

Чунь-Хао Тэн

**Математический анализ бильярдных игр:
коэффициент усиления, устойчивость траектории шара
и шаблон для оценки игрового мастерства**

2008

Chun-Hao Teng

**A Mathematical Analysis of Billiards Games:
Amplification Factor, Stability of Ball Path, and Player's Pattern**

Перевод: С.Тихонов; Июль, 2014; Последняя редакция: Октябрь 2016

Резюме

В этой работе представлено исследование устойчивости системы, состоящей из двух бильярдных шаров. Определен специальный численный параметр, названный коэффициентом усиления. При помощи этого параметра можно количественно оценивать сложность удара в бильярде, сходность различных ударов и игровые способности бильярдистов.

1. Введение

В бильярдном спорте существуют различные виды игр, например – «Девятка» в Пуле и Снукер. Несмотря на то, что каждая игра имеет свой собственный свод правил, общее основополагающее правило результативной игры состоит в необходимости отправить в лузу прицельный шар после его соударения с битком. Совершенно ясно, что бильярдные игры неразрывно связаны с динамикой процесса соударения.

Чтобы достичь высокого мастерства в бильярдном спорте, игроку не достаточно лишь усердно тренироваться; помимо этого, он должен освоить технику и тактику игры, в основе которых лежат физика и математика. В 1835 году известный физик Г.Кориолис (*Gaspard-Gustave de Coriolis*), именем которого в динамике названо Кориолисово ускорение, написал всестороннюю книгу по физике бильярда [3]. Недавно она была переведена на английский язык Дэвидом Надлером (*David Nadler*) [5]. Дэвид Элсиэтор (*David Alciatore aka Dr. Dave*) [1], в дополнение к анализу основ классической теории (также, как это сделал Кориолис), провел ряд исследований по физике бильярда с применением современной теоретической физики и оборудования для высокоскоростной видеосъемки. Кроме того, М.Бувилль (*Mathieu Bouville*) [2], используя теорию вероятностей, разработал модель Марковских процессов, дающую математическое толкование позиционной игры в карамбольных бильярдных играх. (*На мой взгляд, авт ор ограничился весьма ст ранним обзором результ ат ов, полученных в т еории бильярда. Прим. пер*).

В этой работе физика соударения бильярдных шаров проанализирована с точки зрения поведения динамических систем. Если биток и прицельный шар рассматривать в качестве системы, то можно использовать линейную теорию устойчивости, обычно применяемую для исследований неустойчивости движения жидкостей [4]. Математические методы, применяемые при этом анализе, довольно

элементарны; они основаны на простой тригонометрии и вычислениях, доступных для знаний студенческого уровня. Однако, основной результат этого анализа важен: это – специальная переменная, названная автором коэффициентом усиления.

Этот коэффициент несёт двоякий смысл. Во-первых, его можно использовать, чтобы количественно оценить трудность выполнения удара, при котором прицельный шар после соударения с битком будет перемещаться по желаемой траектории. А это значит, что степень трудности выполнения различных ударов можно сравнивать на количественной основе. Ну а во-вторых, коэффициент усиления может количественно определять игровые способности, на которые влияет испытываемое игроком волнение. Таким образом, этим коэффициентом может быть охарактеризован также и уровень игрового мастерства.

Ниже будут представлены основные части проведенного анализа и завершающие комментарии.

2. Анализ

2.1. Предварительные замечания

В бильярде существует немало разновидностей игр, но для всех них едино фундаментальное правило: необходимо наносить удар кием по битку так, чтобы после произошедшего соударения шаров прицельный шар двигался по намеченной траектории и попал в лузу бильярдного стола, а биток (в большинстве игр) остался на игровой поверхности. В дальнейшем будет представлен математический анализ последствий соударения. Чтобы избежать путаницы, прежде всего необходимо установить терминологию, используемую при количественном описании соударения двух шаров.

Условимся называть **системой шаров (СШ)** сгруппированные между собой (*то есть, рассматриваемые совместно в динамике; прим. пер.*) биток и прицельный шар. Иллюстративная схема СШ изображена на рисунке 1. Центры битка и прицельного шара обозначены точками C и O , соответственно. **Реперная линия L** , проходящая через точки C и B , будет использоваться в качестве базовой линии для определения углов. Так как биток и прицельный шар имеют одинаковый размер, обозначим их радиусы одним и тем же символом r . Символ l обозначает **расстояние между шарами**, измеренное вдоль реперной линии L между точками d и e . (*Автор использует нетрадиционное расстояние, представляющее собой дальность между обращенными друг к другу поверхностями шаров. Обычно же, под расстоянием понимают дальность между центрами шаров. Прим. пер.*). Для удобства анализа примем в качестве **характерной длины** величину $2r$, равную диаметру шара. Таким образом, расстояние между шарами может быть представлено в виде $l = 2rp$, где p – количество шаров, которые можно разместить вдоль линии L между битком и прицельным шаром. (*Автор не говорит о том, что на самом деле величина p вовсе не должна быть целой; прим. пер.*).

Предположим, что игрок так наносит удар по битку, что тот движется в направлении вектора прицеливания \vec{u} (см. рисунок 1), а при контакте (биток при этом показан в виде шара-призрака, изображенного пунктиром) образует с прицельным шаром вектор \vec{v} , направленный по линии соударения, проходящей через центры соприкасающихся шаров. Угол θ между реперной линией L и вектором \vec{u} называется

углом прицеливания. Он считается положительным, если измеряется от линии L в направлении, противоположном ходу стрелки часов; соответственно, угол θ отрицателен, если отсчитывается по ходу часовой стрелки. Сказанное относится и к **углу удара** ϕ , образованному линией L и вектором \vec{v} (на мой взгляд, это от угла лучше было бы назвать углом соударения; прим. пер.).

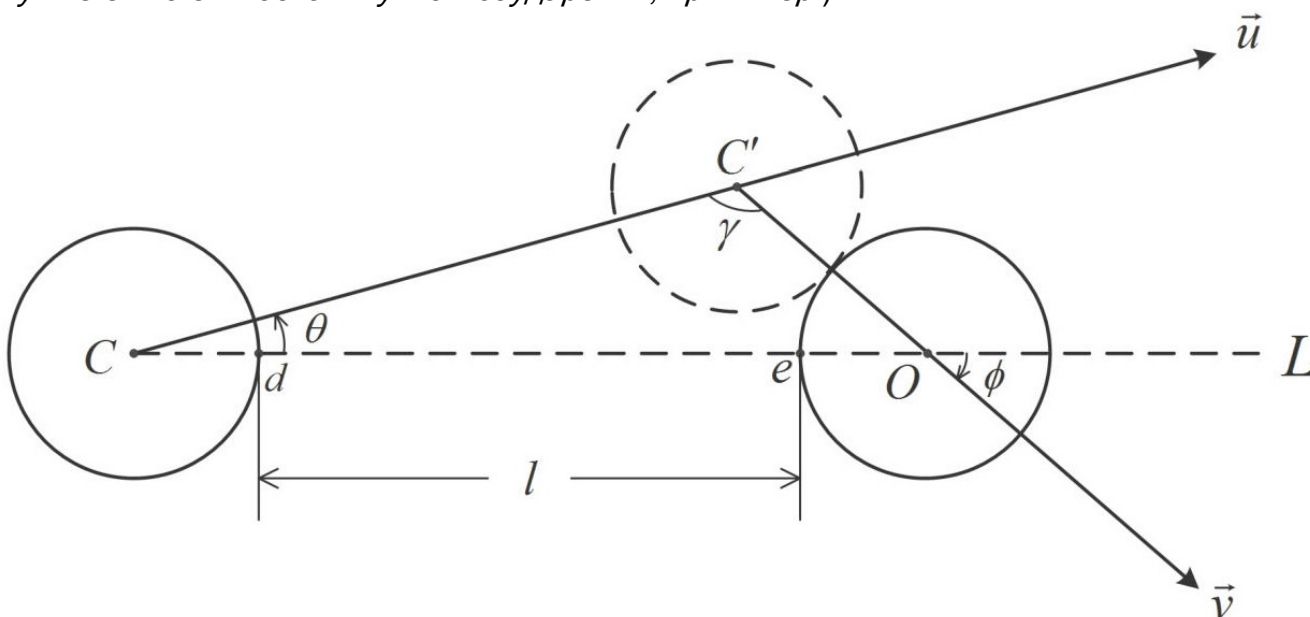


Рис.1: Иллюстративное изображение бита и прицельного шара.

В большинстве случаев центры бита, прицельного шара и шара-призрака образуют треугольник $\Delta COC'$. Заметим, что **углы резки** и удара являются внутренними углами этого треугольника. (Здесь автор вводит новый термин – под углом резки он, по всей видимости, подразумевает угол θ , который ранее был назван углом прицеливания. Обычно же, углом резки называют угол, образованный векторами \vec{u} и \vec{v} . Прим. пер.). Проведем дальнейший анализ, опираясь на очевидный факт, свидетельствующий о том, что сумма внутренних углов треугольника равна π .

2.2. Основные свойства системы шаров

2.2.1. Критические углы

После того, как были даны определения углов резки и удара, следует найти диапазоны их изменения.

На рисунке 2 представлены три разновидности соударения в СШ. На рисунке 2(а) изображено прямое соударение: если биток движется по реперной линии L , $\theta = 0$, то ожидается, что и прицельный шар будет перемещаться по ней. На рисунке 2(б) представлен случай наклонного соударения, перед которым биток движется по линии, для которой $\theta > 0$, а прицельный шар после соударения перемещается по траектории, которой соответствует угол $\phi < 0$. Следует обратить внимание на то, что $|\phi|$ увеличивается при возрастании $|\theta|$. Если увеличивать $|\theta|$, то в конечном счете биток пройдет, соприкасаясь с прицельным шаром вскользь, как это показано на рисунке 2(с). Назовем абсолютную величину такого угла θ критическим углом

прицеливания и обозначим его через θ_c . В случаях, когда выполняется неравенство $|\theta| > \theta_c$, соударения шаров не происходит. Таким образом, следует рассматривать лишь ситуации, при которых угол прицеливания находится в интервале между $-\theta_c$ и θ_c , то есть $|\theta| \leq \theta_c$.

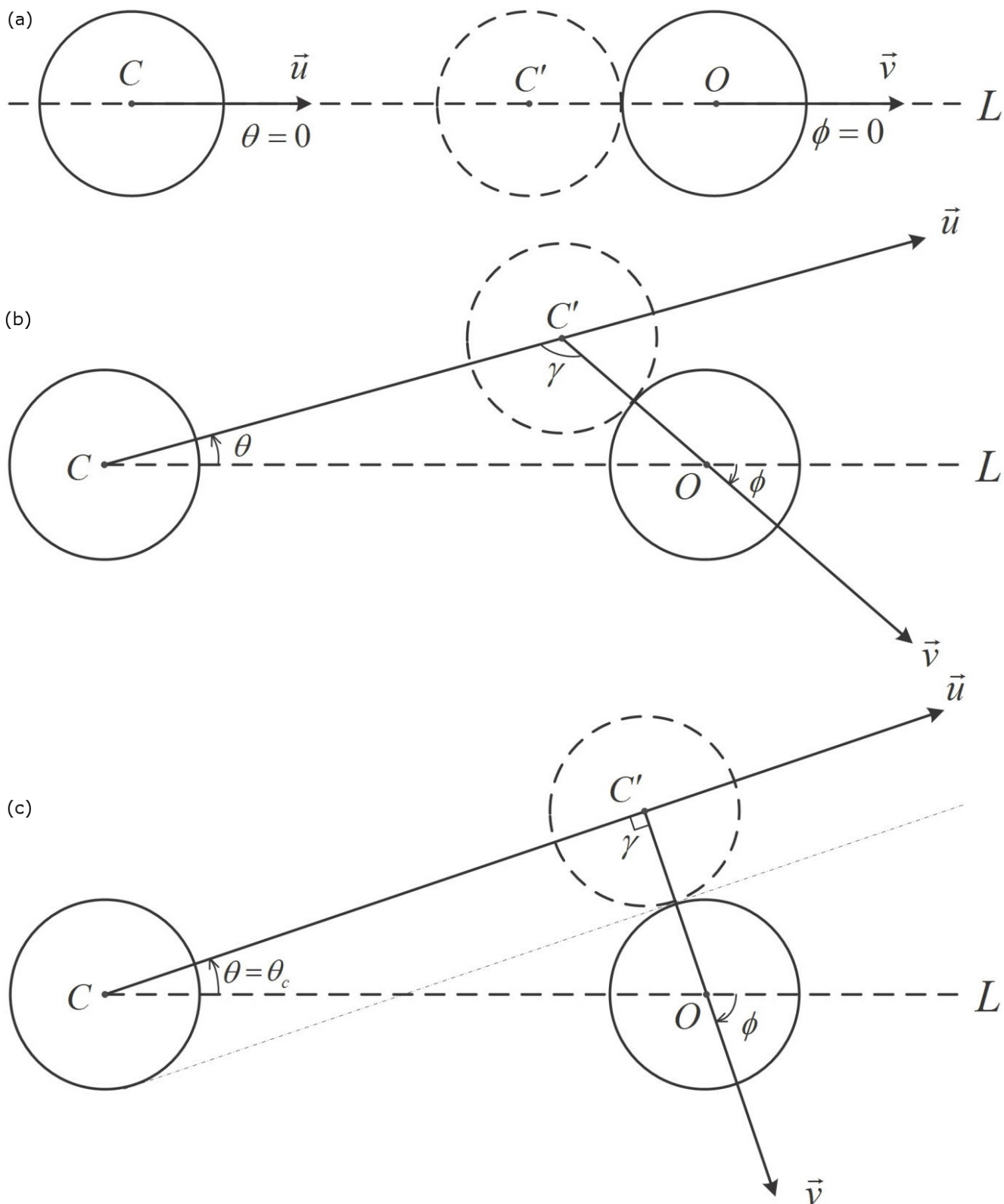


Рис.2: (а) Прямое соударение; (б) Косое (наклонное) соударение; (с) Касательное соударение.

Для СШ, изображенной на рисунке 2(с), величину критического угла прицеливания можно найти с помощью теоремы синусов, применённой к треугольнику $\Delta COC'$:

$$\sin \theta_c = \frac{2r}{l+2r} = \frac{1}{p+1} \quad \text{или} \quad \theta_c = \sin^{-1} \left(\frac{1}{p+1} \right).$$

(Здесь автор что-то «загнул» – не нужно приплетать никакой теоремы синусов, а следует просто выразить угол θ_c из прямоугольного треугольника $\Delta COC'$. Прим. пер.). Случаям движения бита $\theta = \theta_c$ и $\theta = -\theta_c$ соответствует абсолютная величина критического угла удара ϕ_c , удовлетворяющая соотношению

$$\phi_c = \frac{\pi}{2} - \theta_c = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{1}{p+1} \right).$$

2.2.2. Математическая взаимосвязь между углами θ и ϕ

Рассмотрим треугольник $\Delta COC'$, изображенный на рисунке 1. Так как сумма его углов равна π , то можно получить связь между θ и ϕ в виде

$$-Sgn(\theta) \phi + \gamma + |\theta| = \pi, \quad Sgn(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta > 0 \\ 0, & \theta = 0 \\ -1, & \theta < 0 \end{cases}, \quad (1)$$

где γ – угол $CC'O$. При помощи теоремы синусов можно получить

$$\frac{\sin \gamma}{\sin |\theta|} = \frac{l+2r}{2r} = p+1. \quad (2)$$

Исключая γ из (1) и (2), получим

$$\sin (\pi + Sgn(\theta) \phi - |\theta|) = \sin (|\theta| - Sgn(\theta) \phi) = (p+1) \sin (|\theta|).$$

Вычисляя арксинус для обеих частей последнего равенства, найдем

$$|\theta| - Sgn(\theta) \phi = \sin^{-1} ((p+1) \sin (|\theta|)). \quad (3)$$

Как для случая $\theta \geq 0$, так и при $\theta < 0$, из (3) следует, что

$$\phi = \theta - \sin^{-1} ((p+1) \sin \theta). \quad (4)$$

Нетрудно заметить, что связь между θ и ϕ , определяемая соотношением (4), нелинейна. Эта нелинейная зависимость может быть проиллюстрирована геометрически, как показано на рисунке 3. Допустим, что для попадания прицельного шара в лузу необходим угол удара ϕ_s , равный половине ϕ_c : $\phi_s = -\phi_c/2$. Если

выбрать угол прицеливания также в размере половины критического угла, то обнаружится, что результирующая траектория движения прицельного шара на самом деле будет совпадать с вектором \vec{v} , а не с вектором \vec{v}_s , наклоненным к линии L под углом ϕ_s .

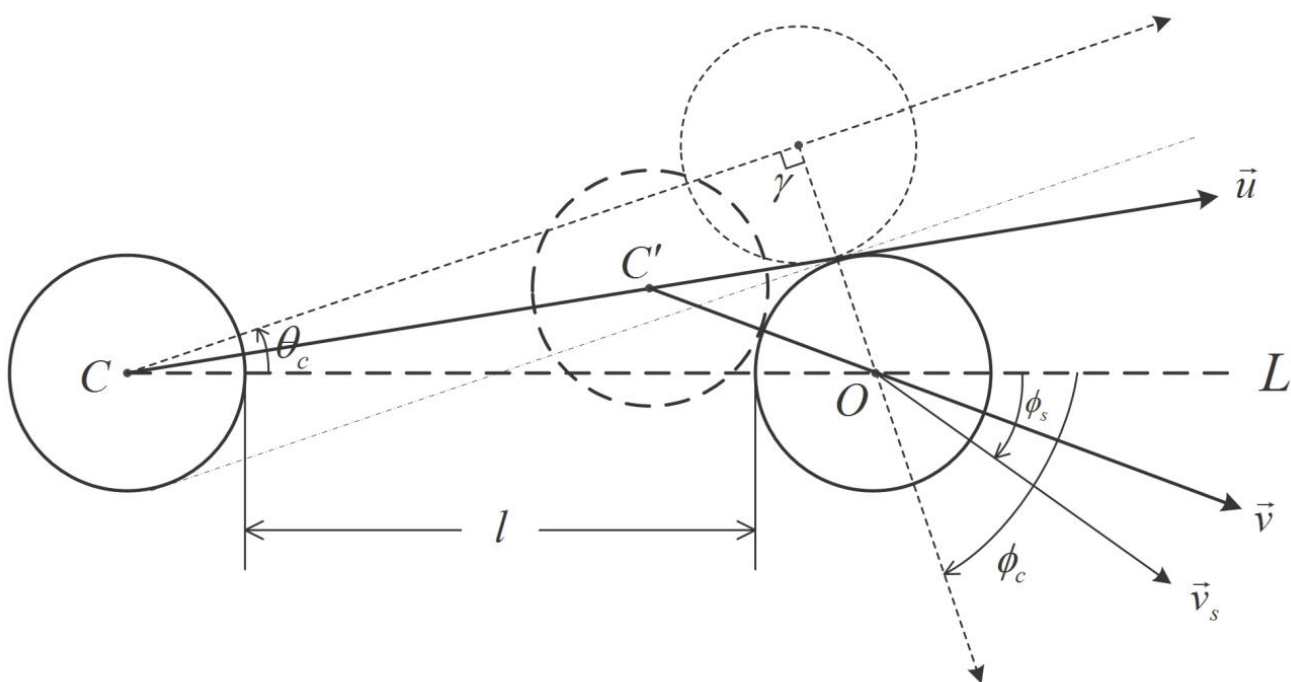


Рис.3: Иллюстрация нелинейной зависимости между углами θ и ϕ .

На рисунке 4 представлены зависимости между θ и ϕ , построенные для различных величин p . Можно отметить две особенности. Во-первых, нелинейный эффект начинает явно проявляться, когда при конкретном значении p величина $|\theta|$ приближается к θ_c . А во-вторых, при фиксированной величине p связь θ с ϕ практически линейна вблизи значений $\theta = 0$ (то есть при соударениях, близких к прямым; прим. пер.).

Эта линейная зависимость подтверждается следующим образом. Перепишем соотношение (4) в виде

$$\sin(\phi - \theta) = -(p + 1) \sin \theta. \quad (5)$$

Заметим, что при $\theta \approx 0$ справедливы приближительные равенства $\phi \approx 0$ и $(\phi - \theta) \approx 0$. Поэтому, $\sin \theta \approx \theta$ и $\sin(\phi - \theta) \approx \phi - \theta$. Таким образом, уравнение (5) приводит к следующему

$$\phi - \theta = -(p + 1) \theta \Rightarrow \phi = -p \theta. \quad (6)$$

Так как ϕ и θ всегда противоположны по знаку, из уравнения (6) следует, что ϕ и θ линейно связаны через расстояние p . Назовем эту зависимость принципом линейности.

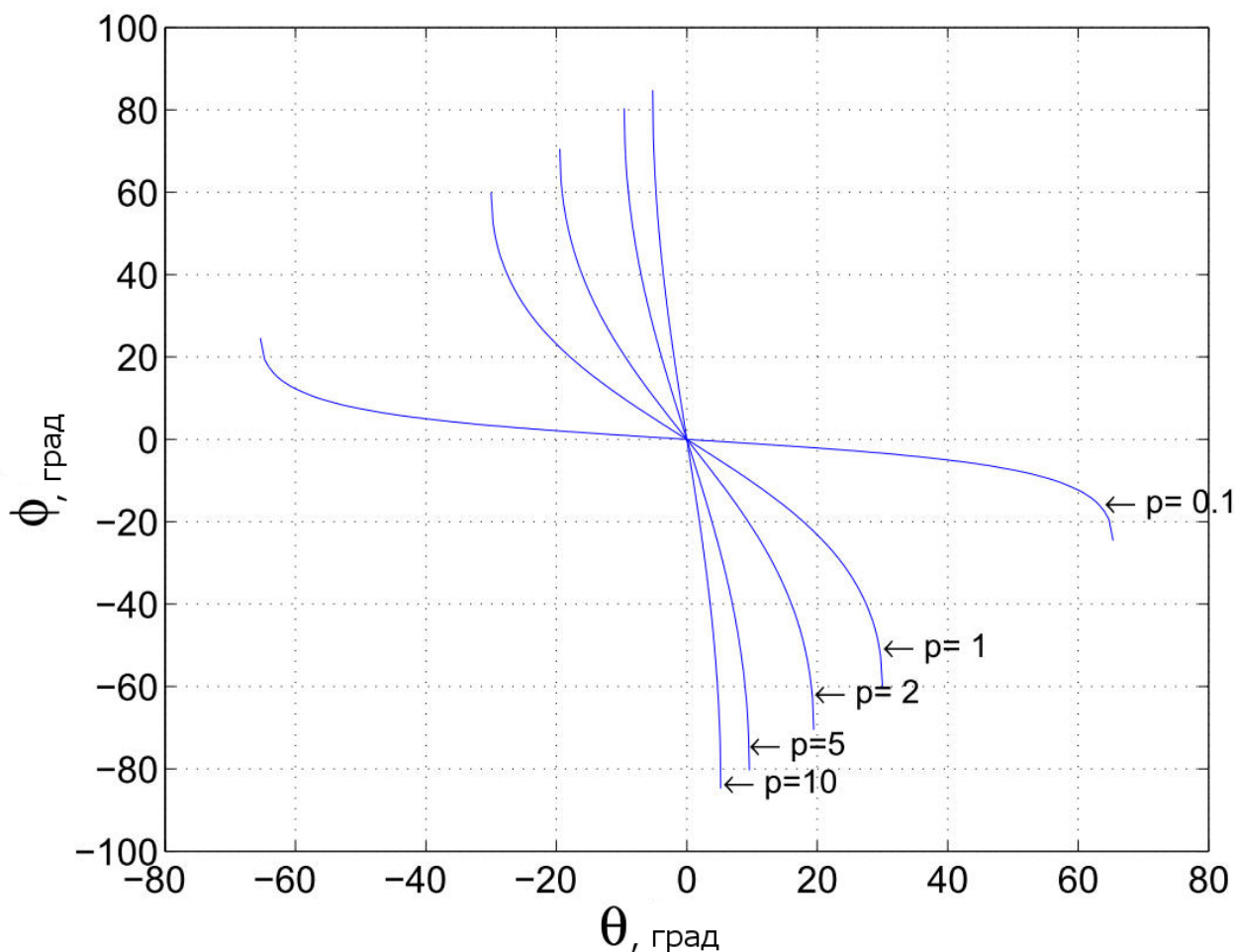


Рис.4: Зависимости θ - ϕ для различных значений p .

2.3. Неустойчивость, степень сложности и простоты системы шаров

В разделе 2.2.2 была найдена зависимость между θ и ϕ для СШ. Если бы игрок мог направить биток точно по желаемой траектории, то он мог бы ожидать, что и прицельный шар будет двигаться точным курсом. (*Строго говоря, это – ложное утверждение. Так можно было бы сказать, если допустить, что между поверхностями контактирующих шаров не действует трение. Прим. пер.*). Но в реальных игровых ситуациях это не всегда так. Например, при прицеливании игрок может допустить некоторое отклонение между видимым ему углом θ и его реальной величиной. Вследствие этого отклонения, следует ожидать, что и прицельный шар отклонится от ожидаемой траектории. Далее этот факт анализируется посредством рассмотрения СШ в качестве динамической системы, которую можно изучить полнее с помощью анализа устойчивости.

Сначала рассмотрим упрощенную СШ, в которой желаемый угол удара ϕ и угол прицеливания θ удовлетворяют принципу линейности (6). Если при ударе будет допущено отклонение от угла прицеливания $\theta + \Delta\theta$, то следует ожидать отклонения в угле удара $\phi + \Delta\phi$. Заметим, что для системы величину $|\Delta\theta|$ можно рассматривать в качестве возмущения, а величину $|\Delta\phi|$ – как вынужденную реакцию (отклик) на это возмущение. Таким образом, для системы шаров мы имеем

$$\phi + \Delta\phi = -p(\theta + \Delta\theta) \Rightarrow \Delta\phi = -p\Delta\theta \Rightarrow |\Delta\phi| = p |\Delta\theta|. \quad (7)$$

Из (7) следует, что

$$|\Delta\phi| < |\Delta\theta|, \text{ если } p < 1, \text{ и } |\Delta\phi| \geq |\Delta\theta|, \text{ если } p \geq 1. \quad (8)$$

Этот результат наглядно свидетельствует о том, что расстояние между битком и прицельным шаром определяет усиление или ослабление возмущения.

Расширим теперь понятие устойчивости на общий вид СШ для случая, когда $\theta \in [-\theta_c, \theta_c]$. Заметим, что величины $\Delta\theta$ и $\Delta\phi$ весьма малы, то есть $|\Delta\theta| \ll 1$, $|\Delta\phi| \ll 1$. Следовательно, используя теорию линейной аппроксимации в дифференциальном исчислении, найдем зависимость между $\Delta\theta$ и $\Delta\phi$ в виде

$$\Delta\phi = \frac{d\phi}{d\theta} \Delta\theta, \quad \frac{d\phi}{d\theta} = 1 - \frac{(p+1) \cos \theta}{\sqrt{1 - (p+1)^2 \sin^2 \theta}}. \quad (9)$$

Таким образом, мы получили выражение, связывающее отклик $|\Delta\phi|$ системы шаров на возмущение $|\Delta\theta|$ в виде

$$|\Delta\phi| = \left| \frac{d\phi}{d\theta} \right| |\Delta\theta|. \quad (10)$$

Сравнивая соотношения (7) и (10), нетрудно заметить, что величина $\left| \frac{d\phi}{d\theta} \right|$ в (10) аналогична величине p в (7). Это подтверждается следующим образом. Рассмотрим СШ, для которой можно применить принцип линейности, то есть $\theta \approx 0$. При этом $\cos \theta \approx 1$, $\sin \theta \approx \theta \approx 0$. Отсюда следует, что

$$\frac{d\phi}{d\theta} = 1 - \frac{(p+1) \cos \theta}{\sqrt{1 - (p+1)^2 \sin^2 \theta}} \approx 1 - (p+1) = -p,$$

то есть мы получили соотношение (7).

С помощью выше изложенного можно определить роль величины $\frac{d\phi}{d\theta}$ следующим образом.

Определение 1 (Коэффициент усиления; Устойчивые и неустойчивые системы)

Коэффициентом усиления системы шаров называется абсолютная величина скорости изменения угла удара ϕ при варьировании угла прицеливания θ . Система шаров считается устойчивой, если коэффициент усиления меньше единицы, и неустойчивой, когда коэффициент усиления принимает значения, равные единице или превышающие ее.

В Определении 1 СШ считается неустойчивой, когда коэффициент усиления равен единице. Соображения по этому поводу следующие. Так как в общем случае нельзя избежать возмущений системы, то желательно, чтобы возникающее

возмущение было подавлено (*демпфировано; прим. пер.*), а не усилено. При $\left| \frac{d\phi}{d\theta} \right| = 1$ возмущение не подавляется. Именно поэтому этот случай и относится к неустойчивости системы.

Определение 1 приводит к следующей теореме.

Теорема 1.

Система шаров обладает следующими свойствами:

1. При $p \geq 1$ система неустойчива для всех значений $|\theta| \leq \theta_c$.
2. При $p < 1$ система устойчива, когда

$$|\theta| < \text{Sin}^{-1} \left(\sqrt{\frac{4 - (p+1)^2}{3(p+1)^2}} \right),$$

и неустойчива, если

$$|\theta| \geq \text{Sin}^{-1} \left(\sqrt{\frac{4 - (p+1)^2}{3(p+1)^2}} \right).$$

Доказательство.

Из (9) мы имеем

$$\frac{d^2\phi}{d\theta^2} = 1 - \frac{(p+1)(1-(p+1)^2)\text{Sin}\theta}{(1-(p+1)^2\text{Sin}^2\theta)\sqrt{1-(p+1)^2\text{Sin}^2\theta}}.$$

Так как $|\theta| \leq \theta_c < \pi/2$, то имеют место следующие неравенства

$$(p+1)^2\text{Sin}^2\theta \leq (p+1)^2\text{Sin}^2\theta_c = 1 \Rightarrow 1 - (p+1)^2\text{Sin}^2\theta > 0.$$

Таким образом, знаменатель правой части последнего уравнения больше нуля. Числитель же этого уравнения равен нулю при $\theta = 0$ для любых значений p :

$$(p+1)(1-(p+1)^2)\text{Sin}\theta = 0.$$

Такое равенство означает, что при $\theta = 0$ функция $\frac{d\phi}{d\theta}$ достигает локального экстремума. Кроме того,

$$p \geq 0 \Rightarrow p+1 \geq 1 \Rightarrow 1 - (p+1)^2 \leq 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d^2\phi}{d\theta^2} > 0, \text{ если } \theta \in [-\theta_c, 0], \text{ и } \frac{d^2\phi}{d\theta^2} < 0, \text{ если } \theta \in [0, \theta_c].$$

Таким образом, установлено, что при $\theta = 0$ достигается локальный максимум функции $\frac{d\phi}{d\theta}$, равный

$$\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)_0 = 1 - \frac{(p+1) \cos \theta}{\sqrt{1 - (p+1)^2 \sin^2 \theta}} = 1 - (p+1) = -p.$$

Поэтому, при $p \geq 1$ для коэффициента усиления

$$\left|\frac{d\phi}{d\theta}\right| \geq \left|\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)_0\right| = p \geq 1$$

система будет неустойчивой, согласно Определению 1.

Докажем теперь второе свойство СШ, устанавливаемое теоремой. Допустим, что при $p < 1$ система устойчива, то есть при этом $\left|\frac{d\phi}{d\theta}\right| < 1$, или в развернутом виде

$$\left|1 - \frac{(p+1) \cos \theta}{\sqrt{1 - (p+1)^2 \sin^2 \theta}}\right| < 1.$$

Переписывая это неравенство относительно θ , получаем

$$|\theta| < \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{4 - (p+1)^2}{3(p+1)^2}} \right).$$

Что и требовалось доказать.

Коэффициент усиления имеет определенный математический смысл. Для того чтобы оценивать значения функций и величины векторов с целью сравнения, определяются нормы. Коэффициент усиления играет роль, подобную этим нормам. Согласно Определению 1, можно вычислить коэффициент усиления для любой возможной системы шаров. Следовательно, есть возможность сравнивать коэффициенты усиления различных СШ, чтобы выяснить, какой удар является более трудным в количественном выражении. Используем следующий пример, чтобы охарактеризовать это соотношение.

Допустим, выполняются два возможных удара: биток располагается на расстоянии четырех шаров от прицельного шара A и пятнадцати шаров от прицельного шара B , то есть $p_A = 4$ и $p_B = 15$. Предположим, что угол удара для шара A составляет $\phi_A = 45^\circ$, а для шара B он равен $\phi_B = 10^\circ$. Более трудному удару будет соответствовать больший коэффициент усиления.

Чтобы провести расчеты, преобразуем величины углов удара из градусов в радианы: $\phi_A = \pi/4$ радиан; $\phi_B = \pi/18$ радиан. Из уравнения (5) получим

$$\theta = \operatorname{Tg}^{-1} \left(\frac{\sin \phi}{\cos \phi - (p+1)} \right). \quad (11)$$

Подставляя ϕ_A , ϕ_B и p_A , p_B в последнее уравнение вместо ϕ и p , получим соответствующие углы прицеливания:

$$\theta_A = Tg^{-1} \left(\frac{\sin \phi_A}{\cos \phi_A - (p_A + 1)} \right) \approx -0.16 \text{ радиан; эквивалентно } -9.35^\circ.$$

$$\theta_B = Tg^{-1} \left(\frac{\sin \phi_B}{\cos \phi_B - (p_B + 1)} \right) \approx -0.01 \text{ радиан; эквивалентно } -0.66^\circ.$$

Затем, подставляя эти углы прицеливания в (9), найдем коэффициенты усиления:

$$\left(\left| \frac{d\phi}{d\theta} \right| \right)_A = 1 - \frac{(p_A + 1) \cos \theta_A}{\sqrt{1 - (p_A + 1)^2 \sin^2 \theta_A}} \approx 7.47.$$

$$\left(\left| \frac{d\phi}{d\theta} \right| \right)_B = 1 - \frac{(p_B + 1) \cos \theta_B}{\sqrt{1 - (p_B + 1)^2 \sin^2 \theta_B}} \approx 15.28.$$

Так как $\left(\left| \frac{d\phi}{d\theta} \right| \right)_A < \left(\left| \frac{d\phi}{d\theta} \right| \right)_B$, то система шаров A менее неустойчива и, соответственно, дает больше шансов на успешное выполнение удара.

Используя коэффициент усиления, можно не только сравнить степень трудности различных ударов, но также и сравнивать подобие между ними, несмотря на различия в параметрах p , θ и ϕ . На рисунке 5 рассмотрены две системы шаров E и F , характеризующиеся разными наборами параметров p , θ и ϕ . Если значения соответствующих коэффициентов усиления одинаковы (или близки друг к другу), то можно говорить, что две системы аналогичны или подобны в том смысле, что они дают тот же самый отклик $|\Delta\phi|$ на одинаковое возмущение $|\Delta\theta|$.

2.4. Шаблон для оценки игрового мастерства

Безошибочное выполнение ударов является трудной или вовсе невыполнимой задачей даже для очень опытных игроков. Даже хорошо натренированному игроку присущи помарки, пусть и весьма небольшие. И с точки зрения соответствия, коэффициенты усиления можно считать индикаторами точности ударов, характеризующими помехи, возникающие от удара к удару. Мы предполагаем, что эти количественные оценки возмущений могут быть полезными для совершенствования игры.

Чтобы проиллюстрировать эту концепцию, была сделаны снимки сверху для серии ударов, выполненных игроком на турнире по Пулу при игре в «Девятку». Эти снимки представлены в Приложении. В рассмотренной игре после начального удара (*разбоя пирамиды; прим. пер.*) два шара упали в лузы. Начиная со второго удара, были измерены величины p и ϕ для каждой СШ, чтобы вычислить соответствующие значения θ и коэффициенты усиления. Следует обратить внимание на то, что последний удар не был заснят. Таким образом, в нашем распоряжении оказалось 6 изображений, сводная информация о которых представлена в Таблице 1.

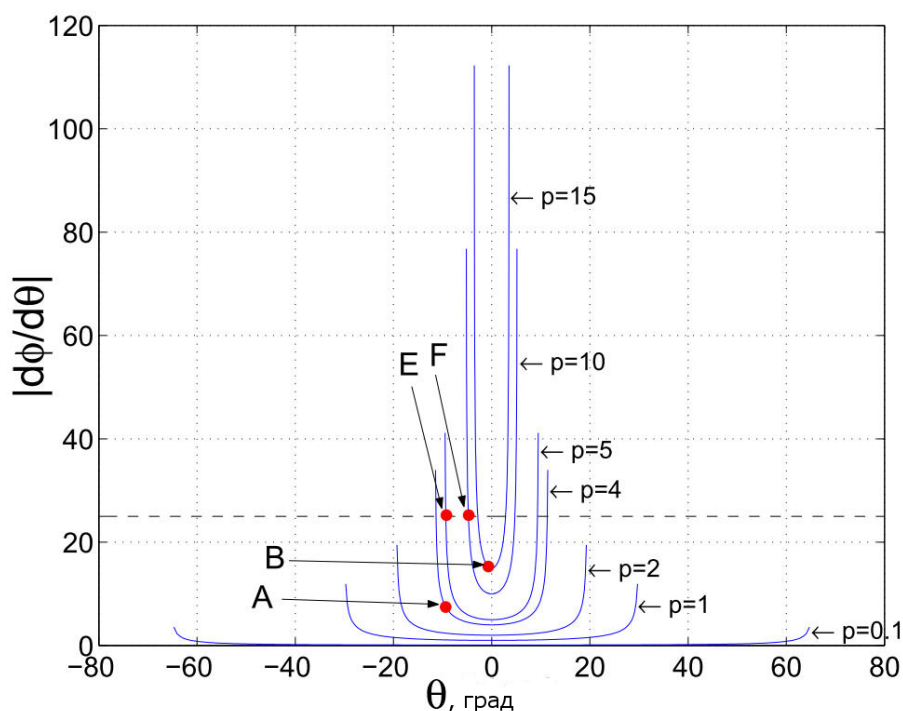


Рис.5: Степень сложности и простоты систем шаров.

Удар	p	ϕ	θ	$\left \frac{d\phi}{d\theta} \right $
2	4.143	6.0	-1.443	4.185
3	12.091	-6.0	0.495	12.175
4	2.250	2.5	-1.110	2.256
5	10.000	16.0	-1.573	10.534
6	12.927	-26.5	1.963	14.821
7	8,875	-30.5	3.223	10.854

Таблица 1: Величины p , ϕ , θ и $d\phi/d\theta$, соответствующие ударам, изображенным на снимках, представленных в Приложении. Значения p и ϕ измерены вручную, а θ и $d\phi/d\theta$ рассчитаны с помощью соотношений (11) и (9), соответственно.

На рисунке 6 представлены зависимости между θ и ϕ , на которых величина выступает p в качестве параметра. Красным цветом отмечены точки (θ, ϕ) , соответствующие указанным выше ударам. Можно заметить, что эти точки расположены в области $(\theta, \phi) \in [-2^\circ, 3.5^\circ] \times [-35^\circ, 35^\circ]$. Кроме того, из рисунка в увеличенном масштабе видно, что в этом диапазоне все зависимости θ - ϕ практически линейны. Поэтому, если при ударе проявятся слабые возмущения, то они, согласно принципу линейности, будут увеличены пропорционально величине p . С этой точки зрения можно прокомментировать меткость игрока. Во-первых, отметим, что самое большое значение p в этих шести ударах приблизительно равно 13. Затем рассмотрим желаемый угол удара, для успешности которого допустимо отклонение лишь величиной 1° . Игрок, способный выполнить такой удар, демонстрирует точность в пределах $(1/13)^\circ$. Иными словами, меткость игрока может быть количественно оценена и таким образом использована для сравнения. В

общем случае можно использовать уравнение (10), чтобы оценить умение игрока выполнять точные удары.

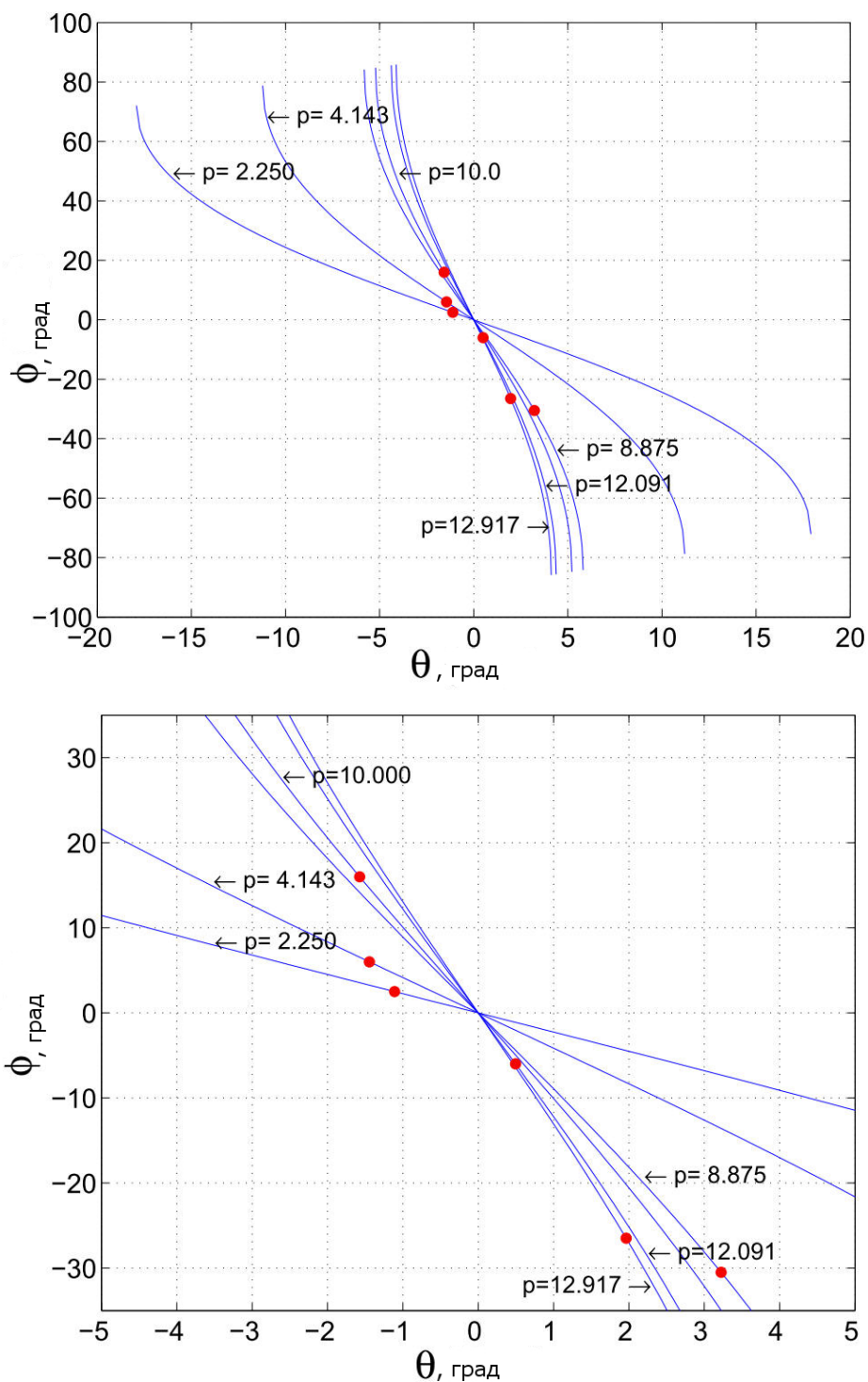


Рис.6: Углы прицеливания и удара. На нижних графиках представлен увеличенный вид части верхнего рисунка.

Для примера, рассмотрим удар, изображенный на рисунке 7. Параметры этой системы шаров представлены в нижней строке таблицы 1 (седьмой удар). Так как ширина створа лузы превышает диаметр прицельного шара, для успешности удара допускается отклонение от желаемого угла удара $|\Delta\phi| = 6.5^\circ$ ($2|\Delta\phi| = 13^\circ$).

Следовательно, можно дать оценку точности выполнения удара: $|\Delta\phi| = |\Delta\phi|/|d\phi/d\theta| = 6.5^\circ/10.854 = 0.6^\circ$.

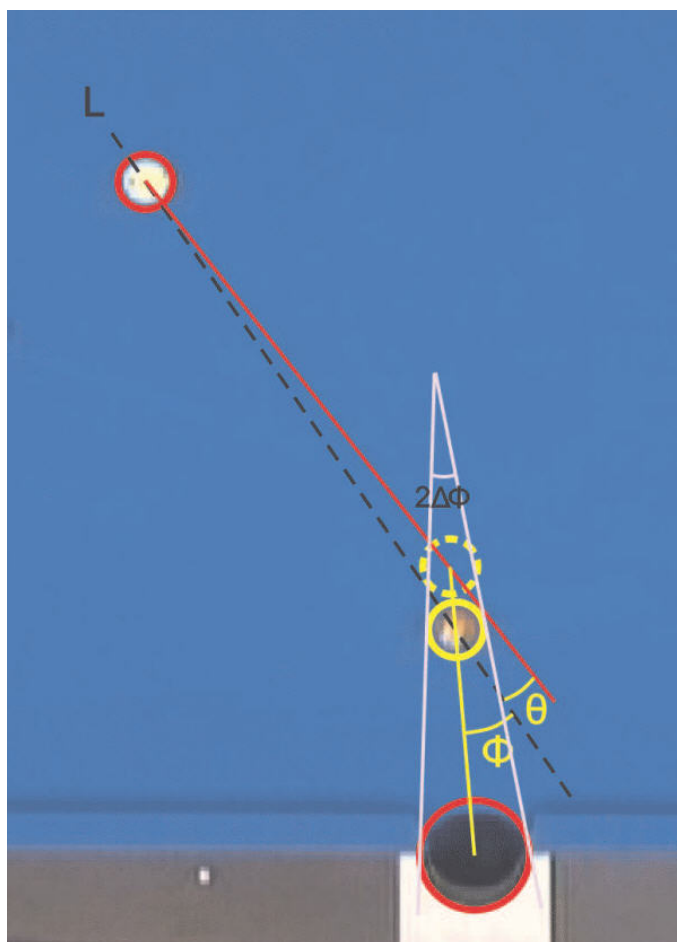


Рис.7: Геометрическая конфигурация системы шаров. $2|\Delta\phi| = 13^\circ$.
Остальные параметры представлены в нижней строке Таблицы 1 (седьмой удар).

Заметим, что величина $d\phi/d\theta$, соответствующая заданному набору значений p , θ и ϕ , представляет собой тангенс угла наклона касательной к кривой $\theta-\phi$ в точке (θ, ϕ) . Следовательно, построение угла прицеливания и коэффициента усиления на координатной плоскости $\theta-|d\phi/d\theta|$ имеет важное значение. Такой график приведен на рисунке 8. Интересно отметить, что для заданного значения p кривая коэффициента усиления $|d\phi/d\theta|$ имеет U-образный вид с плоским нижним диапазоном значений, который сжимается при увеличении p . Отметим, что при фиксированной величине p значения коэффициента усиления в этой «плоской» области меньше значений на «ветвях» U-образного графика. Это наглядно свидетельствует о том, что, когда пара чисел $(\theta, |d\phi/d\theta|)$ соответствует ветви U-образной кривой, СШ более неустойчива по сравнению со случаем, когда аналогичная пара располагается на плоском основании U-графика. Таким образом, если коэффициент усиления конкретной СШ располагается в плоской области, принимая при этом значение, близкое к минимальному, следует ожидать, что достаточно опытный игрок добьется положительного результата (при условии, что при выполнении удара будет действовать слабые возмущения).

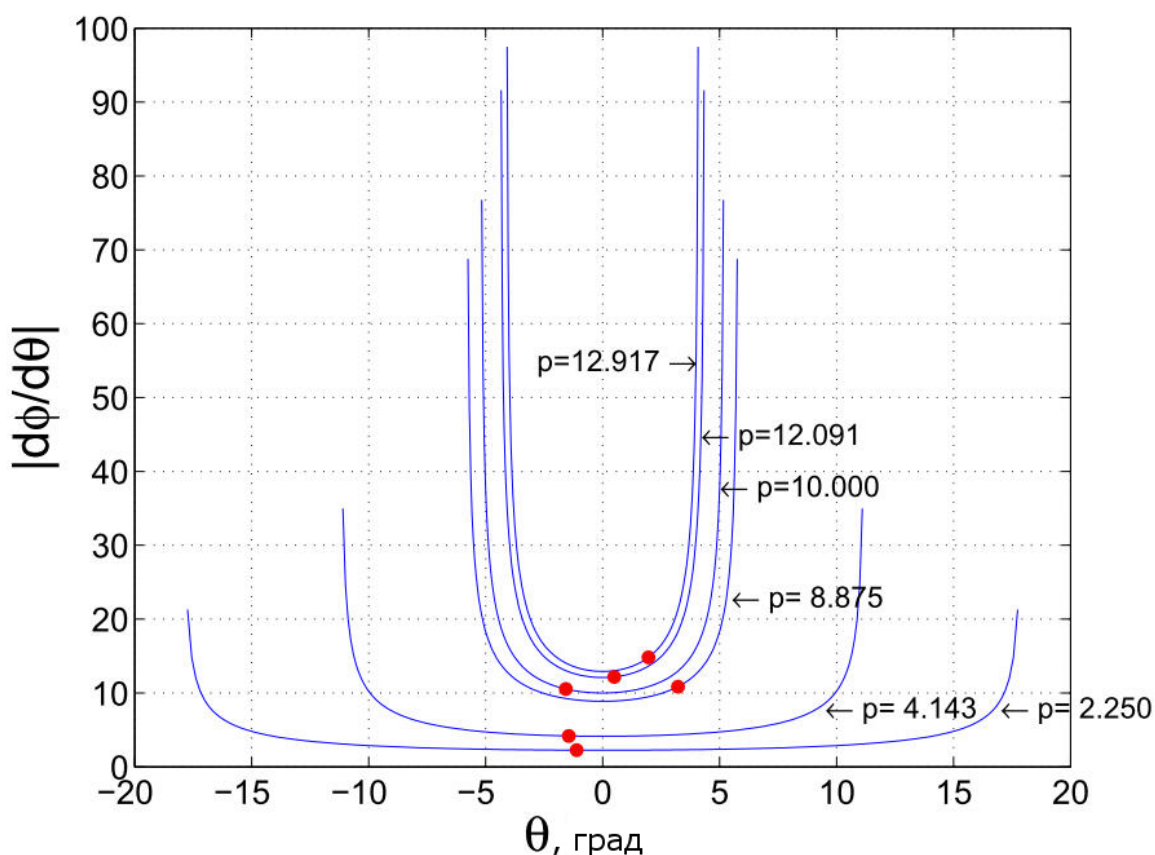


Рис.8: U-образные зависимости коэффициентов усиления.

На практике игрока волнует не только точность. Он должен учитывать то, куда будет перемещаться биток после соударения с прицельным шаром. Действительно, в реальной игре мы часто замечаем, что игрок последовательно выполняет много ударов, и каждый раз биток направляется в удобное положение для следующего удара. Исходя из величины коэффициента усиления, игрок должен нанести удар так, чтобы коэффициент усиления возникающей СШ был небольшим. Этот смысл раскрывается рисунком 8, по которому действительно видно, что каждый коэффициент усиления располагается рядом с минимальным значением $|d\phi/d\theta|$ для конкретной величины p . Возможно, имея «в руках» большее количество данных, мы смогли бы статистически оценить мастерство игрока при управлении битком. Однако, пока можно лишь сказать, что хороший игрок управляет битком так, чтобы значения коэффициента усиления были меньше некоторого ограничения сверху. В данном исследовании, представленном на рисунке 8, это ограничение приблизительно равно 15 (см. также Таблицу 1).

3. Заключительные замечания

В этой статье биток и прицельный шар рассмотрены в качестве динамической системы, для которой представлен анализ устойчивости. Проведенные исследования иллюстрируют важный полученный результат – коэффициент усиления. Применение этого коэффициента двояко. Во-первых, его можно использовать, чтобы численно оценить степень устойчивости или сложности траектории прицельного шара. А во-вторых, можно количественно характеризовать мастерство игрока.

Следует признать, что проведенный анализ довольно элементарен – в том смысле, что теория применима только к самым простым ударам, а не к сложным: комбинационным и бортовым. Однако, так как в бильярдной игре простые удары играют преобладающую роль, мы полагаем, что с помощью представленной теории можно извлечь более точную информацию относительно уровня квалификации игрока, чем с помощью традиционных статистических данных. Кроме того, имея достаточный набор изображений, можно охарактеризовать игровой уровень на статистической основе.

Наконец, мы надеемся расширить существующую теорию для рассмотрения более сложных игровых ситуаций. Так, могут быть проведены более интересные исследования о характере игрока, и даже возможно о предсказании победителя бильярдной игры.

Выражение признательности

Автор хотел бы выразить благодарность господину Юн-Хуэй Ту (*Yung-Hui Tu*) из Китайской Бильярдной Ассоциации Тайбэя за предоставленные видео-материалы и господину Бретолту (*Bretholt*) за полезные комментарии, которые помогли улучшить содержание статьи.

Ссылки

- [1] Alciatore, D.G. (2007) *The amazing world of billiards physics*. Available on: <http://www.engr.colostate.edu/~dga/pool/physics/index.html>
- [2] Bouvill, M. (2007). *Position play in Carom Billiards as a Markov Process*. Journal of Quantitative Analysis in Sports. Vol. 3, Issue 4.
- [3] Coriolis, G.G. (1835). *Theorie mathematique des effets du jeu de billard*. Carilian-Goeury, Paris, France.
- [4] Drazin, P.G., Reid, W.H. (1981). *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press.
- [5] Nadler, D. (2005). *Mathematical Theory of Spin, Friction, and Collision in the Game of Billiards*, an English translation of Coriolis' 1835 book. www.coriolisbilliards.com

Приложение

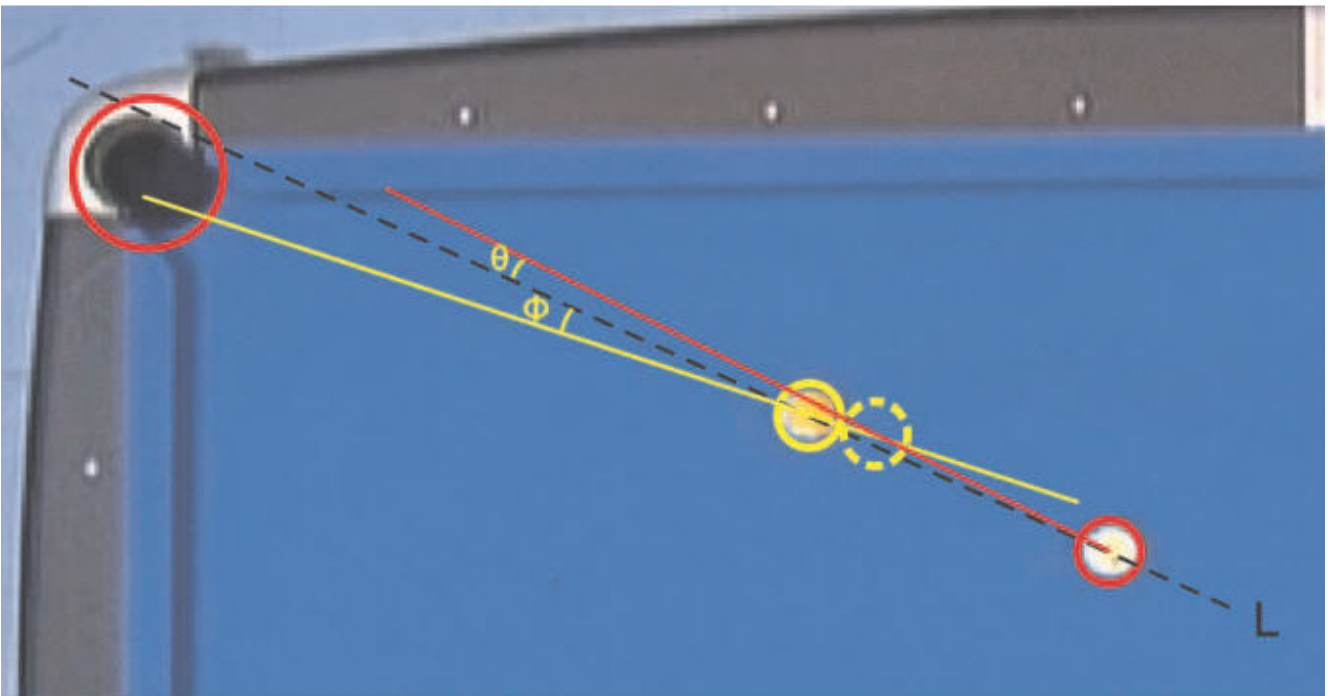


Рис. 9: Снимки сверху второго удара.
 $\phi = 6^\circ$, $p = 4.14$, $\theta = -1.443^\circ$, $|d\phi/d\theta| = 4.185$.

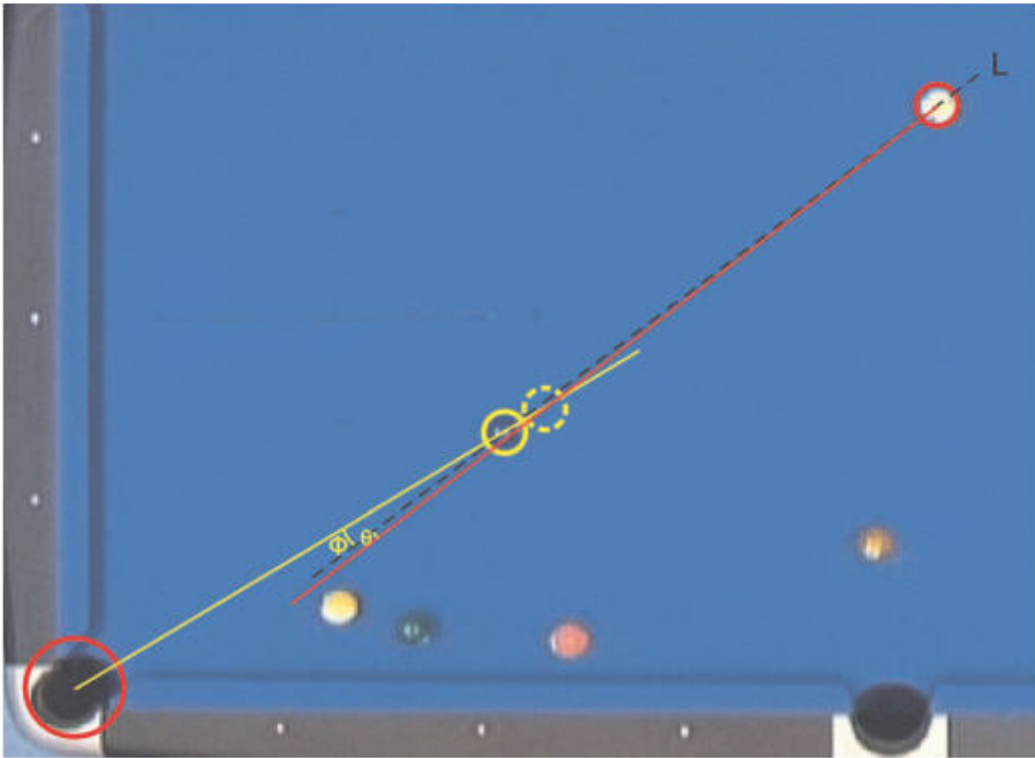
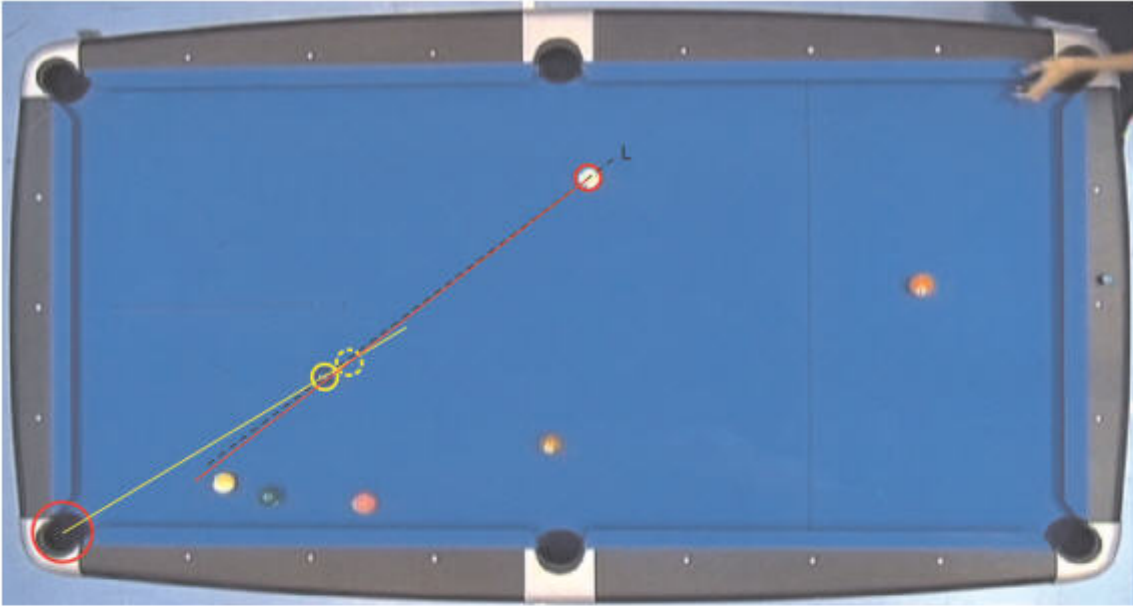


Рис. 10: Снимки сверху третьего удара.
 $\phi = -6^\circ$, $p = 12.09$, $\theta = 0.495^\circ$, $|d\phi/d\theta| = 12.175$.

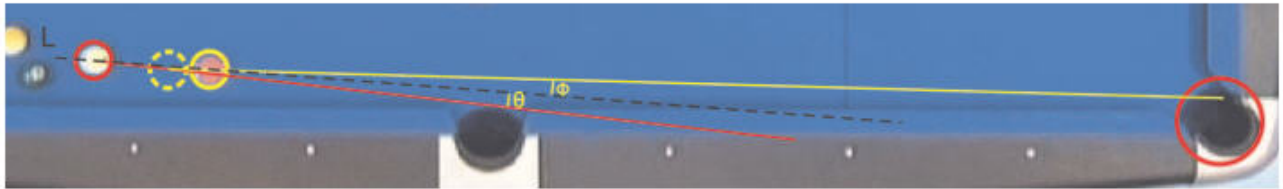


Рис. 11: Снимки сверху четвертого удара.
 $\phi = 2.5^\circ$, $p = 2.25$, $\theta = -1.110^\circ$, $|d\phi/d\theta| = 2.256$.

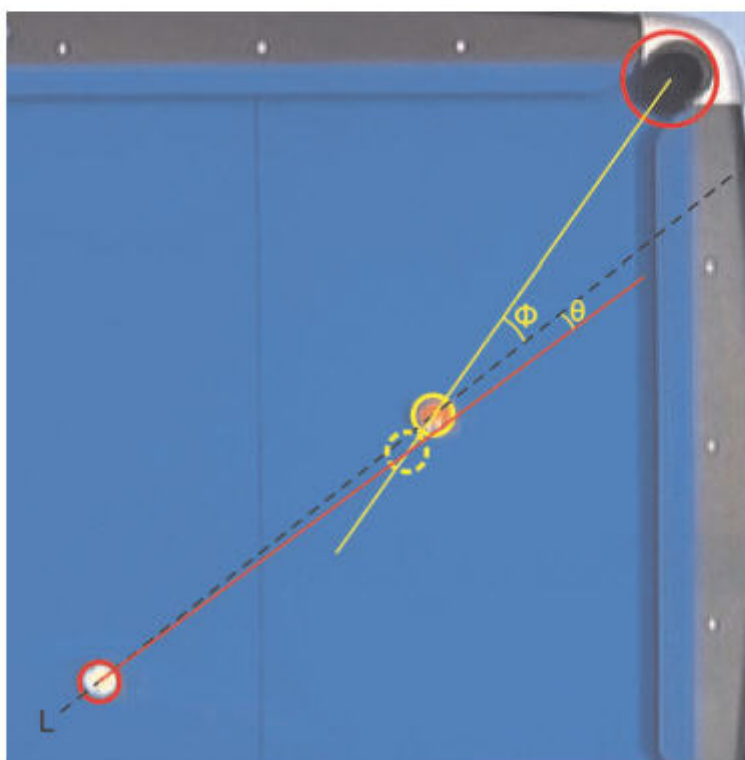
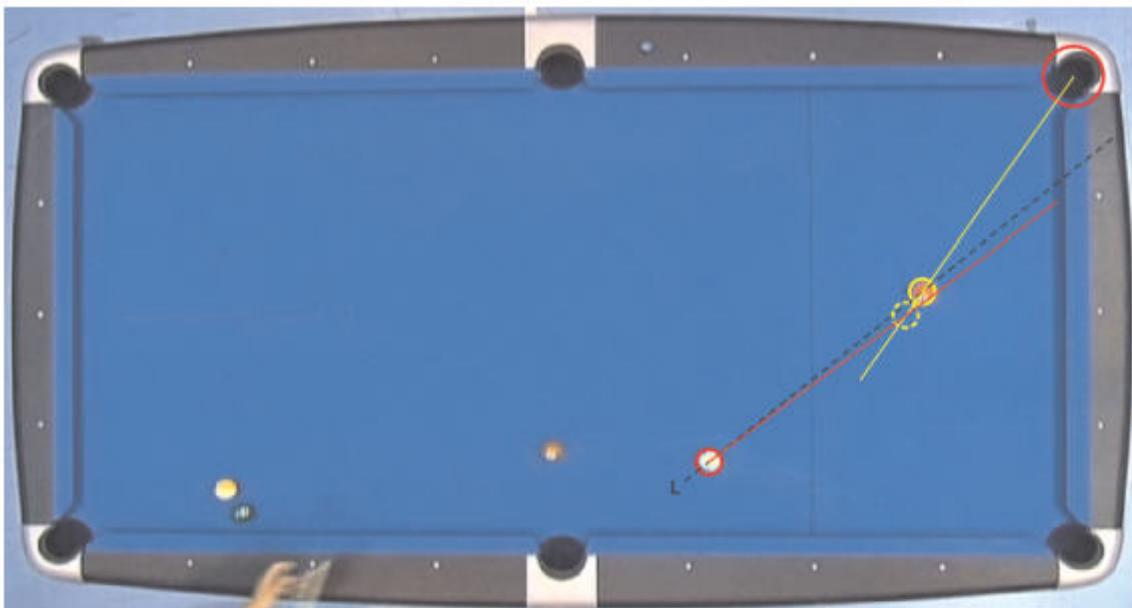


Рис. 12: Снимки сверху пятого удара.
 $\phi = 16^\circ$, $p = 10.0$, $\theta = -1.573^\circ$, $|d\phi/d\theta| = 10.534$.

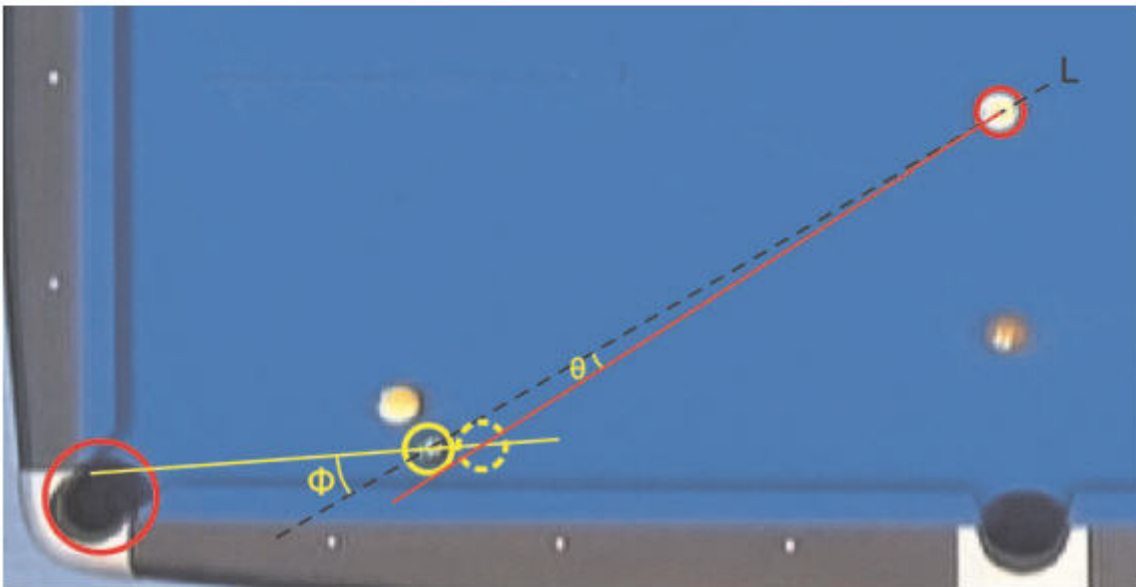
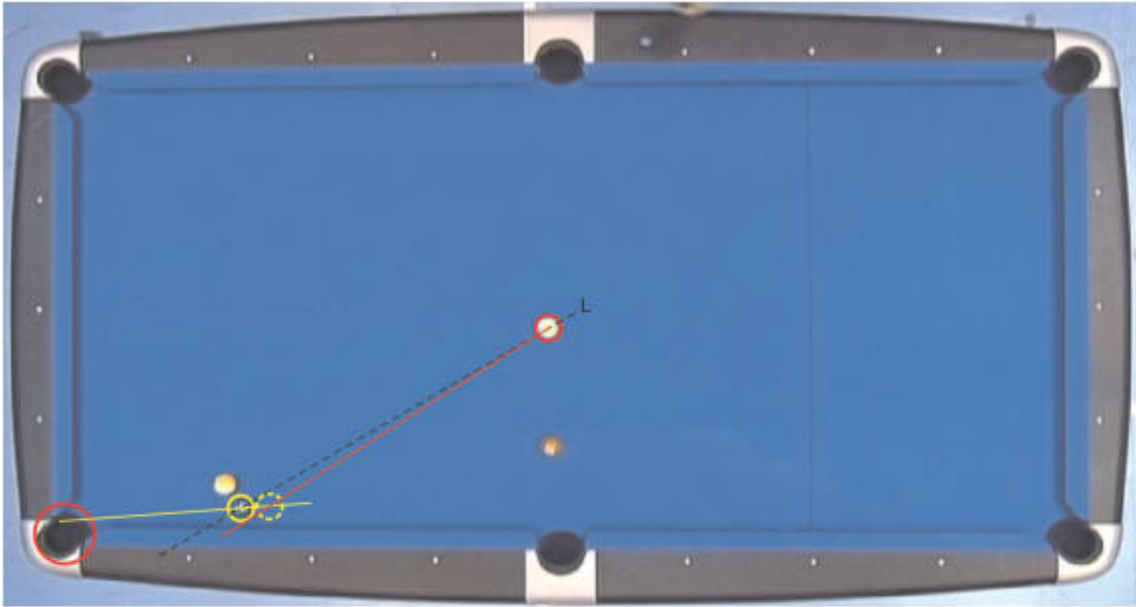


Рис. 13: Снимки сверху шестого удара.
 $\phi = -26.5^\circ$, $p = 12.92$, $\theta = 1.963^\circ$, $|d\phi/d\theta| = 14.821$.

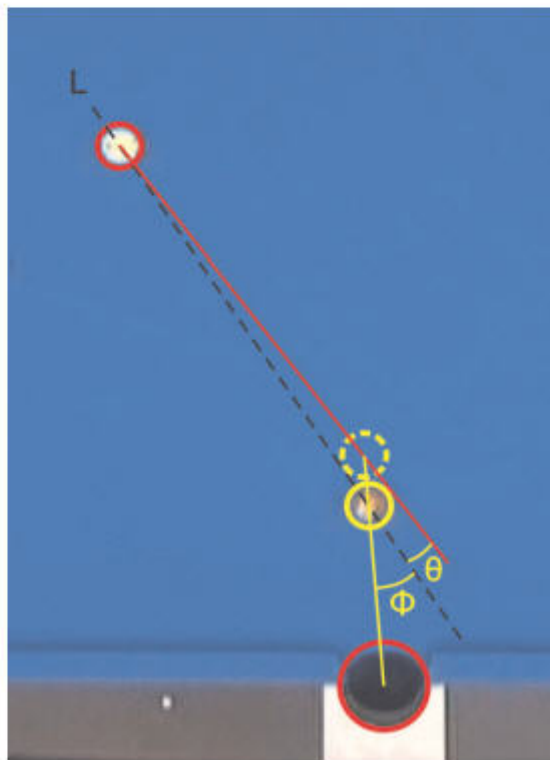
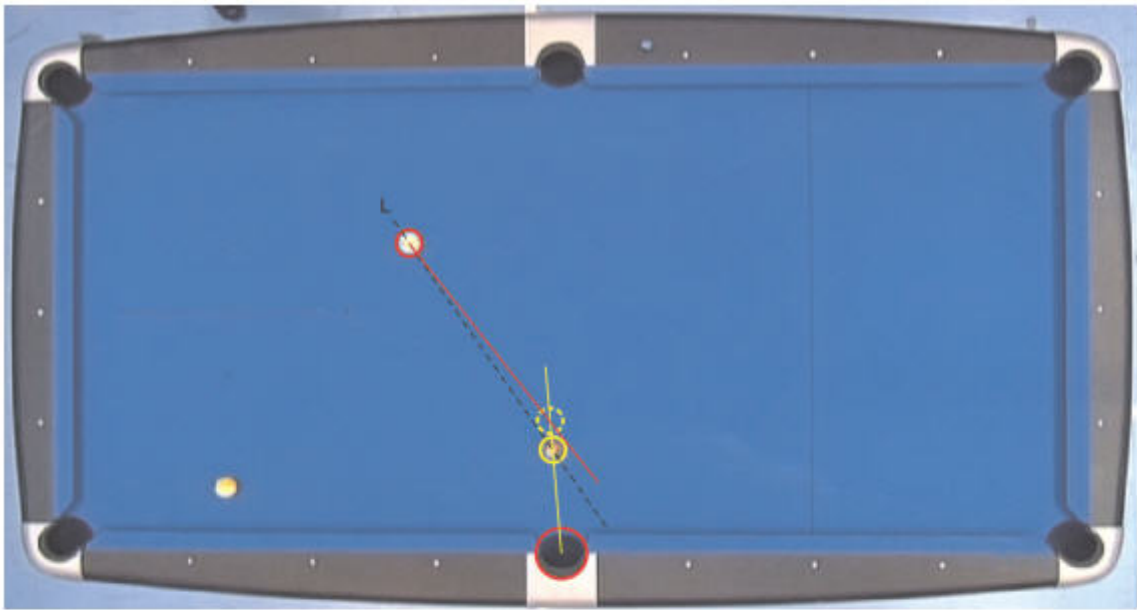


Рис. 14: Снимки сверху седьмого удара.
 $\phi = -30.5^\circ$, $p = 8.88$, $\theta = 3.223^\circ$, $|d\phi/d\theta| = 10.854$.

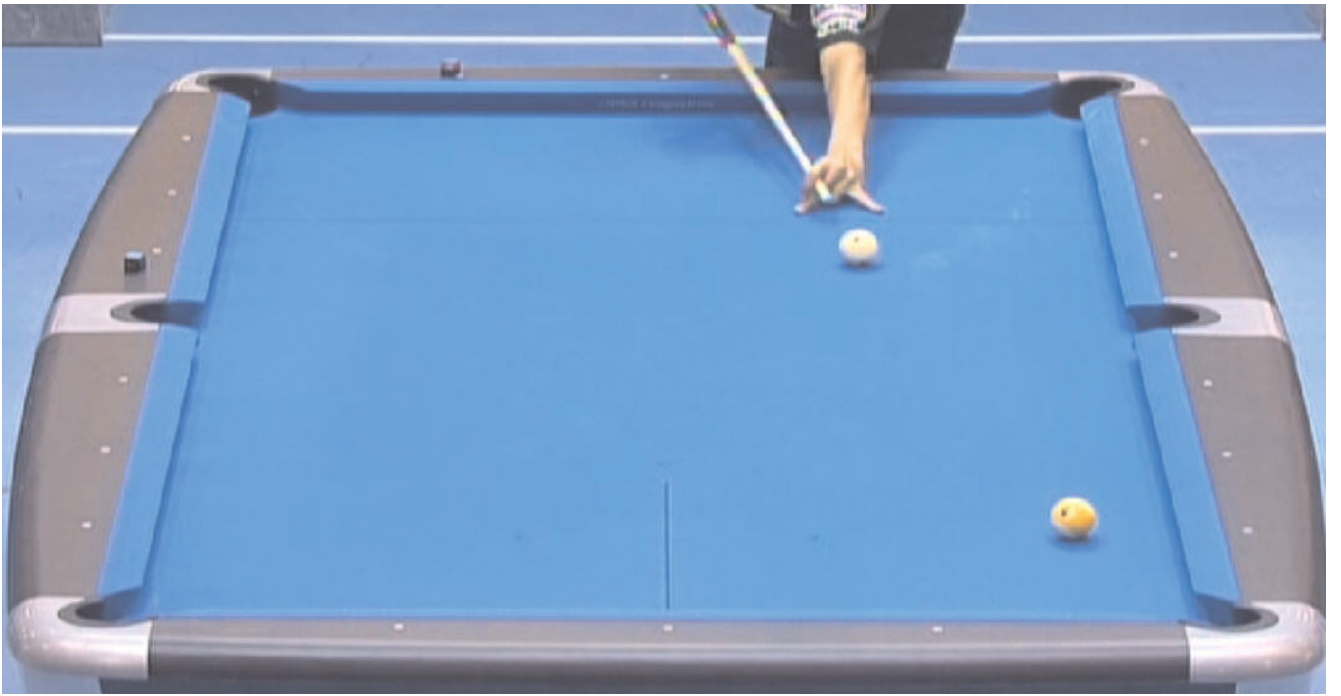


Рис. 15: Последний удар. Вид сбоку.