

Род Кросс

Отклонение кия и битка (или «снос») в бильярде

Rod Cross

Physics Department, University Of Sydney, Sydney NSW 2006, Australia

**Cue And Ball Deflection (Or «Squirt») In Billiards
2007**

Перевод: С.Тихонов; февраль, 2013

После удара, нанесенного кием, бильярдный шар перемещается по направлению продольной оси кия, если только она не смещена относительно центра битка для придания ему бокового вращения. В этом случае траектория битка отклоняется или «сносится» на несколько градусов в сторону. Представленные результаты измерений и расчетов показывают – как скольжение наклейки кия по шару, если на нее не было нанесено мела, приводит к большим углам сноса; и как наклейка, обработанная мелом, сцепляется с шаром, благодаря чему углы сноса уменьшаются.

1. Введение

Одной из простых задач механики является определение последствий прямого соударения двух бильярдных шаров (*соударений «в лоб»*; прим. пер.). Несколько сложнее – задача определения последствий соударения на резке, характерного для бильярдной игры. После соударения битка с неподвижным прицельным шаром на резке шары расходятся примерно под углом 90° [1-3]. Коэффициент трения скольжения между шарами весьма мал и обычно составляет приблизительно 0.06. В силу этого, прицельный шар движется почти параллельно линии соударения, проходящей через центры шаров в момент соприкосновения. По этой линии направлена нормальная составляющая силы, действующей на этот шар.

Подобная ситуация возникает и при воздействии кия на неподвижный биток. После прямого удара, при котором центр шара находится в вертикальной плоскости, проходящей через продольную ось кия, биток движется в этой же плоскости. При этом шар может получить продольное вращение – как верхнее, так и нижнее (благодаря тому, что продольная ось кия проходит выше или ниже центра шара), и все равно будет перемещаться в той же плоскости. За счет удара кием левее или правее видимого центра битка, шару придается боковое вращение. Коэффициент трения между наклейкой и битком больше коэффициента трения между соударяющимися шарами. (*И значительно – на порядок! Прим. пер.*). За счет нанесения бильярдного мела на поверхность наклейки, его можно увеличить. Биток отделяется от кия параллельно направлению равнодействующей силы, складывающейся из нормальной силы и силы трения (*направленной тангенциально; прим. пер.*). Поразительно, но траектория битка обычно наклонена к продольной оси кия на несколько градусов. (*Здесь автор ничего не говорит о наклонности продольной оси кия при ударе. Конечно же, ничего удивительного не было бы, если речь шла о проявлении эффекта «массе». Но автор имеет в виду снос – отклонение совсем другой физической*

природы, и направленное, к тому же, в иную сторону по сравнению с отклонением за счет «массе». Правильней было бы говорить об отклонении траектории битка от плоскости удара, в которой расположена ось кия. Прим. пер.). Если бы это было не так, то движение шара сложнее было бы предугадать, и игроки применяли бы боковое вращение с неохотой. (Весьма спорное утверждение! Прим. пер.).

Интенсивность бокового вращения, придаваемого битку, ограничена. Ее можно увеличивать, отдавая точку удара влево или вправо от центра шара, но при этом сильнее будет отклоняться и линия приложения равнодействующей силы. Обычно, игроки называют этот эффект «сносом», так как шар сносится от намеченного пути. Если нанести удар по шару слишком близко к его краю, то произойдет «кикс» – проскальзывание наклейки по поверхности битка, после которого шар отклонится от ожидаемой траектории на большой угол. Физическая природа эффекта сноса истолкована не в полной мере, несмотря на то, что обсуждается бильярдистами [4,5]. Анекдотические свидетельства [1,4,5] указывают на то, что угол сноса можно уменьшать за счет применения легких наклеек для киев. Но мне не приходилось встречать никаких экспериментальных данных, подтверждающих такую возможность.

В этой работе представлены теоретические и экспериментальные результаты, демонстрирующие изменение силы трения в зависимости от положения точки удара. Показано, что угол сноса остается весьма небольшим при малых боковых удалениях точки удара от центра битка и при нанесении бильярдного мела на наклейку. Большая часть энергии высвобождается из наклейки и shaft кия на последней стадии удара, что говорит о том, что свойства наклейки, связанные с ее упругостью, аналогичны свойствам супер-мяча (*Superball*).

2. Сущность проблемы

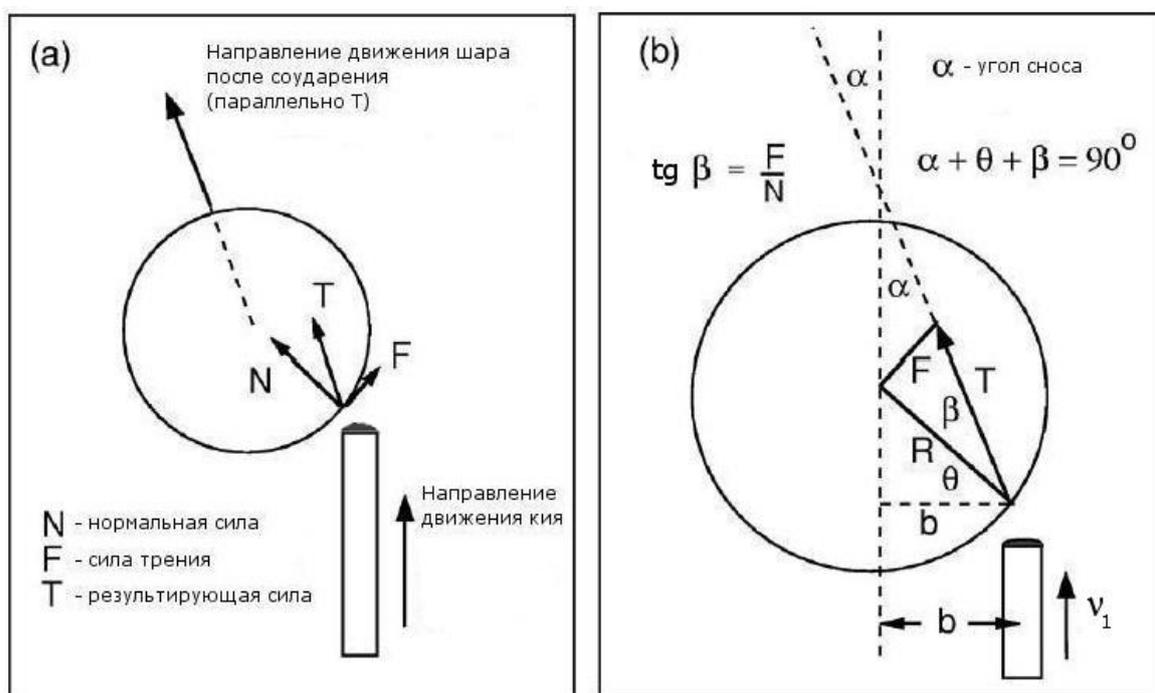


Рис.1. Вид сверху: кий и шар. Биток приобретает боковое вращение, когда продольная ось кия проходит не через центр шара. При движении биток отклоняется от оси кия на угол сноса α .

На рисунке 1 показана ситуация, в которой кий при ударе приближается к шару радиуса R на боковом удалении b от видимого центра. Радиус наклейки кия составляет примерно 5 миллиметров, и поэтому точка контакта наклейки с шаром не совпадает с осью кия. Нормальная сила N действует по линии, проходящей от точки удара через центр битка, а сила трения F – перпендикулярно ей. Результирующая сила T направлена под углом β к радиус-вектору точки контакта наклейки и шара. Таким образом, $Tg \beta = F/N = \mu$ – эффективный коэффициент трения между наклейкой кия и шаром. Когда наклейка скользит по поверхности шара, $\mu = \mu_k$ представляет собой коэффициент трения скольжения. Если же наклейка сцеплена с шаром, то $\mu < \mu_k$. Покоящийся перед ударом биток, отделяется от кия по направлению, параллельному результирующей силе T – под углом α к направлению движения кия в момент соприкосновения с шаром. Угол α , обычно называемый углом сноса, определяет нежелательное отклонение шара (*снос битка; прим. пер.*) от предполагаемой траектории.

Из правой части рисунка 1 видно, что $\alpha + \beta + \theta = 90^\circ$, а угол θ удовлетворяет тригонометрическому равенству $\cos \theta = b/R$. В силу этого, угол α является относительно простой функцией бокового удаления точки удара b и коэффициента трения μ ; номинально он не зависит от массы шара, а также от массы и длины кия. На рисунке 2 представлена зависимость α от μ для различных значений относительного бокового удаления b/R . Основной вопрос о физике явления сноса, представляющий интерес, заключается в том, как меняется коэффициент трения при условии, что угол сноса остается малым независимо от бокового удаления b . С этим же связан и вопрос – почему углы сноса, присущие некоторым бильярдным киям, меньше аналогичных углов, наблюдаемых при использовании других киев. В принципе, угол сноса был бы нулевым, если выполнялось равенство $\beta + \theta = 90^\circ$ или $\mu = b / \sqrt{R^2 - b^2}$. Угол α равен нулю, когда $b = 0$, вследствие чего $F = 0$ и $\mu = 0$. Например, чтобы угол сноса был нулевым при $b/R = 0.5$, нужно, чтобы коэффициент трения составлял $\mu = 0.577$. На практике же, при $b/R = 0.5$ угол α может быть больше 10° . Этот факт приводит к соображению о целесообразности использования более абразивного мела для уменьшения угла сноса. Однако, результаты экспериментов, приведенные в четвертой части этой работы, показывают, что увеличение μ не приводит к уменьшению угла сноса.

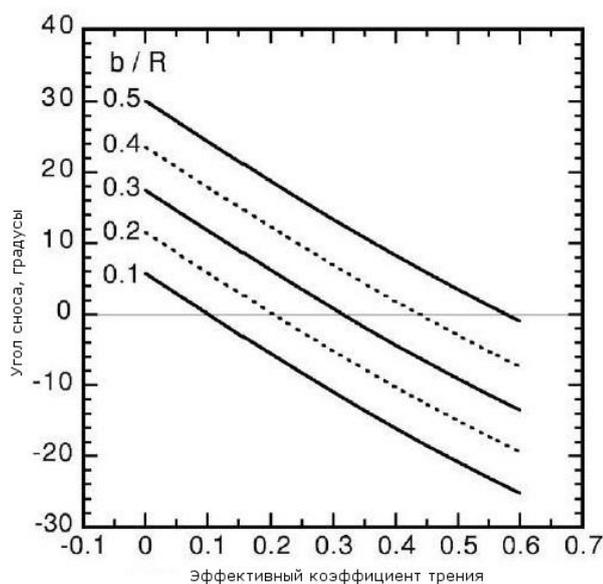


Рис.2. Зависимость угла сноса α от μ для различных значений b/R .

3. Экспериментальные методы

Величину приданного шару бокового вращения трудно измерить на бильярдном столе. Ведь в большинстве случаев шар сначала перемещается со скольжением, а затем катится, а это значит, что он вращается одновременно вокруг двух осей. Помимо этого, если удар по шару не был нанесен так, что сразу же начинается его естественное качение, траектория на этапе движения со скольжением криволинейна. Более того, обычно удар наносится не горизонтально, в результате чего шар приобретает вращение и вокруг третьей оси, направленной горизонтально в сторону движения. Из-за трения с сукном, это вращение искривляет траекторию шара, возвращая его к намеченному направлению, в некоторой мере маскируя тем самым реальный угол сноса [1]. Все эти препятствия были преодолены за счет монтирования специального шара на месте отвеса маятника. На шаре, имеющем массу 120 граммов и диаметр 50.3 миллиметров, по окружности была нанесена вертикальная линия, благодаря которой стало возможным измерять угол поворота с помощью видеосъемок. Для подвески были использованы легкая нить из хлопка и маленькая металлическая петля, прикрепленная сверху шара двусторонней липкой лентой. Длина маятника составляла 1.73 метра. Видеокамера была установлена максимально близко к верхней точке подвеса так, чтобы можно было наблюдать за шаром непосредственно сверху. На столе (под шаром; на расстоянии 3 мм от него) в целях регулировки была размещена двумерная линейка. Шкала расстояний при съемках была откалибрована в плоскости, проходящей через центр масс шара.

Для экспериментов использовался кий, имеющий длину 94 сантиметра и массу 186 граммов. Удары по шару наносились горизонтально с небольшой скоростью кия – примерно 0.7 м/с. На кий можно было устанавливать прикручивающуюся наклейку. На одну из наклеек мел не наносился, а другая обильно обрабатывалась бильярдным кремниевым мелом, создающим сильное трение. Обычный школьный мел, изготавливаемый из карбоната кальция, мягче бильярдного и обеспечивает меньшее трение. Кий не выбирался так, чтобы обеспечить малые углы сноса, а его длина была меньше, чем у общепринятого кия для Пула. Это был относительно недорогой кий, подходящий для проведения экспериментов; углы сноса, характерные для него, примерно в два раза превышали величины, соответствующие киям с малыми сносами.

Поступательная и угловая скорости шара определялись с точностью 2%. При этом, с помощью пакета программного обеспечения VideoPoint [6] анализировался каждый кадр записи, проводившейся с частотой 25 кадров в секунду. Угловое отклонение шара измерялось с точностью $\pm 0.3^\circ$. Измерения проводились после ударов, наносимых по различным точкам, расположенным на экваторе шара на боковых удалениях от нуля до 16 мм. Для поддержания максимального трения между шаром и наклейкой, хорошие игроки мелят ее после каждого удара. Для еще большего увеличения силы трения я проводил дополнительные измерения, прикрепляя по экватору шара (двусторонней липкой лентой) полоску наждачной бумаги с зернистостью P800 и шириной 7 мм. На каждом дюйме поверхностного слоя такой бумаги располагается примерно 800 абразивных крупинок. Таким образом, диаметр каждой крупинки составляет приблизительно 1/800 дюйма.

Определить величину бокового удаления точки удара с помощью видеосъемок нельзя точнее, чем с возможной ошибкой до 2 мм – ведь положение шаша можно измерить с точностью 1 мм, но увидеть подлинную точку контакта наклейки с шаром настолько точно не представляется возможным. В связи с этим, был использован альтернативный метод определения местоположения точки удара, основанный на

следующих теоретических соображениях. Сила трения, действующая на шар, создает вращательный момент $F R = I_{cm} d\Omega/dt$, где $I_{cm} = 0.4 mR^2$ – момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр масс; m – масса шара; Ω – измеренная угловая скорость вращения шара после удара. Следовательно, $\int F dt = 0.4 mR\Omega$. После удара скорость шара в направлении, параллельном действию силы F , можно выразить следующим образом: $v_f = (\int F dt)/m = 0.4 R\Omega$. Угол сноса α и абсолютная скорость шара v определялись из видеосъемок, а угол β вычислялся из соотношения $\beta = \text{Arcsin}(v_f/v)$. Затем из связи $\theta = 90^\circ - \alpha - \beta$ определялся угол θ , а боковое удаление – из соотношения $b = R \text{Cos } \theta$. Вычисленное значение b получалось более достоверным, чем аналогичное значение, определенное визуально по кадрам видеосъемок. После корректировки зафиксированного камерой положения кия, с учетом радиуса закругления наклейки, указанные значения b в большинстве случаев отличались друг от друга не более, чем на 1 мм.

Наиболее подверженным критике аспектом этого эксперимента является воздействие силы трения на шар во время удара. Посредством измерений удалось определить изменение движущей силы (или скорости) шара, а по нему – вычислить интегральное по времени значение величины силы трения. Однако, не удалось определить зависимость этой силы от времени в период контакта кия и шара. В качестве альтернативы были произведены измерения вариаций силы трения по времени при воздействии кия на стеклянный блок (параллелепипед) массой 210 граммов, имеющий сходные с бильярдным шаром твердость и структуру поверхности. Блок был помещен на горизонтальную поверхность, покрытую силиконом – для минимизации трения, а удары наносились горизонтально и под разными углами к поверхности блока. Методом проб и ошибок отыскивалась точка, нанесение удара в которую приводило к перемещению блока без вращения. На одной из граней блока был установлен акселерометр для измерения нормальной силы N , а на смежной перпендикулярной грани – акселерометр, измеряющий силу трения F . Цель эксперимента заключалась в определении такого наклона кия, при котором в начале контакта наклейка скользила по поверхности блока, а потом сцеплялась с ним, или же сцеплялась с поверхностью с самого начала контакта, как было предложено Д.Элкиатором [1] и Р.Шепардом [5]. По теории, при косом соударении двух твердых тел (при соударении на резке; прим. пер.), контактирующие поверхности сначала скользят друг относительно друга, а затем сцепляются, если относительная скорость поверхностей в месте контакта в период соударения становится равной нулю. Однако, если поверхности приближаются друг другу почти под прямым углом, начальный период скольжения можно не принимать в расчет, особенно когда одно или оба тела упруго деформируются в районе соприкосновения в направлении, параллельном их обеим поверхностям. Если масса сжатой области незначительна по сравнению с общей массой соударяющихся тел, относительная скорость обеих поверхностей может стать равной нулю фактически сразу же после соприкосновения [7]. В результате, по сравнению со случаем скольжения, значительно снижается начальная величина силы трения между поверхностями.

Помимо упомянутых выше экспериментов, были проведены измерения ускорения наклейки. Однако, использовать при этом деревянный кий не представлялось возможным – его наклейка была слишком мала, чтобы закрепить на ней акселерометр. Вместо этого, из алюминиевого бруска длиной 1 м был изготовлен специальный кий, имеющий прямоугольное сечение размером 20 мм × 6 мм, на конец которого прикреплялся резиновый наконечник (наклейка). На широкой внешней стороне (20 мм) кия на расстоянии 25 мм от вершины наклейки был установлен пьезо-

датчик, имеющий форму диска с диаметром 15 мм. Ускорение в плоскости, перпендикулярной диску (в плоскости, поперечной направлению движения кия при соприкосновении с шаром), определялось по показаниям выходного напряжения датчика. При помощи этого кия наносились удары по шару, подвешенному в виде маятника (как это и было описано выше). В результате опыта были получены углы сноса, сходные с углами, измеренными в опыте с использованием обычного кия с намеленной наклейкой.

4. Результаты экспериментов

На рисунке 3 представлена зависимость угла сноса α от бокового удаления точки удара b для ударов наклейкой с мелом и без него, а также для удара намеленной наклейкой по полоске наждачной бумаги, приклеенной к шару. Каждая из точек графиков соответствует конкретному соударению кия с шаром. Гладкие кривые построены после аппроксимации экспериментальных результатов полиномами наилучшего приближения. Разброс данных отражает влияние ошибок измерений и случайных вариаций силы трения, действующей между наклейкой и шаром. Соответствующие зависимости угловой скорости бокового вращения Ω и эффективного коэффициента трения показаны на рисунках 4 и 5, соответственно. Величина угловой скорости бокового вращения была пропорционально пересчитана для поступательной скорости шара, равной одному метру в секунду, в предположении, что вращение прямо пропорционально скорости кия, а следовательно и скорости шара. Эффективный коэффициент трения находился по зависимости $\mu = Tg \beta = \int F dt / \int N dt$. При сцеплении наклейки с шаром значение коэффициента μ меньше, чем μ_k . При этом сила трения создается статическим трением, определяемым динамикой соударения и даже способным переменить направление своего действия во время контакта кия и шара [8-10]. Результаты, представленные на рисунках 4 и 5, имеют сходную функциональную форму, так как вращение линейно зависит от $\int F dt$ и угловая скорость была пересчитана для скорости шара, пропорциональной $\int N dt$.

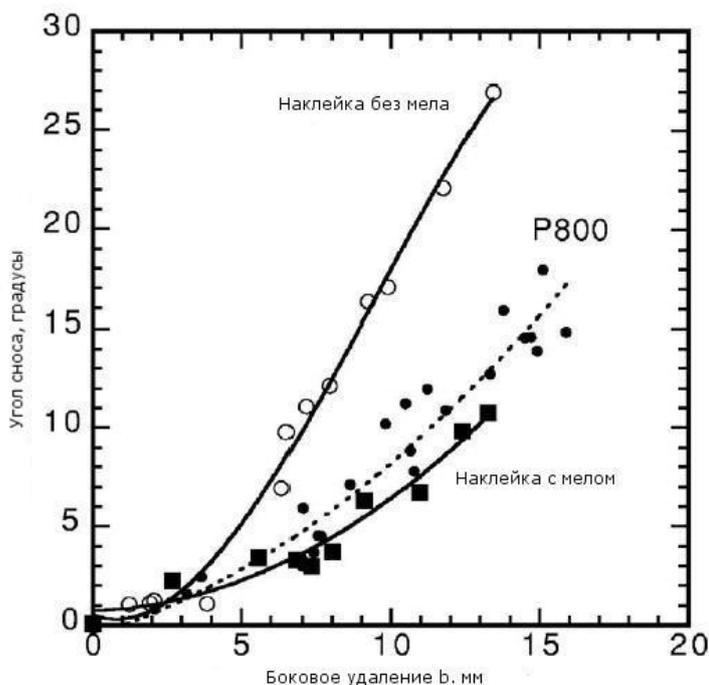


Рис. 3. Результаты измерений угла сноса α в зависимости от b .

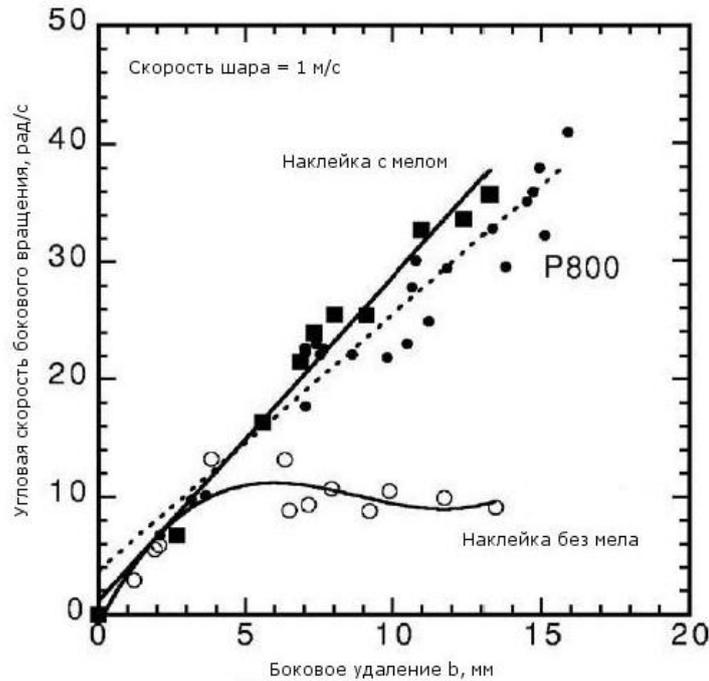


Рис.4. Результаты измерений угловой скорости вращения в зависимости от b , пересчитанные по отношению к поступательной скорости шара, равной 1 м/с.

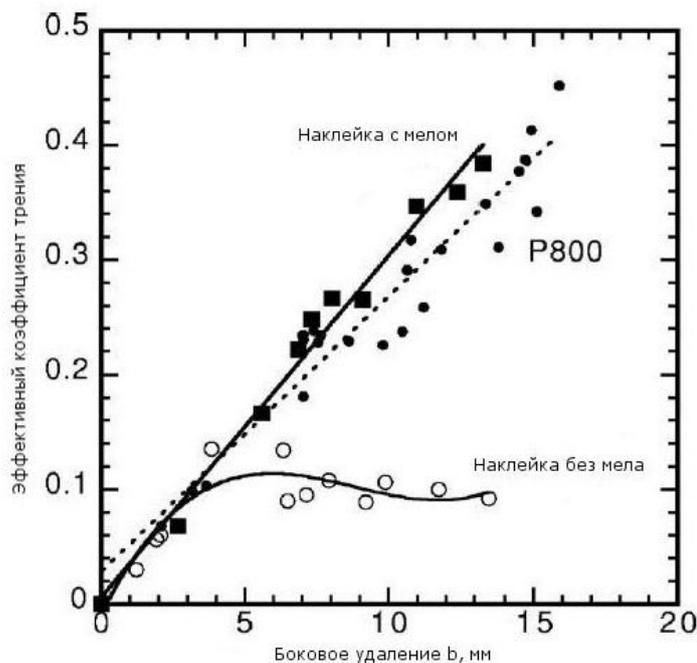


Рис.5. Результаты измерений эффективного коэффициента трения в зависимости от b .

Как и ожидалось, наклейка без нанесенного мела обладает меньшим коэффициентом трения по сравнению с обработанной наклейкой. В большинстве случаев это приводит к меньшим интенсивностям приданного бокового вращения и большим углам сноса. При малых боковых удалениях точки удара от центра шара, когда кий приближается к поверхности битка почти под прямым углом, даже наклейка без мела сцепляется с шаром. При этом результирующие углы сноса и скорости бокового вращения шара практически совпадают для ударов наклейкой с мелом или

без него. Удивительно, что нет большой разницы в последствиях ударов намеленной наклейкой по шару и по приклеенной к нему абразивной полоске. Скрытый смысл того, что угол сноса и интенсивность вращения шара принимают в этих случаях почти одинаковые значения, заключается в том, что они определяются только сцеплением наклейки и шара при ударе и не зависят от коэффициента трения скольжения.

Результаты измерений нормальной силы и силы трения, действующих на стеклянный блок, представлены на рисунке 6. При малых углах наклона кия к грани, по которой наносится удар, было отмечено сцепление наклейки с поверхностью блока без начальной фазы скольжения. Если бы наклейка начала скользить по блоку, то отношение F/N сначала было бы равно коэффициенту трения скольжения, а затем, после сцепления, уменьшилось. Вместо этого было получено, что отношение F/N было довольно небольшим в начале соударения и увеличивалось по мере его течения. Среднее по времени соударения значение F/N возрастало с увеличением угла наклона кия. При углах наклона, превышающих примерно 30° , с самого начала соударения наклейка сцеплялась со стеклом, но затем, когда отношение F/N увеличивалось примерно до величины 0.7, начинала проскальзывать. Наличие фазы скольжения увеличивало продолжительность соударения кия с блоком примерно до 12 миллисекунд. В течение периода взаимодействия со скольжением наклейка начинала вибрировать и воздействовала на блок с переменной силой. Эти вибрации по форме соответствовали поперечному изгибу кия, о чем свидетельствовал рассеивающий характер колебаний, у которых высокочастотные составляющие имели более высокую фазовую скорость, чем низкочастотные. С помощью акселерометра, прикрепленного на конце ручки кия, удалось выяснить, что высокочастотные компоненты волновой деформации достигают бампера кия примерно через две миллисекунды после начала соприкосновения наклейки с блоком, а низкочастотные – примерно через четыре миллисекунды.

На рисунке 7 изображена зависимость от времени величины поперечного ускорения, измеренного на расстоянии 25 миллиметров от наклейки кия, изготовленного из алюминиевого бруска. Время контакта такого кия с шаром составляло 3 миллисекунды. Сначала наклейка ускорялась в ожидаемом направлении, соответствующем ее сцеплению и вращению совместно с шаром в одном и том же направлении. Однако, еще до окончания контакта ускорение переменяло знак, попутно с уменьшением поперечной скорости наклейки. По рисунку 7 можно видеть, что волна поперечного изгиба кия возвращается от бампера обратно к наклейке после окончания ее контакта с шаром. Подобное поведение наклейки имело место при всех соударениях с шаром (и стеклянным блоком) без кикса. Как будет отмечено в разделе 6, резкую перемену знака ускорения можно объяснить высвобождением энергии упругой деформации наклейки.

5. Теоретическая модель

На рисунке 8 изображено соударения кия с неподвижным бильярдным шаром. В качестве модели кия примем жесткий стержень, имеющий одинаковое поперечное сечение, массу m и длину L . Введем обозначения: V_1 – скорость кия в момент соприкосновения с шаром; θ – угол между продольной осью и тангенциальным направлением; b – боковое удаление точки удара от видимого игроку центра шара. Несмотря на то, реальные кии обладают умеренной гибкостью и оснащены установленной эластичной наклейкой, мы будем далее полагать, что кий представляет собой довольно-таки жесткое тело, для которого легко определить скорость центра масс и угловую скорость, как перед ударом, так и после него. Однако, не будем считать

кий совершенно негнуцимся. Его гибкие свойства можно характеризовать посредством величин коэффициентов восстановления в нормальном и тангенциальном направлениях. Эти коэффициенты характеризуют совместные потери энергии кием и шаром. Но, по отношению к кию, обладающему определенной гибкостью и имеющему эластичную наклейку, бильярдный шар можно рассматривать в качестве абсолютно жесткого тела. При таком подходе, массу кожаной наклейки можно не принимать в расчет, а ее саму считать эластичным звеном между жестким шаром и жестким shaftм [7]. Несколько передних дюймов тонкого конца shaftта также можно относить к указанному гибкому звену, полагая, что масса и жесткость этого участка значительно меньше, чем у остальной части кия.

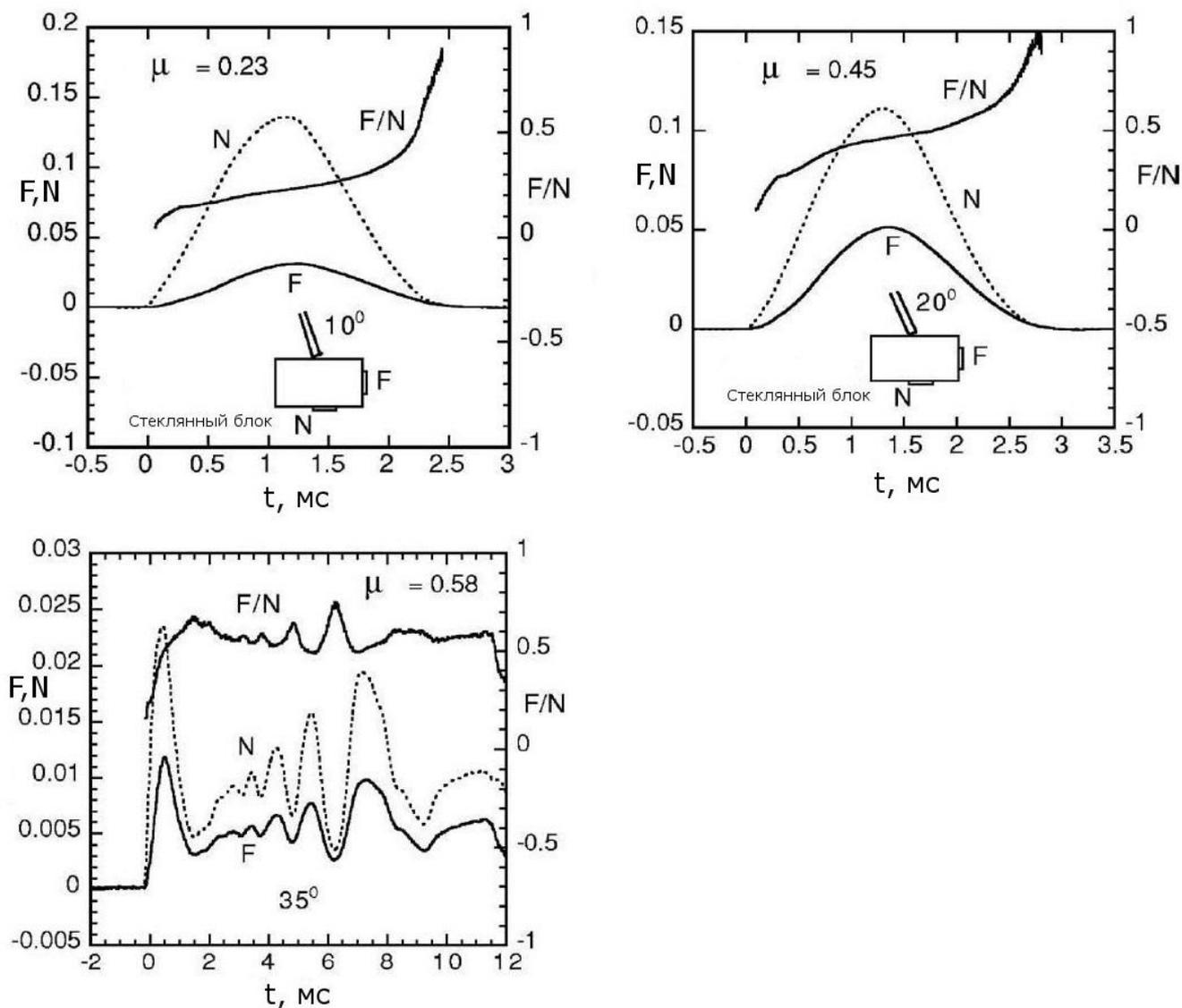


Рис.6. Зависимости величин F , N и F/N от времени при ударе кием с наклеенной наклейкой, наносимом по стеклянному блоку (рассмотрены три различных угла, под которыми при ударе располагается кий к плоскости блока). Средняя по времени величина коэффициента трения $\mu = F/N$ возрастает при увеличении угла между осью кия и ударной плоскостью блока.

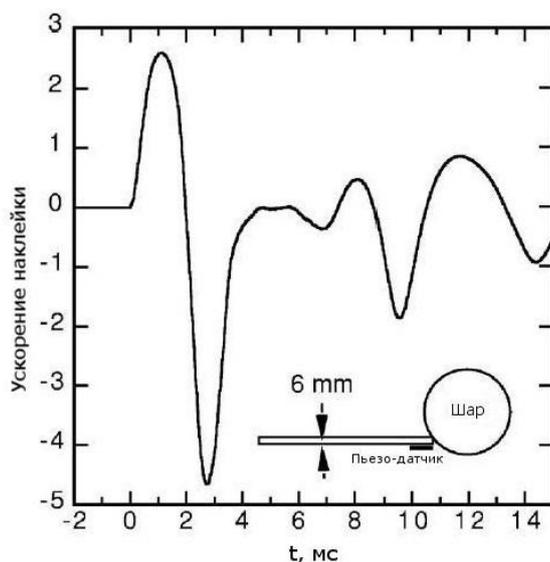


Рис.7. Измеренное с помощью пьезо-датчика поперечное ускорение наклейки, установленной на алюминиевом бруске с сечением 20 мм x 6 мм. Удары по шару наносились на расстоянии 8 мм от его центра.

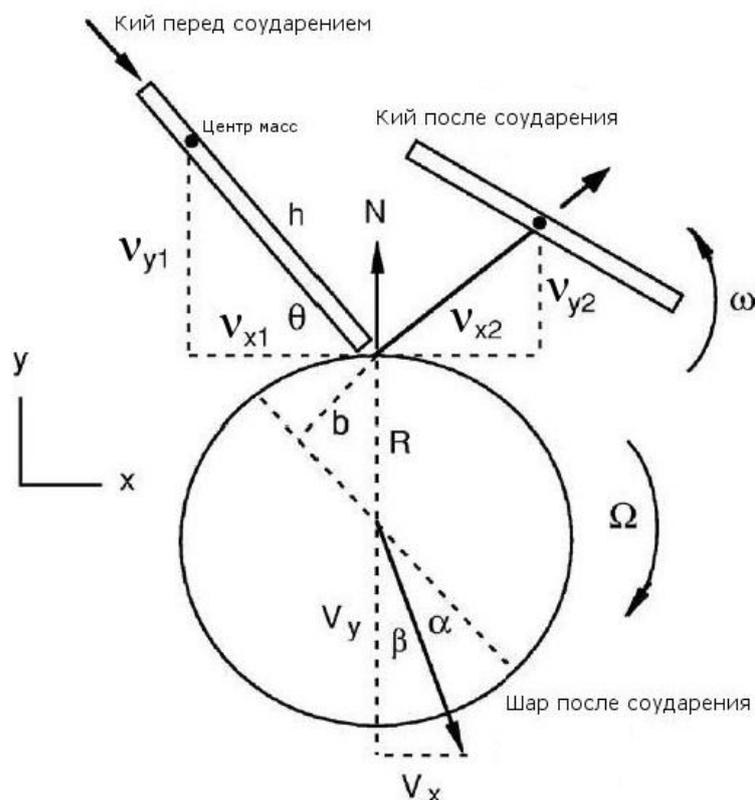


Рис.8. Геометрия соударения кия с шаром. Для наглядности, отклонение кия после соударения преувеличено (по крайней мере, по сравнению со случаем, когда опорная рука удерживает кий в районе точки удара). Если кистевой упор не применяется, то кий отклоняется примерно так, как изображено. Показаны положительные направления угловых скоростей поворота Ω и ω .

У однородного стержня расстояние от наклейки до центра масс составляет $h = L/2$. Для реального же кия, величина h обычно принимает значение в районе $0.7L$. Обозначим массу и радиус шара через M и R , соответственно. Момент инерции

стержня относительно центра масс выражается зависимостью $I_r = mh^2/3$ (для реального кия он составляет примерно $0.8mL^2/12$). Момент инерции шара равен $I_b = 0.4MR^2$. Как и выше, через N будем обозначать силу, действующую по нормали к поверхности шара, а через F – силу трения, действующую в тангенциальном направлении.

Прямоугольная система координат x, y выбрана так, что ось y параллельна направлению действия нормальной силы N , а ось x параллельна направлению силы F . Сила F действует на кий в отрицательном направлении оси x , а на шар – в положительном. (На самом деле, это – две разные равновеликие силы, действующие в строго противоположных направлениях. Прим. пер.). Выразим проекции скорости V_1 на оси x и y : $V_{x1} = V_1 \cos \theta$, $V_{y1} = V_1 \sin \theta$. Если удар был нанесен без кикса, стержень отражается от шара под углом θ_2 , имея при этом скорость V_2 (с компонентами $V_{x2} = V_2 \cos \theta_2$ и $V_{y2} = V_2 \sin \theta_2$) и угловую скорость ω . После удара шар начинает движение, имея компоненты скорости V_x и V_y , а также угловую скорость бокового вращения Ω . В последующих выкладках все величины положительны. Коэффициент восстановления в нормальном направлении определяется зависимостью

$$e_y = (V_{y2} + V_y) / V_{y1} . \quad (1)$$

Интегралы от сил F и N по времени контакта можно выразить следующим образом:

$$\int F dt = m (V_{x1} - V_{x2}) = M V_x , \quad (2)$$

$$\int N dt = m (V_{y1} + V_{y2}) = M V_y . \quad (3)$$

С помощью несложных преобразований из (1) – (3) получаются связи

$$V_{y2} = V_{y1} (M e_y - m) / (m + M) , \quad (4)$$

$$V_y = V_{y1} m (1 + e_y) / (m + M) . \quad (5)$$

Вращающие моменты, действующие на стержень и шар, равны $Nh \cos \theta - Fh \sin \theta$ и FR , соответственно. Интегрирование по времени контакта приводит к следующим соотношениям:

$$I_r \omega = h (\cos \theta \int N dt - \sin \theta \int F dt) , \quad (6)$$

$$I_b \Omega = R M V_x . \quad (7)$$

Зависимость (7) можно упростить и привести к виду $R \Omega = 2.5V_x$. Отсюда видно, что измерение скорости и вращения шара не дает какой-либо информации, не вытекающей из обсуждавшихся выше измерений скорости шара и угла сноса – и те и другие «наборы» информации обусловлены только величинами V_x , V_y и радиусом шара. В силу этого, результаты измерений, изображенные на рисунках 3 и 4, содержат в себе ту же самую информацию.

Если в течение всего времени контакта наклейка скользит по шару, то $F = \mu_k N$ и для этого случая из (2), (3) можно получить, что

$$V_{x2} = V_{x1} - \mu_k (1 + e_y) M V_{y1} / (m + M) , \quad (8)$$

а соотношение (6) приводится к виду

$$I_r \omega = m h (\cos \theta / \mu_k - \sin \theta) (V_{x1} - V_{x2}) . \quad (9)$$

В конце соударения, касающийся шара конец стержня имеет в направлении оси x скорость $V_{px} = V_{x2} + h \omega \sin \theta$, а контактирующая точка шара перемещается по оси x со

скоростью $V_{px} = V_x + R\Omega = 3.5V_x$. По крайней мере, такие выражения для скоростей вытекают из модели, в которой кий и шар представляются в виде твердых тел. Так как кожаная наклейка на кие довольно-таки упруга, возможно, что в месте контакта она будет оставаться неподвижной по отношению к шару, если даже остальная часть shaft перемещается по оси x с некоторой скоростью относительно шара.

В силу действия силы трения во время соударения, проекция скорости наклейки на ось x уменьшается с V_{x1} до V_{px} , в то время как скорость точки контакта на шаре возрастает до V_{px} . В силу этого, наклейка будет скользить по шару в течение всего соударения, если величина V_{px} будет намного превышать V_{px} . В этом случае μ будет представлять собой коэффициент трения скольжения. Однако, если $V_{px} < V_{px}$, соотношения (8) и (9) неприменимы, так как в какой-то момент контакта поверхности наклейки и шара перестают скользить друг относительно друга. Когда относительная скорость этих поверхностей падает до нуля, они сцепляются за счет статического трения. Экспериментальные данные, полученные при соударении кия со стеклянным блоком, показывают, что преимущественно этап сцепления наступает мгновенно – по-видимому, вследствие малой массы и упругости наклейки. Иными словами, контактирующая часть кожаной наклейки быстро останавливается по отношению к блоку, даже если при этом массивный shaft кия продолжает перемещаться.

При действии статического трения, зависимость между силами F и N нельзя выразить в простом виде. Д.Элкиатор [1] и Р.Шепард [5] представили простые модели для рассмотрения этого случая, полагая, что наклейка и шар сцеплены друг с другом в течение всего времени контакта, а также, что в конце соударения кий и шар имеют равную скорость в направлении, перпендикулярном продольной оси кия. Второе из этих предположений, по существу, основано на аппроксимации соударения в виде контакта жестких тел без учета упругости наклейки (*и гибкости кия; прим. пер.*). Учесть упругость наклейки можно посредством введения в рассмотрение тангенциального коэффициента восстановления e_x , определяемого как отношение относительной тангенциальной скорости после соударения и до него [8]. В рассматриваемом случае, этот коэффициент выражается следующим образом:

$$e_x = - (V_{px} - V_{px}) / V_{x1} = - (V_{x2} + h\omega \sin \theta - 3.5V_x) / V_{x1} . \quad (10)$$

Так же как и e_y , величину e_x проще всего определить с помощью опытов. Результаты экспериментов, полученные для различных соударений шаров на резке и разных поверхностях, показывают, что на фазе сцепления сила F обычно меняет направление своего действия. Типичное значение e_x при этом составляет примерно 0.2 [8-10]. В рассматриваемом же случае, перемены направления действия силы F не наблюдалось, по крайней мере – для кия, соударяющегося со стеклянным блоком. Из (2), (3) и (6) получим связь

$$h\omega = 3 [(M/m) V_y \cos \theta - (V_{x1} - V_{x2}) \sin \theta] . \quad (11)$$

Подстановка (2) и (11) в уравнение (10) дает

$$V_{x2} = [(A - e_x)V_{x1} - B] / (1 + A) , \quad (12)$$

где $A = 3 \sin^2 \theta + 3.5 m/M$; $B = 3 (M/m)V_y \sin \theta \cos \theta$, а V_y определяется через V_{y1} соотношением (5). Если в течение всего контакта наклейка скользит по шару, нужно применять соотношения (8) и (9). Уравнения же (11), (12) применимы для случая сцепления поверхностей.

Зависимости, полученные с помощью решения уравнений (2)–(12), представлены на рисунках 9–11. При расчетах были использованы значения параметров, соответствующие величинам из выше приведенных результатов натуральных экспериментов: $M = 0.12$ кг; $R = 25.17$ мм; $m = 0.19$ кг; $h = 0.47$ м; $e_y = 0.2$; $e_x = 0.6$; $\mu_k = 0.1$. Результаты расчетов, выполненных при $e_x = 0$ и $e_x = 0.3$, приведены для сравнения. Значение $e_y = 0.2$ было определено при измерении высоты отскока кия после вертикального падения на жесткую поверхность. Результаты расчетов со значением $\mu_k = 0.1$ приведены только для фазы чистого скольжения кия. Эти результаты очень хорошо согласуются с экспериментальными данными, полученными для кия, не обработанного мелом – по крайней мере, при $b > 6.3$ мм. При $\mu_k = 0.1$ и $b < 6.3$ мм наклейка сцепляется с шаром, в связи с чем расчеты при скольжении ограничены значением $b = 6.3$ мм. Альтернативное решение для фазы сцепления при $e_x = 0.6$ дает хорошее приближение к результатам эксперимента с намеленным кием и ударом, наносимым по полоске абразивной бумаги (P800), а также неплохо согласуется с измерениями, выполненными для наклейки без мела при $b < 6$ мм. Аналогичные хорошие приближения были получены при $e_x = 0.6 \pm 0.1$. Наблюдаемые величины угла сноса при малых величинах b несколько меньше тех значений, которые предсказываются теоретически. Лучшее совпадение можно получить расчетным путем, если уменьшить величины e_y и m , а также увеличить e_x . Однако, при больших значениях b хорошего приближения не получается, как и не удается расчетным путем достаточно точно предсказать величины угловой скорости шара и коэффициента трения.

6. Обсуждение

Неотъемлемые характеристики взаимодействия кия с бильярдным шаром хорошо описываются моделью, разработанной в разделе 5. Расчетная зависимость силы трения, действующей на шар, изображенная на рисунке 11, соответствует полученным экспериментальным данным (см. рисунок 5). Когда наклейка входит в сцепление с шаром, сила возрастает за счет статического трения. Вследствие этого, динамические последствия аналогичны тем, которые проявляются при надавливании кием на твердую плоскую поверхность под углом δ . Кий может поддерживаться в равновесии за счет статического трения, если $Tg \delta = F / N$. Ответная динамическая реакция в этом случае такова, что F возрастает при увеличении θ , причем при вращении кия F возрастает несколько медленнее. Направление результирующей силы, действующей на кий, не совпадает с его продольной осью, проходящей через центр масс, а несколько смещено в сторону. Это вынуждает кий поворачиваться. Если бы результирующая сила действовала вдоль оси кия, то: эффективный коэффициент трения был бы равен $Tg \delta$; кий не поворачивался бы в сторону; результирующая сила, действующая на шар, была направлена вперед по оси кия; угол сноса был бы равен нулю.

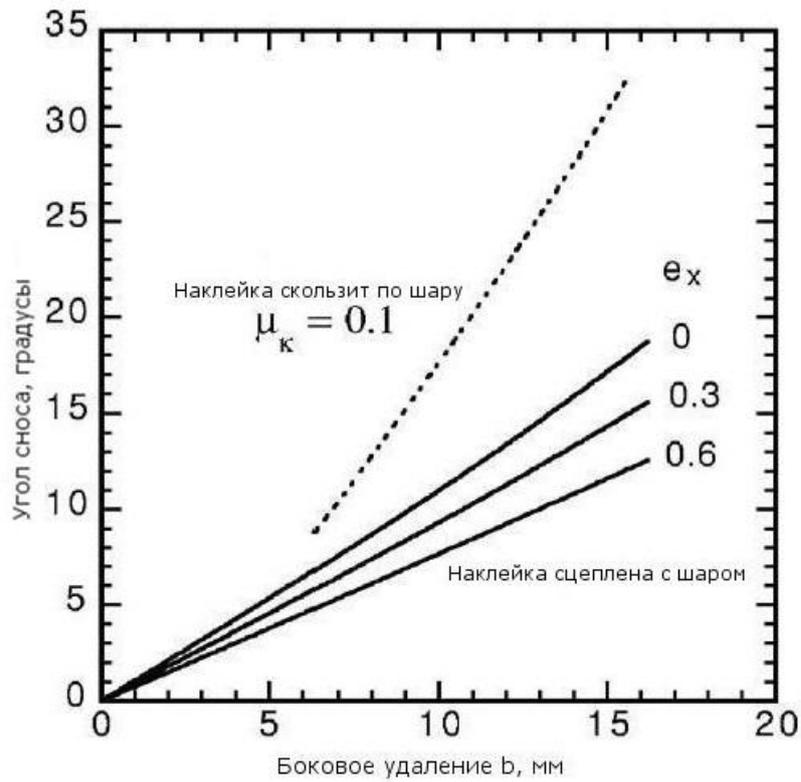


Рис.9. Зависимость угла сноса α от b , рассчитанная для наклейки без мела при $\mu_k = 0.1$ и для наклейки с мелом при $e_x = 0$, $e_x = 0.3$ и $e_x = 0.6$.

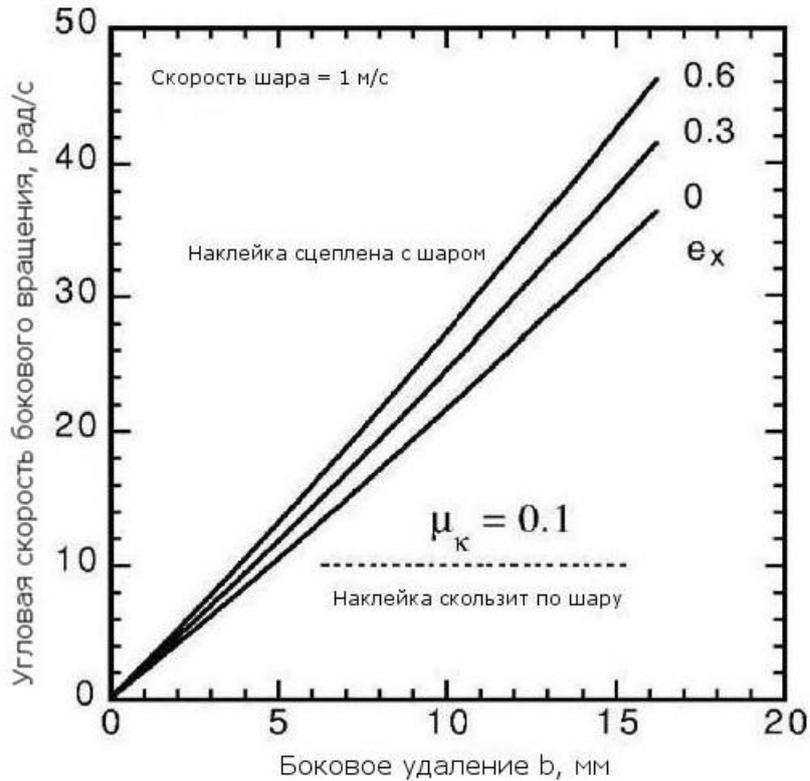


Рис.10. Пропорционально пересчитанная по отношению к поступательной скорости шара, равной 1 м/с, зависимость угловой скорости вращения от b , рассчитанная для наклейки без мела при $\mu_k = 0.1$ и для наклейки с мелом при $e_x = 0$, $e_x = 0.3$ и $e_x = 0.6$.

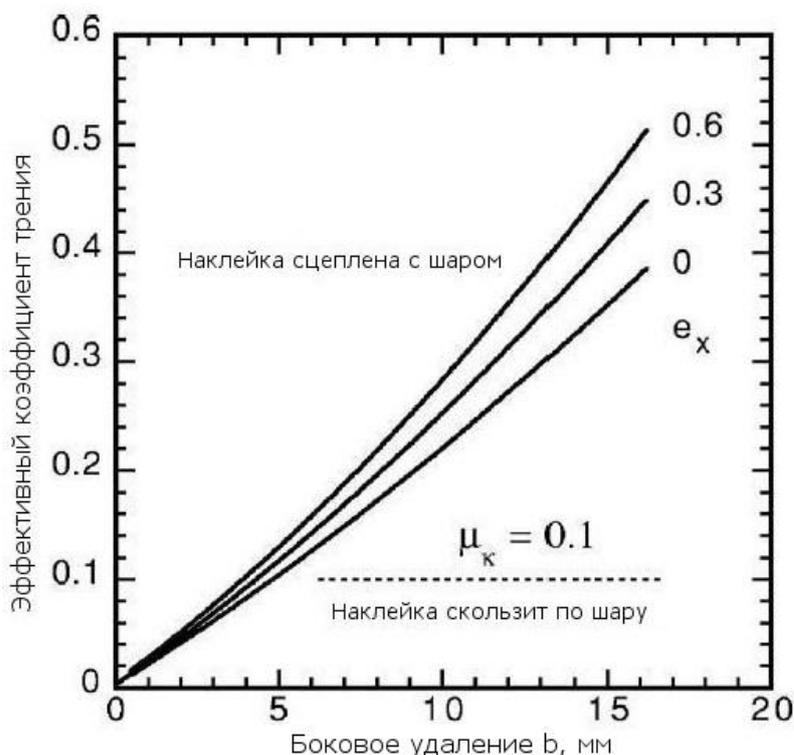


Рис. 11. Зависимость эффективного коэффициента трения, определяемого как $\int F dt / \int N dt = v_x/v_y$, от b , рассчитанная для наклейки без мела при $\mu_k = 0.1$ и для наклейки с мелом при $e_x = 0$, $e_x = 0.3$ и $e_x = 0.6$.

Весьма интересно то, что e_x принимает довольно большое значение. Это свидетельствует о том, что большая часть упругой энергии наклейки высвобождается из нее. В этом отношении, наклейка имеет свойства, сходные со свойствами супермяча, для которого величина e_x близка к 0.6. В отличие от этого, значения e_x для других сферических мячей, соударяющихся с жесткой поверхностью, примерно равны 0.2. Кожаная наклейка проявляет себя относительно незластичной – ведь было определено, что коэффициент восстановления кия в нормальном направлении составляет лишь около 0.2. Высокая упругость кия в тангенциальном направлении может частично проявляться в высокой гибкости и малых потерях энергии, свойственных окончанию деревянного shaft, к которому крепится наклейка.

На рисунке 12 изображено правдоподобное представление процесса взаимодействия между наклейкой и шаром, соответствующее как математической модели, так и опытным данным. В момент времени $t = 0$ – при начальном соприкосновении с неподвижным шаром – кожаная наклейка и shaft имеют определенную тангенциальную скорость. Пусть, для примера, она будет равна 0.4 м/с. Наклейка незамедлительно сцепляется с шаром, за счет чего они приобретают одинаковую скорость. Например, через одну миллисекунду они перемещаются с общей скоростью, составляющей примерно 0.3 м/с. В этот же момент времени, за счет поворота вокруг центра масс кия в направлении, противоположном ходу стрелки часов, передний конец shaft достигает скорости 0.6 м/с. Это согласуется с разработанной математической моделью, из которой следует, что нормальная сила влияет на увеличение вращающего момента несколько сильнее, чем сила трения. Ввиду того, что поверхность шара и кожаная наклейка перемещаются в тангенциальном направлении с меньшей скоростью, чем shaft, наклейка растягивается в этом направлении и вынуждает shaft немного согнуться. В [1] представлены фрагменты высокоскоростных

видеосъемок, по которым можно наблюдать процесс взаимодействия наклейки с шаром, аналогичный изображенному на рисунке 12.

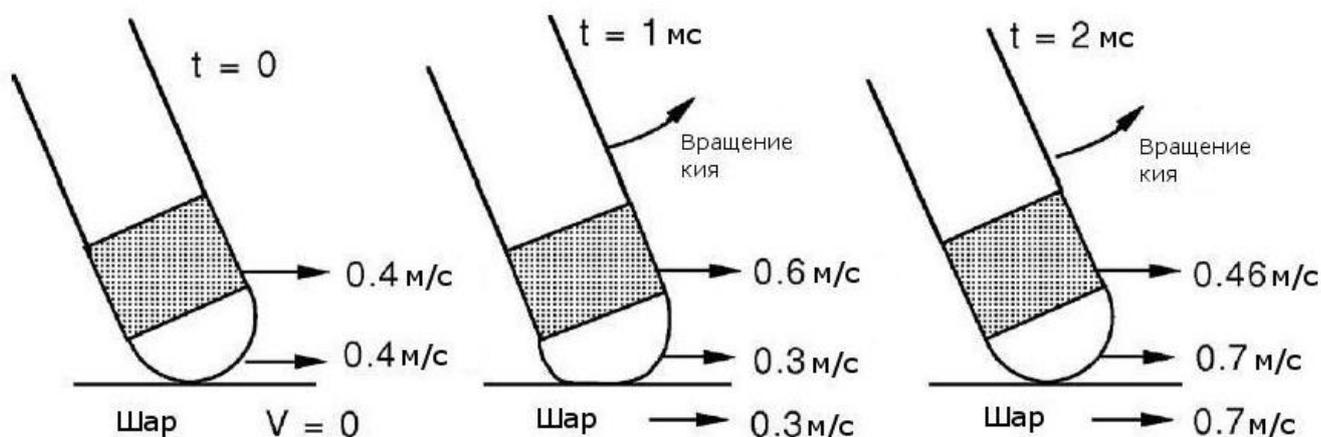


Рис. 12. Предполагаемое поведение наклейки и shaft. Представленные значения тангенциальных скоростей не являются расчетными. В первой половине периода соударения, за счет сцепления с шаром, наклейка замедляется в тангенциальном направлении, а shaft ускоряется – за счет поворота кия против хода стрелки часов. Во второй половине соударения из наклейки высвобождается энергия упругой деформации, ускоряющая шар и тормозящая кий.

Энергия упругой деформации кожаной наклейки и shaft, порожденная перемещением в тангенциальном направлении, высвобождается во второй половине соударения, в то время как величина нормальной силы возвращается к нулю. Нечто подобное происходит, когда человек щелкает пальцами: при соединении подушечек среднего и указательного пальцев аккумулируется энергия упругой деформации, которая затем высвобождается при движении пальцев под нажимом друг относительно друга. На рисунке 12 показано, что в конце соударения ($t = 2 \text{ мс}$) предполагаемая тангенциальная скорость шара и наклейки составляет 0.7 м/с , а скорость shaft – 0.46 м/с , что соответствует результатам наблюдений: $e_x = (0.7 - 0.46) / 0.4 = 0.6$.

Дополнительные подтверждения характера взаимодействия кия с шаром, изображенного на рисунке 12, были засвидетельствованы видеосъемкой со скоростью 100 кадров в секунду. На рисунке 13 условно изображены четыре кадра этой съемки: два из них предшествуют соударению, третий снят во время соударения, а четвертый – через 10 миллисекунд после его окончания. Согласно измерениям, полученным с помощью пьезоэлектрического дискового акселерометра, установленного в конце турняка, длительность соударения составляла 2.1 мс. Наклейка отклонялась немного влево, а шар – вправо на угол сноса, равный шести градусам. Основным интерес в рисунке 13 представляет то, что на протяжении десяти миллисекунд после соударения точка удара P на шаре перемещается в тангенциальном направлении значительно дальше, чем наклейка. Такой результат можно было бы получить искусственно, если представить, что после соприкосновения с шаром наклейка быстро затормозилась, «оттолкнувшись» от него. Но в нашем случае наклейка перемещалась вперед с почти постоянной скоростью, что подтверждается последующими кадрами. В связи с этим, в конце соударения наклейка перемещается назад по отношению к шару.

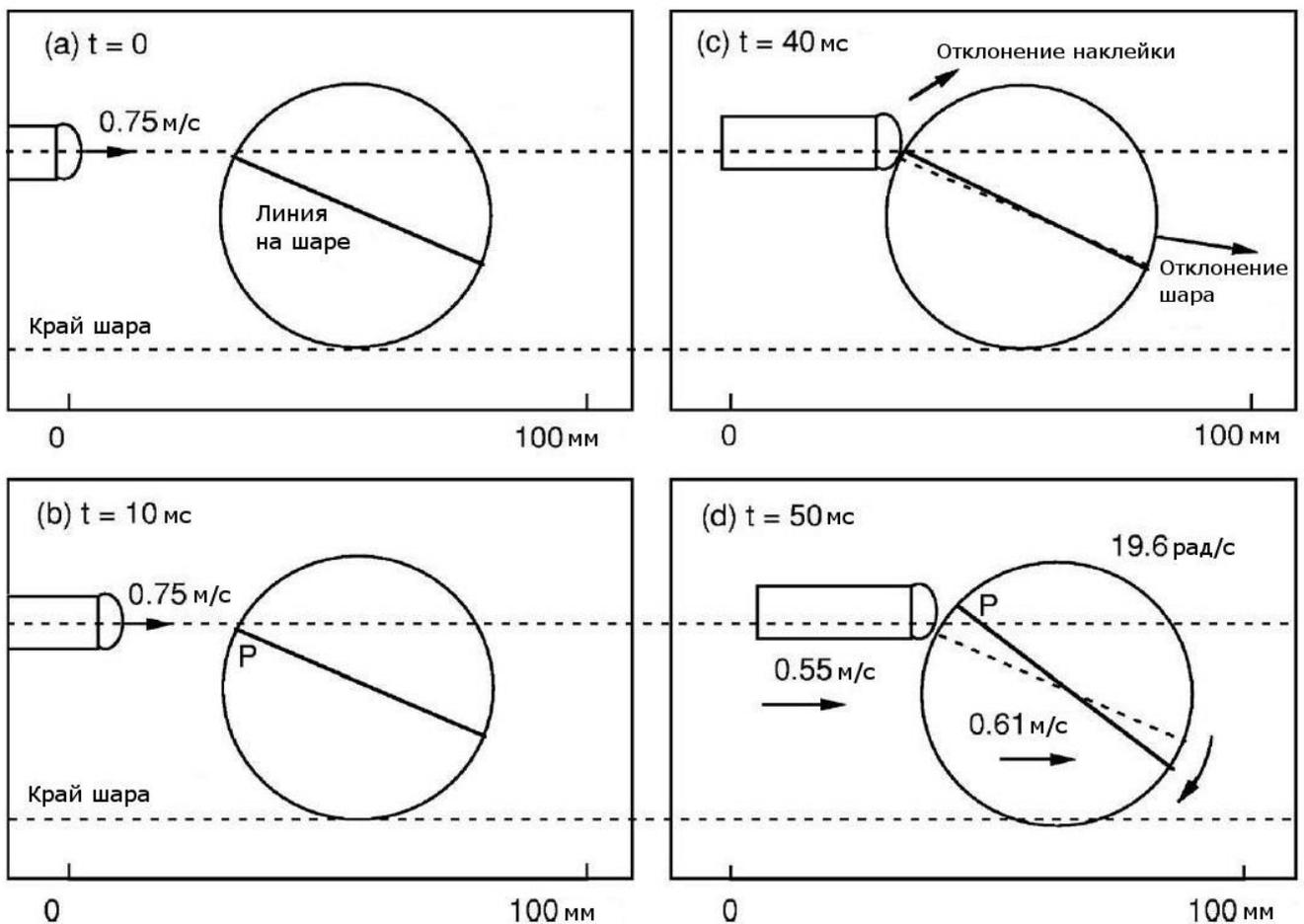


Рис.13. Вид сверху: соударение наклеенной наклейки с шаром, зафиксированное съемкой, выполненной со скоростью 100 кадров в секунду. Четыре прямоугольных рамки и две горизонтальные пунктирные линии определяют зафиксированные кадры и соответствующие положения шара и кия. Символом P обозначена точка удара, смещенная от центра на расстояние $b/R=0.4$. Между кадрами (b) и (d) шар повернулся на 11.2° , а за время контакта ($t=2$ мс) – на 1.2° .

7. Заключение

В работе показано, что соударение кия и бильярдного шара может быть хорошо описано моделью, в которой при малых боковых удалениях считается, что наклейка и шар сцеплены в течение всего времени контакта. Величина эффективного коэффициента трения, представляющего собой частное от деления интеграла от силы трения на интеграл от нормальной силы, равна значению коэффициента трения скольжения μ_k , если только на всем протяжении соударения кий скользит по поверхности шара. В иных случаях коэффициент трения меньше μ_k и зависит от удаления точки удара по отношению к центру шара. Если плоскость удара проходит через центр шара, коэффициент трения принимает нулевое значение. Угол отклонения шара от продольной оси кия (угол сноса; прим. пер) возрастает при увеличении бокового удаления точки удара, но при боковых отклонениях, меньших половины радиуса, не превышает восьми градусов. Модель соударения показывает, что угол сноса не зависит от μ_k при условии, что значение μ_k достаточно велико для того, чтобы наклейка сцепилась с шаром. Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что

упругость наклейки играет доминирующую роль в процессе соударения. Из полученных результатов следует, что с помощью киев, имеющих более тонкие shaftы, можно достигать меньших углов сноса. Этот результат вытекает скорее из большей гибкости таких киев, чем из их меньшей массы. Для того чтобы выяснить – почему некоторые кии порождают большие углы сноса, чем прочие, необходимы дальнейшие теоретические и экспериментальные исследования.

Благодарности

На выполнение представленной работы меня вдохновили теоретические исследования природы возникновения сноса в бильярде, проведенные Рэем Хигли (*Ray Higley*) и профессорами Дэвидом Элкиатором (*David Alciatore*) и Роном Шепардом (*Ron Shepard*).

Ссылки на первоисточники

1. D.G.Alciatore – The Illustrated Principles of Pool and Billiards (Sterling, New York, 2004). The relevant physics is described at (billiards.colostate.edu).
2. W.C.Marlow – The Physics of Pocket Billiards (MAST, Florida, 1995).
3. R.E.Wallace, M.C.Schroeder – Analysis of billiard ball collisions in two dimensions, Am. J. Phys. 56, 815-819 (1988), R.E.Wallace and M.C.Schroeder, Am. J. Phys. 57, 476-478 (1989).
4. See, for example: billiards.colostate.edu and sfbilliards.com/articles/BD-articles.html
5. R.Shepard – [Everything you always wanted to know about squirt, but were afraid to ask](http://sfbilliards.com/Shepard-squirt.pdf); sfbilliards.com/Shepard-squirt.pdf or (billiards.colostate.edu).
6. Lenox Softworks (lsw.com/videopoint).
7. W.J.Stronge – Impact Mechanics (Cambridge U.P., Cambridge, 2000).
8. R.Cross – Measurements of the horizontal coefficient of restitution for a superball and a tennis ball, Am. J. Phys. 70, 482-489 (2002).
9. R. Cross – Grip-slip behavior of a bouncing ball, Am. J. Phys. 70, 1093-1102 (2002).
10. R.Cross, A.Nathan – Experimental study of the gear effect in ball collisions, Am. J. Phys. 75, 658-664 (2007).