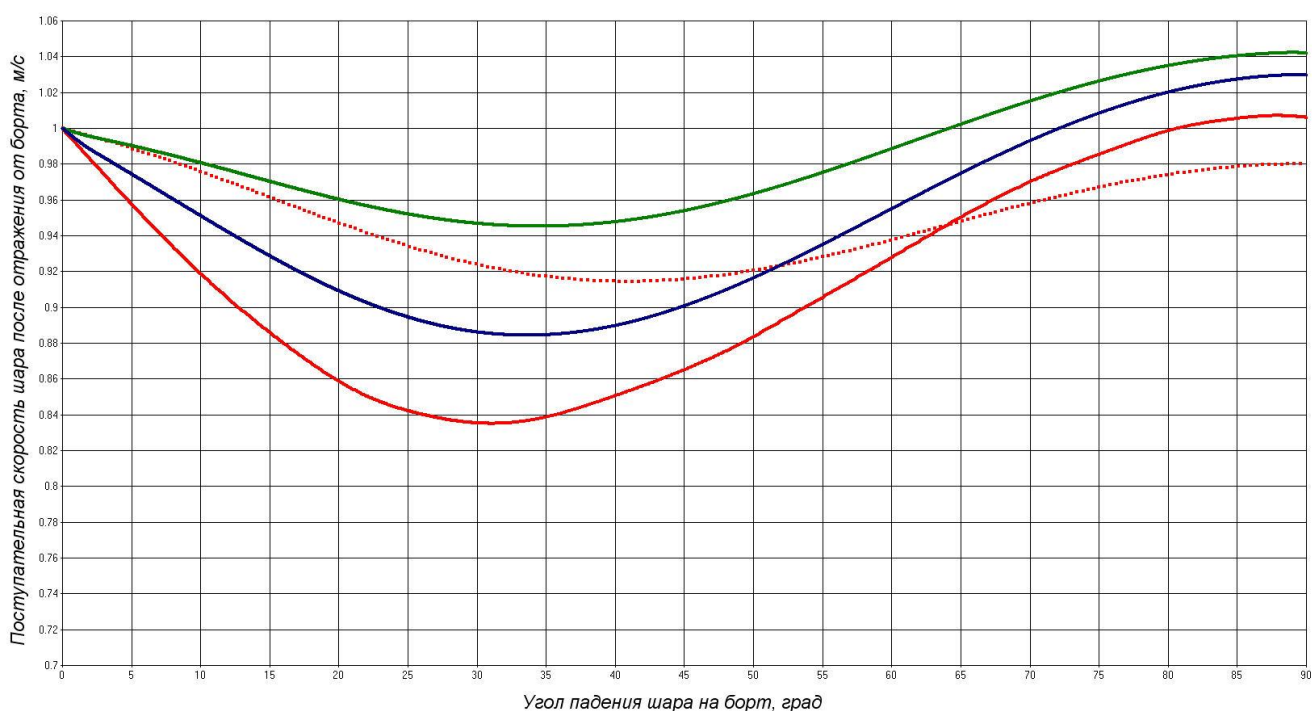
- [1]. **Nadler D.** Mathematical theory of spin, friction, and collision in the game of billiards, 2005. An English translation of Coriolis' 1835 book (Nadler D., San Francisco, California, USA)
- [2]. **Long F., Herland J., Tessier M.-C., Naulis D., Roth A., Roth G., Greenspan M.** Robotic pool: an experiment in automatic potting. In Proceedings of the IROS 2004: IEEE/RSJ International Conference on *Intelligent and robotics and systems*, Sendai, Japan, 2004, vol. 3, pp. 2520-2525.
- [3]. **Ho K.H.L., Martin T., Baldwin J.** Snooker robot player - 20 years on. In Proceedings of the IEEE Symposium on *Computational intelligence and games* (CIG 2007), Hawaii, 1-5 April 2007, pp. 1-8.
- [4]. **Cheng B.-R., Li J.-T., Yang J.-S.** Design of the neural-fuzzy compensator for a billiard robot. In Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on *Networking, sensing and control*, Taipei, Taiwan, 21-23 March 2004, pp. 909-913.
- [5]. **Alian M.E., Shouraki S.E., Shalmani M.T.M., Karimian P., Sabzmejdani P.** Roboshark: a gantry pool player. In Proceedings of the 35th *International Symposium on Robotics* (ISR), Paris, France, 2004.
- [6]. **Jebara T., Eyster C., Weaver J., Starner T., Pentland A.** Stochastic: augmenting the billiards experience with probabilistic vision and wearable computer. In Proceedings of the IEEE International Symposium on *Wearable computers*, Cambridge, MA, USA, October 1997, pp. 138-145.
- [7]. **Larsen L.B., Jensen M.D., Vodzi W.K.** Multi modal user interaction in an automatic pool trainer. In Proceedings of the Fourth IEEE International Conference on *Multimodal interfaces* (ICMI 2002), Pittsburgh, USA, 14-16 October 2002, pp. 361-366.
- [8]. **Uchiyama H., Saito, H.** AR display of visual aids for supporting pool games by online markerless tracking. In Proceedings of the 17th International Conference on *Artificial reality and telexistence* (ICAT 2007), Esbjerg, Denmark, 28-30 November 2007, pp. 172-179.
- [9]. **Smith M.** PickPocket: a computer billiards shark. *Artif. Intell.*, 2007, 171(16-17), 1069-1091.
- [10]. **Dussault J.-P., Landry, J.-F.** Optimization of a billiard player-tactical play. *Lect. Notes Comput. Sci.*, 2007, **4630**, 256-270.
- [11]. **Leckie W., Greenspan M.** An event-based pool physics simulator. *Lect. Notes Comput. Sci.*, 2006, **4250**, 247-262.
- [12]. **Marlow W.C.** The physics of pocket billiards, 1994 (MAST, Florida, USA).
- [13]. **Alciatore D.G.** Pool and billiards physics principles by coriolis and others. *Am.J.Phys.* (submitted), http://billiards.colostate.edu/physics/Alciatore_AJP_MS22090_revised_pool_physics_article.pdf
- [14]. **De la Torre Juarez M.** The effect of impulsive forces on a system with friction: the example of the billiard game. *Eur. J. Phys.*, 1994, 15(4), 184-190.
- [15]. **Stronge W.J.** Impact mechanics, 2000 (Cambridge University Press, Cambridge, UK).
- [16]. **Mathavan S., Jackson M.R., Parkin R.M.** Application of high-speed imaging in determining the dynamics involved in billiards. *Am.J.Phys.*, 2009, 77(9), 788-794.
- [17]. **Walker J.** The physics of the follow, the draw and the masse (in billiards and pool). *Sci. Am.*, 1983, 249, 124-129.
- [18]. **Cross R.** Bounce of a spinning ball near normal incidence. *Am.J.Phys.*, 2005, 73(10), 914-992.

Небольшое послесловие переводчика

При изучении работы мне показался необычным вид зависимости, изображенной на рисунке 9а красным цветом – именно этот график несколько выпадает из всего представленного графического материала. Чтобы разобраться, я решил самостоятельно выполнить расчеты, результаты которых привели авторы. В итоге, все построенные мной графики совпали с графиками из статьи (с точностью до ошибок оцифровки по

рисункам), за исключением единственной упомянутой зависимости. На представленном ниже рисунке изображены четыре варианта результатов расчетов. Сплошная линия красного цвета соответствует зависимости, изображенной на рисунке 9а красным цветом, а прерывистая линия красного цвета построена по результатам выполненных мной расчетов с использованием численного алгоритма, описанного в статье. Видно, что зависимости довольно сильно отличаются друг от друга. Это побудило меня провести дополнительные расчеты, в которых для получения численного решения системы дифференциальных уравнений применялся не рекомендованный авторами и весьма «грубый» метод Эйлера, а метод Рунге-Кутты-Фельберга 4-5 порядка с использованием автоматического выбора шага интегрирования. Так была получена третья зависимость, изображенная на рисунке зеленым цветом.

Как можно объяснить то, что графики, изображенные прерывистой красной и зеленой линиями, сильно отличаются от исходного графика, представленного авторами? Первое соображение, приходящее на ум, это – следствие ошибок или неточностей, допущенных мной при программировании. Однако, как при этом во всех иных случаях все же было получено практически полное совпадение с результатами, приведенными в статье? Второе, «лежащее на поверхности», соображение: ошибку в расчетах или при графическом отображении сделали авторы – ведь людям свойственно ошибаться. Конечно же, проще всего найти причину нестыковки не у себя, а в чем-то стороннем. Но, думается, что такой подход заведомо неконструктивен.



А как относиться к тому, что графики, представленные прерывистой линией и кривой зеленого цвета, тоже чувствительно отличаются друг от друга? Вот в этом вопросе, как раз, нет никакого подвоха. Для людей, знакомых с численными методами математического анализа, не является секретом то, что методу Эйлера свойственны систематические ошибки. Так что, для сформированной математической модели график зеленого цвета можно с определенными оговорками считать точным численным решением, а график, изображенный красной прерывистой линией – приближенным решением. И отсюда, вроде бы, должен следовать вывод о том, что при использовании модели, разработанной авторами, правильней применять методы численного интегрирования высоких порядков, а

не простейшую вычислительную схему, предложенную в статье. Однако, это совсем не так – каким бы парадоксальным не показался, на первый взгляд, такой вывод! Приведу несколько соображений по этому поводу:

1. Численный алгоритм, изложенный авторами (ниже будем называть его «приближенным»), позволяет получать результаты, очень хорошо согласующиеся с экспериментальными данными. Результаты же, полученные при помощи численного интегрирования методами высоких порядков (ниже будем называть такой алгоритм «точным»), не обеспечивают подобной согласованности. И в этом нет ничего удивительного! Действительно, конечные результаты сильно зависят от значений параметров e_e и μ_w . А эти значения подбирались так, чтобы наилучшее (в смысле наименьшей суммы квадратов отклонений) приближение к экспериментальным данным обеспечивал именно приближенный алгоритм.
2. Некоторые сомнения в точности результатов, «выдаваемых» приближенным алгоритмом в случае избыточного верхнего вращения шара при отсутствии винта, не следует воспринимать с трагизмом. Во-первых, отклонения расчетных значений от графически представленных данных не катастрофично велики. А во-вторых, ситуации соударения шара с бортом при наличии избыточного верхнего вращения – экзотика для практического бильярда (во всяком случае, в Русском бильярде это так).
3. Приближенный алгоритм весьма привлекателен в силу незначительности потребных вычислительных затрат. Это свойство может быть актуально при применении алгоритма в компьютерных программах-симуляторах, производящих параллельные расчеты для нескольких движущихся шаров практически в режиме реального времени.
4. При некоторых исходных данных провести расчеты с помощью точного алгоритма оказалось невозможно. Речь идет о таких ситуациях, при которых в течение интервала контакта скорость скольжения шара относительно борта приближается к нулю. При этом дифференциальные уравнения, входящие в математическую модель динамики шара, становятся крайне жесткими. В результате, методы численного интегрирования теряют способность обеспечивать приемлемую точность расчетов, а иными словами – теряют сходимость. Даже использование численных методов, специально предназначенных для решения жестких систем уравнений, также не позволило мне получить решения. Для выхода из подобных ситуаций можно модифицировать математическую модель, предусмотрев не только режим взаимодействия шара с бортом при скольжении, но и режим контакта при сцеплении. Однако, использование приближенного алгоритма позволяет обойтись даже и без модификации модели. Такой алгоритм, благодаря своей «топорности», позволяет получать результаты и в таких трудных случаях.

При проведении расчетов с помощью точной модели появился интерес в подборе для нее пары параметров e_e и μ_w . Также, как это и делали авторы для приближенной модели, при отыскании параметров минимизировалась сумма квадратов отклонений расчетных значений скорости отраженного шара от измеренных величин, представленных на графике 7 а). В итоге, были получены значения $e_e = 0.986$ и $\mu_w = 0.2093$. Конечно же, эти величины могут быть пригодны только для использования в рамках точной модели. Недаром авторы, использовавшие для приближенной модели величину $e_e = 0.98$, отдельно указали, что непосредственные измерения позволили получить среднее значение $e_e = 0.818$. С помощью найденных значений $e_e = 0.986$ и $\mu_w = 0.2093$ и точной модели были проведены расчеты, результаты которых представлены на последнем рисунке линией синего цвета. Видно, что эта кривая уже довольно близко подходит к зависимости, изображенной сплошной красной линией. Это наводит на соображение о том, что свое решение авторы получили не непосредственно с помощью приближенной модели, а внеся какие-то корректировки, но почему-то не проафишировали этот факт в тексте статьи.