

**Дэвид Элсиэтор
(Доктор Дэйв)**

Влияние угла резки, скорости и вращения битка на отброс прицельного шара

David Alciatore (Dr. Dave)

TP A.14: The Effects of Cut Angle, Speed, and Spin on Object Ball Throw

В дополнение к «Иллюстрированным принципам Пула и Бильярда»

<http://billiards.colostate.edu>

Впервые размещено: 15 июля 2005

Последние изменения внесены: 06 декабря 2006

Исходная информация и иллюстрации находятся в разделах A.5, A.6 и A.8

([1], [2], [3])

Перевод: С.Тихонов, ноябрь 2013

Как в случае соударения шаров, при котором биток имеет продольное вращение (верхнее или нижнее), так и при наличии у битка бокового вращения (винта), скорость точки контакта (B) определяется соотношением:

$$\vec{v}_B = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/O} = v \hat{j} + (\omega_x \hat{i} + \omega_z \hat{k}) \times R(-\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}). \quad (1)$$

(Здесь \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} – единичные векторы, соответственно направленные по осям x , y , z прямоугольной системы координат, начало которой расположено в центре битка O , ось y направлена по вектору поступательной скорости битка, ось z направлена вертикально вверх, а ось x параллельна плоскости стола и дополняет $oxyz$ до правой системы координат; \vec{v}_B – вектор скорости точки контакта; v – поступательная скорость битка; $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости битка, имеющий в системе координат x , y , z компоненты ω_x , ω_y , ω_z ; \times – символ векторного произведения; $\vec{r}_{B/O}$ – радиус-вектор точки контакта, исходящий из центра битка; R – радиус шаров; ϕ – угол резки, то есть угол между вектором поступательной скорости битка и линией соприкосновения, проходящей через центры шаров в момент их контакта. Прим. пер.). Следовательно

$$\vec{v}_B = v_{B_x} \hat{i} + v_{B_y} \hat{j} + v_{B_z} \hat{k} = (-R\omega_z \cos \phi) \hat{i} + (v - R\omega_z \sin \phi) \hat{j} + (R\omega_x \cos \phi) \hat{k}. \quad (2)$$

(Здесь $v_{B_x}, v_{B_y}, v_{B_z}$ – проекции вектора \vec{v}_B на оси x, y, z , соответственно; прим. пер.). Выражение этого вектора через его тангенциальную и нормальную компоненты (а также через вертикальную; прим. пер.) приводит к следующей зависимости [1]:

$$\vec{v}_B = v_{B_t} \hat{t} + v_{B_n} \hat{n} + v_{B_z} \hat{k} = (v \sin \phi - R\omega_z) \hat{t} + (v \cos \phi) \hat{n} + (R\omega_x \cos \phi) \hat{k}. \quad (3)$$

(В (3) \hat{t}, \hat{n} – единичные векторы, исходящие из центра битка в положительных направлениях тангенциальной и нормальной линий, соответственно; нормальная линия совпадает с линией соприкосновения и направлена от битка в сторону прицельного шара, а тангенциальная линия дополняет прямоугольную систему координат $otnz$ до правой; иными словами, при взгляде сверху орт \hat{t} направлен вправо от нормальной линии; v_{B_t}, v_{B_n} – проекции вектора \vec{v}_B на тангенциальную и нормальную линии, соответственно. Прим. пер.). Так как нормальная компонента силы, возникающей при контакте шаров, не влияет на скольжение их поверхностей друг относительно друга, вектор относительной скорости скольжения битка и прицельного шара \vec{v}_{rel} в точке соударения может быть выражен как

$$\vec{v}_{rel} = v_{B_t} \hat{t} + v_{B_z} \hat{k}. \quad (4)$$

Сила трения, действующая на прицельный шар, направлена так же, как и вектор относительной скорости скольжения:

$$\hat{e}_\mu = \frac{\vec{v}_{rel}}{|\vec{v}_{rel}|} = \frac{v_{B_t} \hat{t} + v_{B_z} \hat{k}}{\sqrt{v_{B_t}^2 + v_{B_z}^2}} = \left(\frac{v_{B_t}}{\sqrt{v_{B_t}^2 + v_{B_z}^2}} \right) \hat{t} + \left(\frac{v_{B_z}}{\sqrt{v_{B_t}^2 + v_{B_z}^2}} \right) \hat{k} = e_{\mu_t} \hat{t} + e_{\mu_z} \hat{k}. \quad (5)$$

(Здесь \hat{e}_μ – единичный вектор, определяющий направление действия силы трения, приложенной к прицельному шару; e_{μ_t}, e_{μ_z} – тангенциальная и вертикальная компоненты вектора \hat{e}_μ , соответственно; прим. пер.). В предположении об абсолютной упругости соударения, из приведенного в [1] уравнения (8) следует, что величина нормальной составляющей импульса силы, возникающей при контакте шаров, выражается следующим образом:

$$\tilde{F}_n = mv \cos \phi. \quad (6)$$

(Здесь m – масса битка, равная массе прицельного шара; прим. пер.). Обращаясь к работе [2], а также используя равенства (3), (5) и основываясь на ограниченности силы трения, выразим максимально возможную величину импульса тангенциальной компоненты силы трения, вносящей вклад в отброс прицельного шара:

$$\tilde{F}_{t_{max}} = \mu \tilde{F}_n e_{\mu_t} = \frac{\mu mv \cos \phi (v \sin \phi - R\omega_z)}{\sqrt{(v \sin \phi - R\omega_z)^2 + (R\omega_x \cos \phi)^2}}. \quad (7)$$

(μ – коэффициент силы трения скольжения, действующей между шарами; прим. пер.). Другое ограничение на максимально возможную величину импульса силы трения вытекает из того, что относительное скольжение битка и прицельного шара во время контакта не может переменить своего направления. Величина относительной тангенциальной скорости между шарами сразу же после их контакта определяется следующим образом:

$$v_{rel} = (v_{CB_t} - \omega_{CB}R) - (v_{OB_t} + \omega_{OB}R), \quad (8)$$

где v_{CB_t} и v_{OB_t} – тангенциальные компоненты скоростей битка и прицельного шара после соударения, соответственно; ω_{CB} и ω_{OB} – угловые скорости вращений битка и прицельного шара после соударения, соответственно (имеются ввиду боковые вращения шаров, т.е. вращения вокруг вертикальной оси z ; прим. пер.). (Аббревиатура CB образована от английского словосочетания *Cue Ball* – биток, а OB – от словосочетания *Object Ball* – прицельный шар. Прим. пер.). В предельном случае величина v_{rel} во время контакта принимает нулевое значение (то есть, когда при соударении скольжение прекращается). (Речь идет о том, что при соблюдении некоторых условий контакт шаров при соударении принимает не скользящий, а сцепляющийся характер; прим. пер.). При этом прицельный шар после соударения может иметь максимальную тангенциальную скорость, определяемую соотношением

$$v_{OB_{tmax}} = v_{CB_t} - (\omega_{CB} + \omega_{OB})R. \quad (9)$$

Используя связь между импульсом силы и количеством движения, с помощью [1] выразим составляющие, входящие в (9):

$$v_{OB_{tmax}} = \frac{\tilde{F}_{tmax}}{m}, \quad (10)$$

$$v_{CB_t} = v \sin \phi - \frac{\tilde{F}_{tmax}}{m}, \quad (11)$$

$$\omega_{CB} = \omega_z + \frac{R\tilde{F}_{tmax}}{\left(\frac{2}{5}mR^2\right)} = \omega_z + \frac{5\tilde{F}_{tmax}}{2Rm}, \quad (12)$$

$$\omega_{OB} = \frac{5\tilde{F}_{tmax}}{2Rm}. \quad (13)$$

Подстановка (10) – (13) в уравнение (9) позволяет, с учетом кинематического ограничения на относительную скорость скольжения, получить выражение для определения максимально возможной величины тангенциальной компоненты импульса силы трения, в силу наличия которой происходит отброс прицельного шара:

$$\tilde{F}_{tmax} = \frac{m}{7} (v \sin \phi - R\omega_z). \quad (14)$$

С помощью уравнений (7) и (14) мы, наконец, можем определить тангенциальную компоненту скорости прицельного шара после контакта с битком, в зависимости от того, какое из ограничений (на величину силы трения или кинематическое) является более жестким для конкретных параметров соударения:

$$v_{OB_t} = \frac{\tilde{F}_t}{m} = \min \left\{ \frac{\mu v \cos \phi}{\sqrt{(v \sin \phi - R\omega_z)^2 + (R\omega_x \cos \phi)^2}} \right\} (v \sin \phi - R\omega_z) . \quad (15)$$

Нормальную компоненту скорости прицельного шара после соударения можно найти из (6):

$$v_{OB_n} = \frac{\tilde{F}_n}{m} = v \cos \phi . \quad (16)$$

С помощью величин v_{OB_t} и v_{OB_n} , определяемых согласно (15) и (16), теперь можно определить и угол отброса прицельного шара:

$$\theta_{OB} = \arctg \left(\frac{v_{OB_t}}{v_{OB_n}} \right) . \quad (17)$$

Типичные значения параметров, входящих в представленные выше формулы:

μ : = 0.06 – средняя величина коэффициента трения между шарами;

R : = 1.125 дюйма = 0.029 м – радиус шара;

v : = 3 мили / час = 1.341 м / с – средняя поступательная скорость битка;

ω_{roll} : = v / R – угловая скорость естественного качения.

Типичные поступательные скорости битка:

v_{slow} : = 1 миля / час = 0.447 м / с – скорость медленного перемещения;

v_{medium} : = 3 мили / час = 1.341 м / с – средняя скорость;

v_{fast} : = 7 миль / час = 3.129 м / с – скорость быстрого перемещения.

Модель трения, основанная на данных Вэйлэнда Марлоу (*Wayland Marlow*) [4] (таблица 10 на странице 245):

v_{d_1} : = $0.1 \cdot \sin 45^\circ$; μ_{d_1} : = 0.11 ;

v_{d_2} : = $1 \cdot \sin 45^\circ$; μ_{d_2} : = 0.06 ;

v_{d_3} : = $10 \cdot \sin 45^\circ$; μ_{d_3} : = 0.01 .

(0.1 м / с, 1 м / с, 10 м / с – величины поступательных скоростей битка в трех опытах, проведенных В.Марлоу; v_{d_1} , v_{d_2} , v_{d_3} – тангенциальные составляющие поступательных скоростей; μ_{d_1} , μ_{d_2} , μ_{d_3} – полученные в результате опытов величины коэффициента силы трения; нижние индексы 1, 2 и 3 соответствуют номерам проведенных опытов, а индекс d, по-видимому, является сокращением от английского слова *data* - данные. Прим. пер.). Следует обратить внимание на то, что величины поступательных скоростей из опытов В.Марлоу умножены на синус 45° , чтобы выразить компоненты относительной тангенциальной скорости (в экспериментах В.Марлоу соударение шаров происходило при угле резки, равном 45°).

Представляется, что зависимость коэффициента трения от скорости имеет вид (или предположим, что это так) (конечно же, указанная зависимость может быть представлена не в экспоненциальном виде, как это сделал Доктор Дэйв, а иначе; но это – выбор автора; прим. пер.):

$$\mu(v) = a + b \cdot e^{-cV} .$$

(Здесь v – тангенциальная скорость битка; e – основание натурального логарифма; a , b , c – постоянные коэффициенты, подлежащие определению по результатам проведенных экспериментов. Прим. пер.). Коэффициенты a , b , c можно найти, решая (численно; прим. пер.) следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \mu_{d_1} = a + b \cdot e^{-cv_{d_1}}, \\ \mu_{d_2} = a + b \cdot e^{-cv_{d_2}}, \\ \mu_{d_3} = a + b \cdot e^{-cv_{d_3}}. \end{cases}$$

При этом в качестве начального приближения можно принять такие значения искоемых коэффициентов:

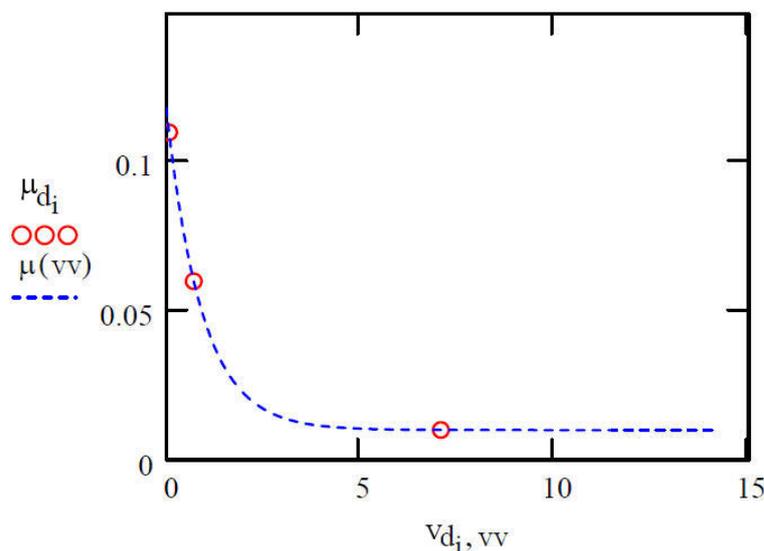
$$a := \mu_{d_3} = 0.01; b := \mu_{d_1} - \mu_{d_3} = 0.1; c := -\frac{1}{v_{d_2}} \ln \left(\frac{\mu_{d_2} - a}{b} \right) = 0.98.$$

(На мой взгляд, гораздо проще было бы не находить численное решение системы из трех трансцендентных уравнений, а последовательно выразить коэффициенты друг через друга и свести численное решение к поиску корня единственного нелинейного уравнения с одним неизвестным. Во всяком случае, именно так я и поступил при проверке представленного автором численного решения. Важно, что при этом вообще не понадобились значения начальных приближений отыскиваемых коэффициентов. Прим. пер.). Решение системы таково:

$$a = 0.009950883 \approx 0.009951; b = 0.10805313 \approx 0.108; c = 1.08840449186019 \approx 1.088.$$

График теоретической зависимости $\mu(v)$ с отмеченными точками, полученными экспериментально

$$i := 1, 2, 3 \quad vv := 0, 0.01 \dots 2v_{d_3}$$



Ниже приведенные результаты расчетов получены и графически отображены с помощью системы компьютерной алгебры MathCAD. При этом, с учетом выше приведенной модели трения, соотношения (15) – (17) были представлены в следующем виде:

$$v_{rel}(v, \omega_x, \omega_z, \phi) := \sqrt{(v \sin \phi - R\omega_z)^2 + (R\omega_x \cos \phi)^2},$$

$$\theta_{\text{throw}}(v, \omega_x, \omega_z, \phi) := \arctg \left[\frac{\min \left\{ \frac{\mu(v_{\text{rel}}(v, \omega_x, \omega_z, \phi)) v \cos \phi}{v_{\text{rel}}(v, \omega_x, \omega_z, \phi)}, \frac{1}{7} \right\} (v \sin \phi - R \omega_z)}{v \cos \phi} \right].$$

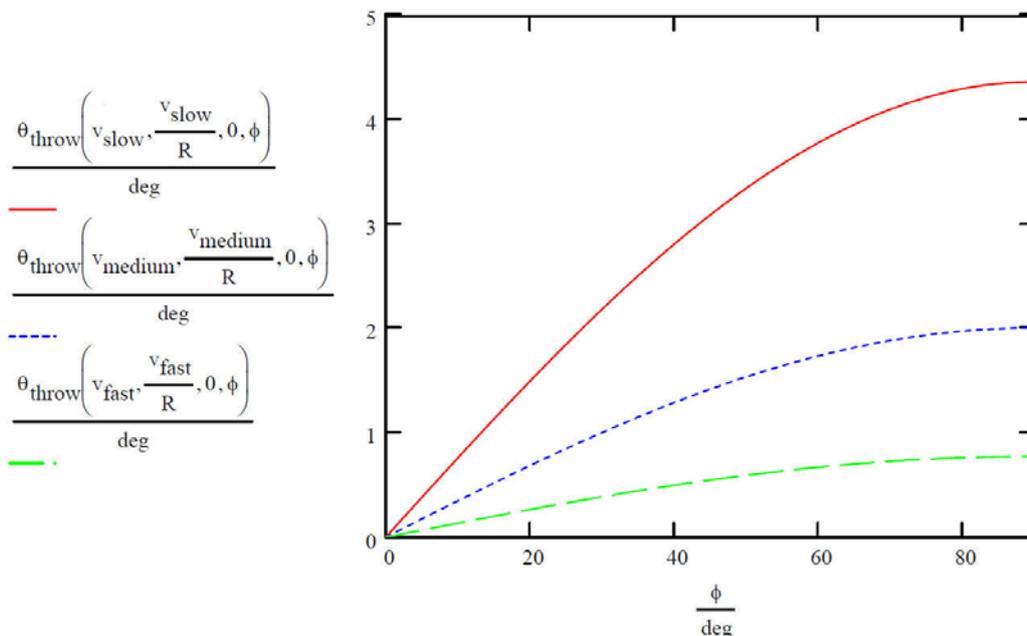
Эти два уравнения характеризуют все аспекты эффекта отброса прицельного шара (см. представленные ниже графики)!

Зависимости угла отброса прицельного шара, произошедшего вследствие соударения, от угла резки, рассчитанные для различных скоростей естественно катящегося битка

(Пользуясь термином «Отброс вследствие соударения» автор подразумевает то, что отброс прицельного шара происходит вследствие соударения шаров, произошедшего при ненулевом угле резки. Видимо, этот термин ввел Рон Шепард (Ron Shepard) в своей широко известной теоретической работе. Прим. пер.).

$$\phi := 0 \text{ deg}, 1 \text{ deg} \dots 90 \text{ deg}$$

(Использованное здесь и далее сокращение deg происходит от английского слова Degrees и означает «градусы». Прим. пер.).

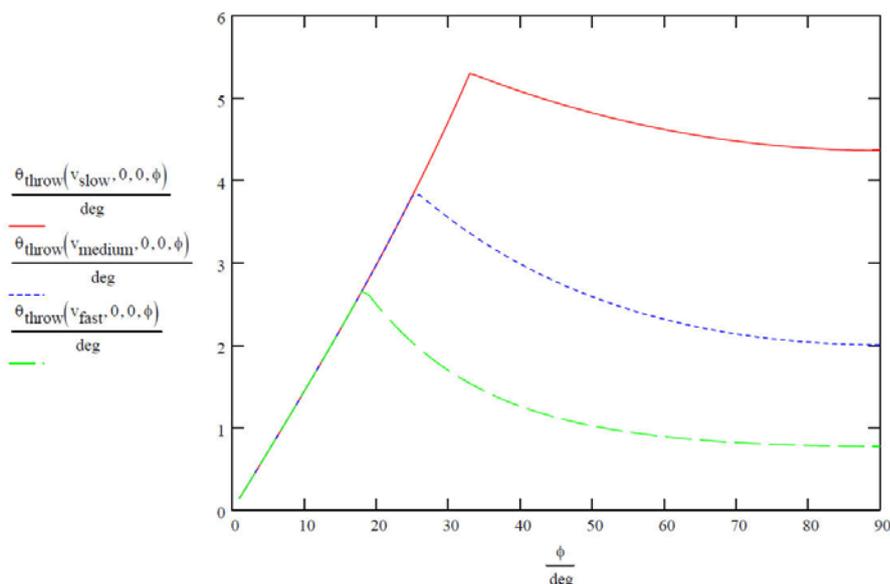


РЕЗЮМЕ: В большинстве случаев отброс прицельного шара является следствием соударения, произошедшего при малых скоростях битка. Величина угла отброса возрастает с увеличением ϕ , но выравнивается на тонких резках.

Зависимости угла отброса прицельного шара, произошедшего вследствие соударения, от угла резки, рассчитанные для различных скоростей битка при плоском соударении шаров

(Соударение является плоским, когда при контакте с прицельным шаром биток не обладает продольным (верхним или нижним) и боковым вращениями. Помимо этого, выделяют еще и частично плоское соударение, при котором биток не имеет продольного вращения, но обладает винтом. Прим. пер.).

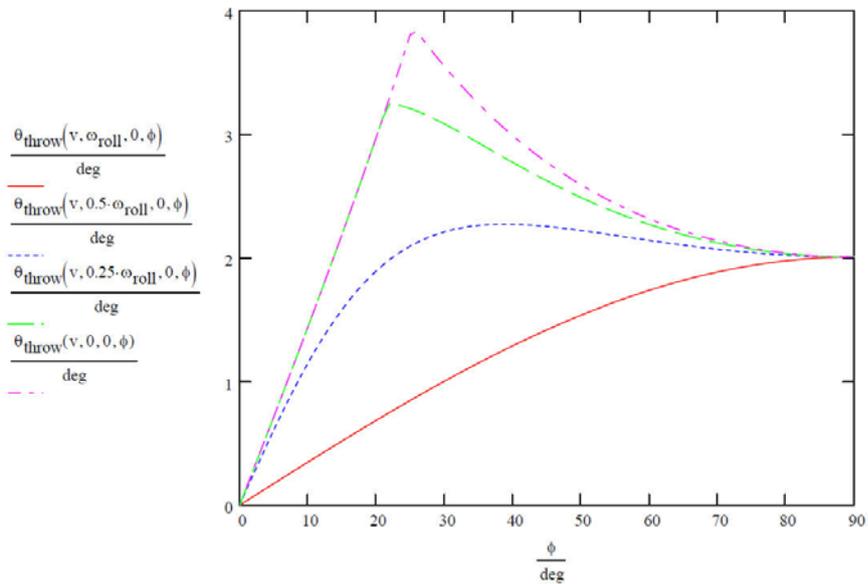
$\phi := 0 \text{ deg}, 1 \text{ deg} \dots 90 \text{ deg}$



Эти зависимости можно сравнить с экспериментальными данными, полученными Бобом Джуиттом (*Bob Jewett*) и [открыто размещенными в Интернете](#), а также с данными, представленными в моей учебной статье, датированной сентябрем 2006 года. Теоретические зависимости и результаты экспериментов очень хорошо согласуются между собой как качественно, так и количественно.

РЕЗЮМЕ: При малых углах резки величина угла отброса прицельного шара не зависит от скорости битка. Отброс максимален при соударениях, близких к резке в половину шара (при углах резки в районе тридцати градусов). При более тонких резках отброс проявляется значительней при меньших скоростях битка.

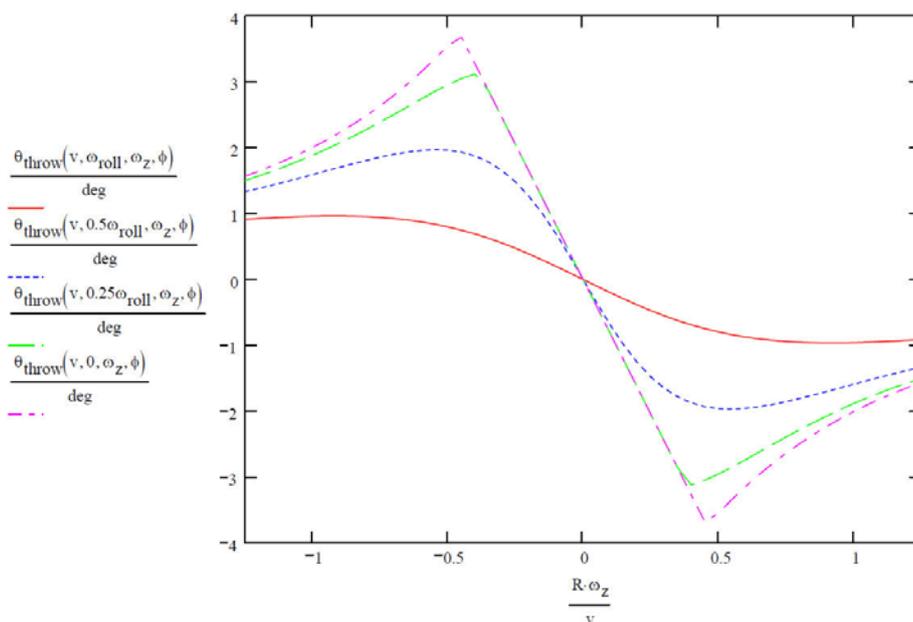
Зависимости угла отброса прицельного шара, произошедшего вследствие соударения, от угла резки, рассчитанные при различных угловых скоростях верхнего (или нижнего) вращения битка в сравнении с плоским соударением шаров



РЕЗЮМЕ: Отброс прицельного шара наиболее сильно появляется при плоских соударениях на резке, близкой к половине шара.

Зависимости угла отброса прицельного шара, обусловленного вращением, для соударений в лоб (при нулевом угле резки), рассчитанные при различных угловых скоростях верхнего (или нижнего) и бокового вращения битка

$\phi := 0^\circ; \omega_z := -1.25 \omega_{roll}, -1.2 \omega_{roll} \dots 1.25 \omega_{roll}$ (см. [5])



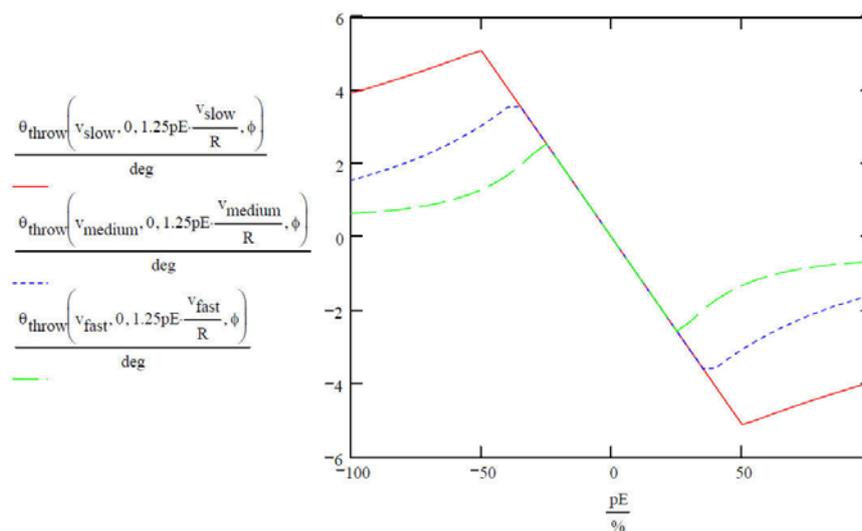
Эти графики аналогичны графикам, приведенным в работе Рона Шепарда (Ron Shepard) «Amateur Physics for the Amateur Pool Player», 3rd edition, 1997 (рисунок 4.4 на странице 42). Однако, здесь использована более точная модель динамики и кинематики соударения, учитывающая действующее трение.

РЕЗЮМЕ: Эффект отброса прицельного шара, обусловленного вращением, проявляется сильнее и более чувствителен к изменению бокового вращения для частично плоских соударений при средних интенсивностях винта.

Зависимости угла отброса прицельного шара, обусловленного вращением, для частично плоских соударений в лоб (при нулевом угле резки), рассчитанные при различных поступательных скоростях и глубинах винта битка

$$\begin{aligned} \phi &:= 0^\circ; & pE &:= -100\%, -95\% \dots 100\%; \\ \omega_z &= \text{SRF} \cdot \frac{V}{R}; & \text{SRF} &= 1,25pE. \text{ (см. [5], [6])} \end{aligned}$$

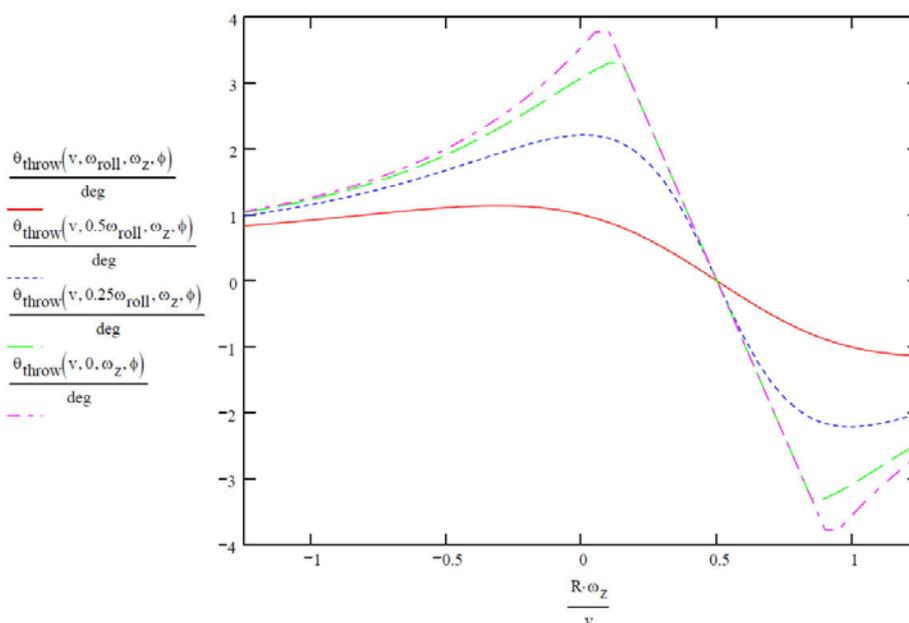
(Аббревиатура pE – сокращение от английского словосочетания *Percentage English*. По сути, pE представляет собой глубину винта, приданного битку при ударе кием. pE равняется выраженному в процентах отношению бокового смещения точки удара (по отношению к вертикальной плоскости, проходящей через центр битка) к смещению, равному половине радиуса шара. Положительные величины pE соответствуют так называемым внешним винтам, а отрицательные – внутренним. Для внешних винтов, которые в России обычно называют прямыми, боковое смещение точки удара от видимого центра битка направлено в ту же сторону, что и смещение точки соударения шаров относительно видимого игроку центра прицельного шара. Для внутренних винтов, чаще именуемых в России «обратными», направление бокового смещения точки удара противоположно видимому смещению точки соударения шаров. Для соударений при нулевом угле резки, которые здесь и рассматриваются, внешним называется правый винт, а внутренним – левый. Аббревиатура SRF – сокращение от английского словосочетания *Spin Rate Factor*. SRF – показатель скорости бокового вращения, равный отношению угловой скорости бокового вращения, приданного при ударе битку, к угловой скорости псевдо-натурального винта, соответствующей боковому смещению точки удара, равному двум пятым радиуса шара. Так же, как и pE , SRF выражается в процентах. Прим. пер.).



РЕЗЮМЕ: Отброс прицельного шара, обусловленный вращением, при малых глубинах винта не зависит от поступательной скорости битка. Отброс максимален при слабых ударах, наносимых с глубиной винта, составляющей примерно 50%. Дальнейшее увеличение глубины винта (по абсолютной величине – более 50%) не приводит к увеличению отброса.

Зависимости угла отброса прицельного шара, обусловленного соударением и вращением, для соударений в половину шара (при угле резки, равном 30°), рассчитанные при различных угловых скоростях верхнего (или нижнего) и бокового вращения битка

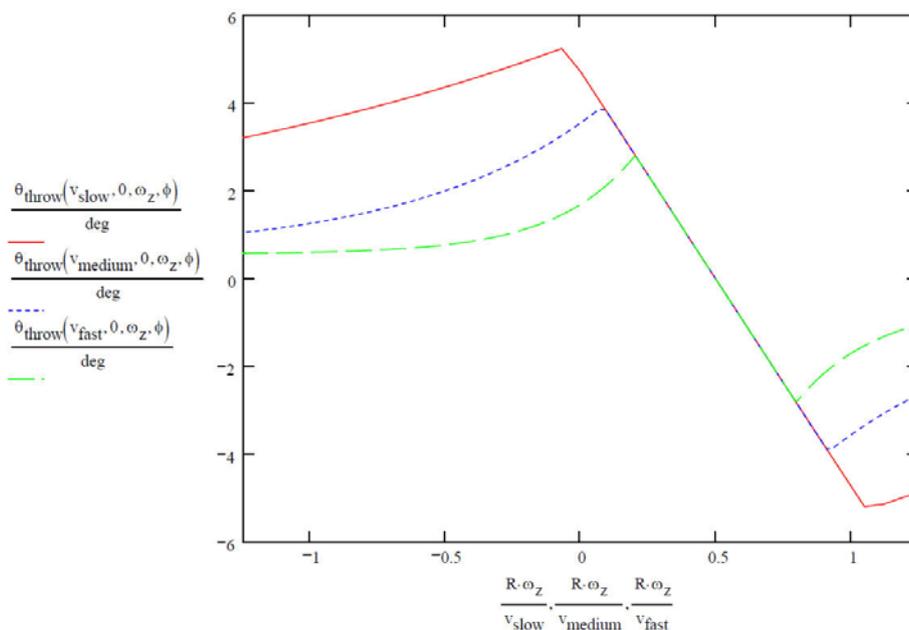
$$\phi := 30^\circ; \quad \omega_z := -1.25 \omega_{\text{roll}}, -1.2 \omega_{\text{roll}} \dots 1.25 \omega_{\text{roll}} \text{ (см. [5])}$$



РЕЗЮМЕ: При соударении в половину шара отброс максимален (по абсолютной величине) для плоских соударений и частично плоских соударений, произошедших при глубине внешнего винта 50%. При наличии внешнего винта с показателем скорости бокового вращения SRF, равным 0.5, отброс отсутствует.

Зависимости угла отброса прицельного шара, обусловленного соударением и вращением, для частично плоских соударений в половину шара (при угле резки, равном 30°), рассчитанные при различных поступательных скоростях и угловых скоростях бокового вращения битка

$$\phi := 30^\circ; \quad \omega_{\text{roll}} := \frac{V}{R}; \quad \omega_z := -1.25 \omega_{\text{roll}}, -1.2 \omega_{\text{roll}} \dots 1.25 \omega_{\text{roll}} \text{ (см. [5])}$$



РЕЗЮМЕ: При частично плоском соударении в половину шара углы отброса прицельного шара принимают наибольшие положительные значения при слабых боковых вращениях и отсутствии винта у битка, а наибольшие по абсолютной величине отрицательные значения – при сильных внешних винтах. Величина угла отброса наиболее чувствительна к изменению интенсивности бокового вращения при внешних винтах, приводящих к нулевым или близким к ним углам отброса.

Зависимости отброса прицельного шара от угла резки, рассчитанные при качении битка с малой поступательной скоростью и различными типичными боковыми вращениями

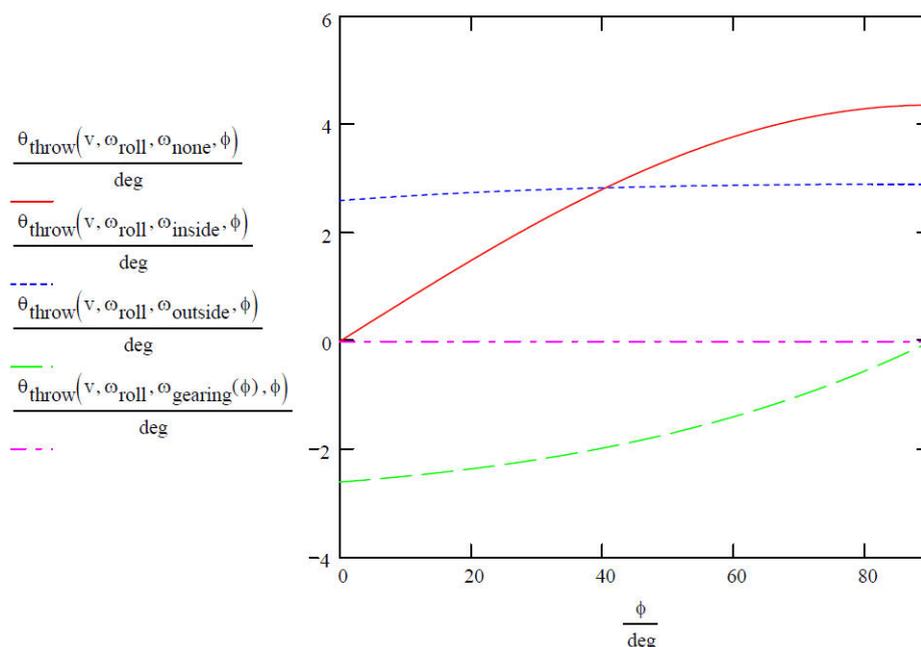
$$\phi := 0 \text{ deg}, 1 \text{ deg} \dots 90 \text{ deg};$$

$$V := V_{\text{slow}}; \quad \omega_{\text{roll}} := \frac{V}{R};$$

$$\omega_{\text{none}} := 0; \quad \omega_{\text{inside}} := -\omega_{\text{roll}}; \quad \omega_{\text{outside}} := \omega_{\text{roll}}; \quad \omega_{\text{gearing}}(\phi) := \frac{v \sin \phi}{R}.$$

(Угловая скорость бокового вращения ω_{gearing} приводит к соударению, при котором относительная скорость бокового перемещения поверхностей шаров в точке их контакта равна нулю. При таком контакте между шарами не возникает трения,

действующего в горизонтальном направлении, что приводит к отсутствию отброса прицельного шара. Прим. пер.).



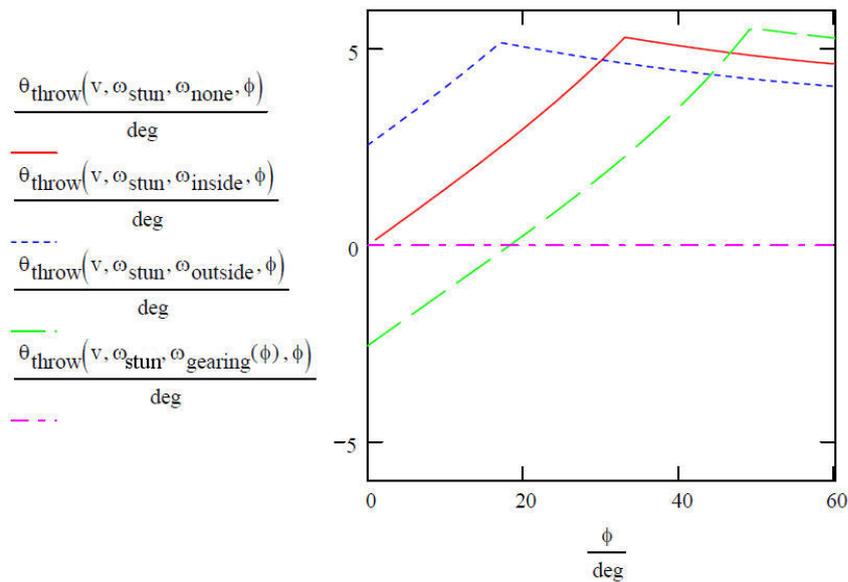
Эти графики согласуются с графиками 6–15, представленными на странице 74 работы Джека Кёлера (*Jack H. Koehler*) «The Science of Pocket Billiards», 1989.

РЕЗЮМЕ: Применение внутреннего винта при малых углах резки приводит к увеличению отброса. Использование внешнего винта изменяет направление отброса прицельного шара, причем максимальный эффект отброса так же проявляется при малых резках. В случаях, когда битку придана угловая скорость внешнего винта ω_{gearing} , отброс прицельного шара отсутствует.

Зависимости отброса прицельного шара от угла резки, рассчитанные при плоском и частично плоском соударении с малой поступательной скоростью битка, обладающего различными типичными винтами глубиной 25%

$$v := v_{\text{slow}}; \quad \omega_{\text{roll}} := \frac{v}{R}; \quad \omega_{\text{stun}} := 0; \quad \text{SRF} := \frac{5}{4} \cdot 25\%;$$

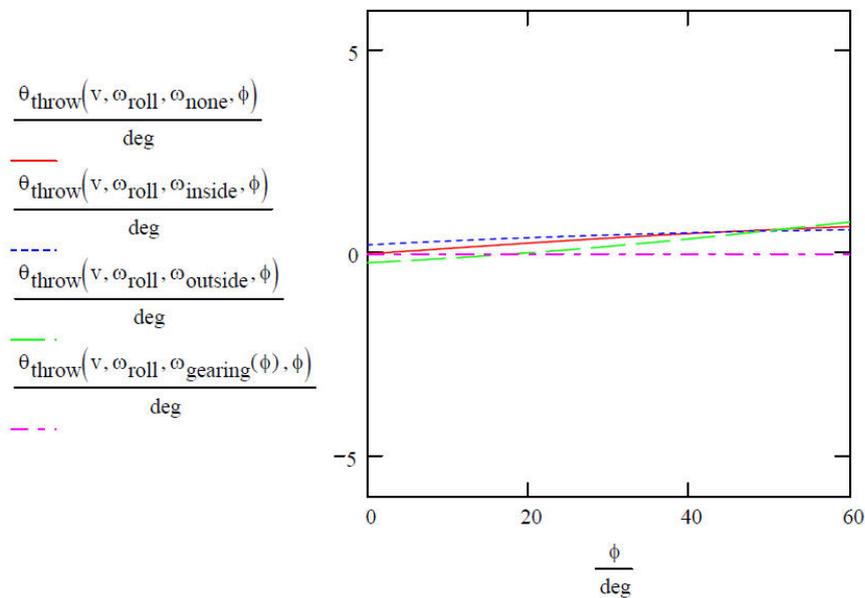
$$\omega_{\text{none}} := 0; \quad \omega_{\text{inside}} := -\text{SRF} \omega_{\text{roll}}; \quad \omega_{\text{outside}} := \text{SRF} \omega_{\text{roll}}; \quad \omega_{\text{gearing}}(\phi) := \frac{v \sin \phi}{R}.$$



Зависимости отброса прицельного шара от угла резки, рассчитанные при качении битка с большой поступательной скоростью и различными типичными винтами глубиной 25%

$$v := v_{\text{fast}}; \quad \omega_{\text{roll}} := \frac{v}{R}; \quad ; \quad \text{SRF} := \frac{5}{4} \cdot 25\%;$$

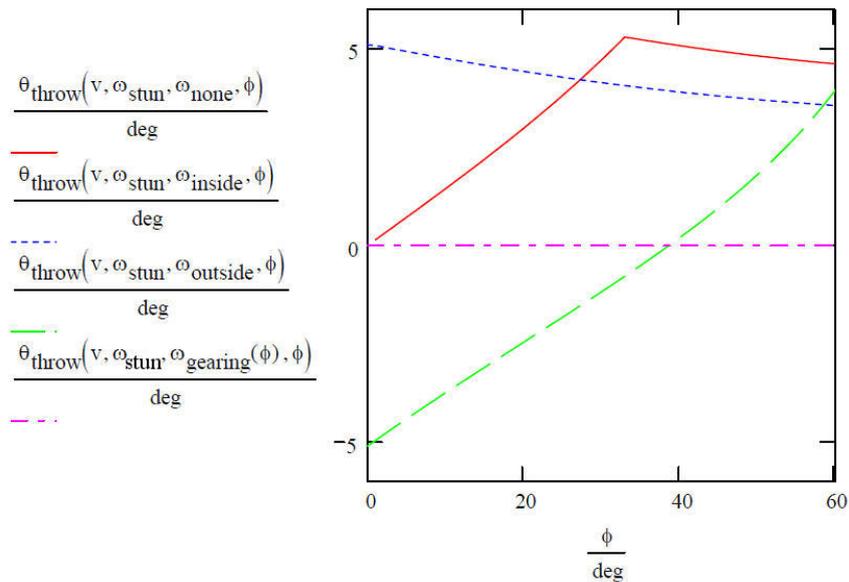
$$\omega_{\text{none}} := 0; \quad \omega_{\text{inside}} := -\text{SRF} \omega_{\text{roll}}; \quad \omega_{\text{outside}} := \text{SRF} \omega_{\text{roll}}; \quad \omega_{\text{gearing}}(\phi) := \frac{v \sin \phi}{R}.$$



Зависимости отброса прицельного шара от угла резки, рассчитанные при плоском и частично плоском соударении с малой поступательной скоростью битка, обладающего различными типичными винтами глубиной 50%

$$v := v_{\text{slow}}; \quad \omega_{\text{roll}} := \frac{v}{R}; \quad \omega_{\text{stun}} := 0; \quad \text{SRF} := \frac{5}{4} \cdot 50\%;$$

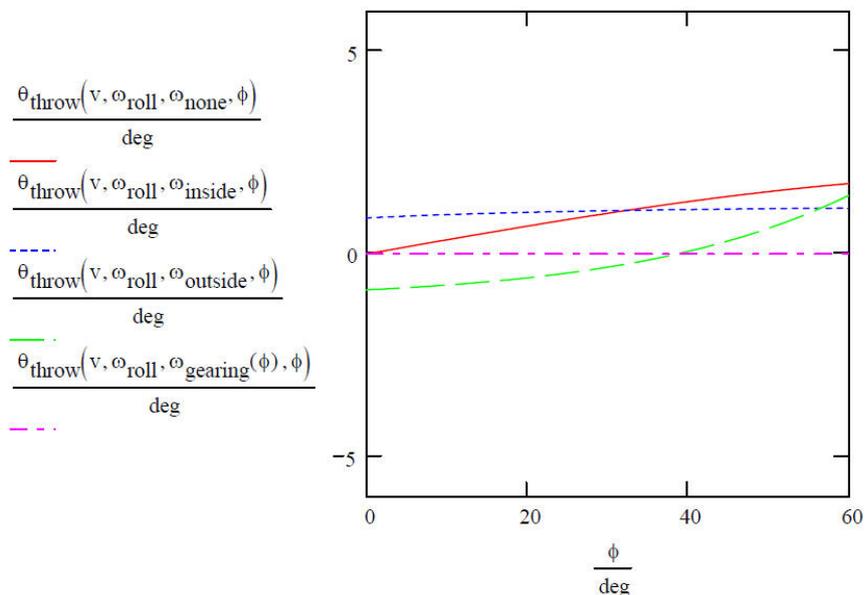
$$\omega_{\text{none}} := 0; \quad \omega_{\text{inside}} := -\text{SRF} \omega_{\text{roll}}; \quad \omega_{\text{outside}} := \text{SRF} \omega_{\text{roll}}; \quad \omega_{\text{gearing}}(\phi) := \frac{v \sin \phi}{R}.$$



Зависимости отброса прицельного шара от угла резки, рассчитанные при качении битка со средней поступательной скоростью, обладающего различными типичными винтами глубиной 50%

$$v := v_{\text{medium}}; \quad \omega_{\text{roll}} := \frac{v}{R}; \quad \text{SRF} := \frac{5}{4} \cdot 50\%;$$

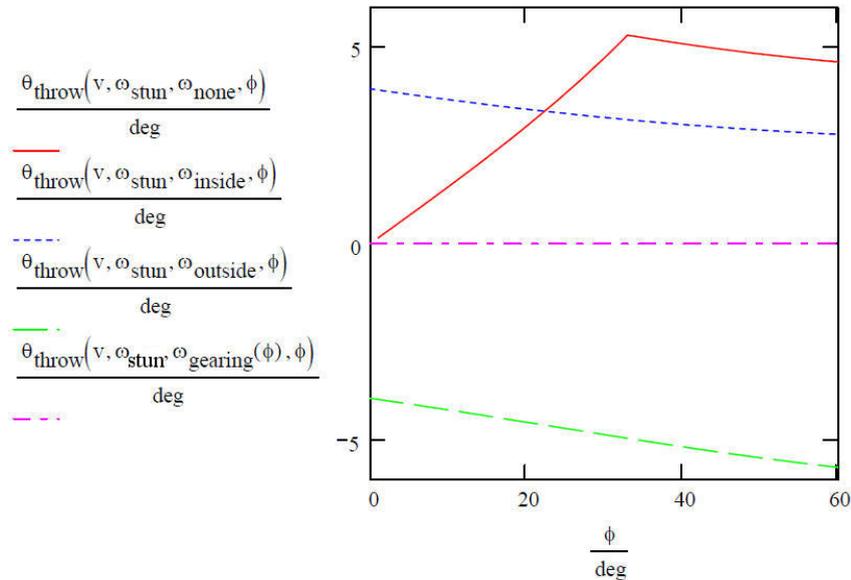
$$\omega_{\text{none}} := 0; \quad \omega_{\text{inside}} := -\text{SRF} \omega_{\text{roll}}; \quad \omega_{\text{outside}} := \text{SRF} \omega_{\text{roll}}; \quad \omega_{\text{gearing}}(\phi) := \frac{v \sin \phi}{R}.$$



Зависимости отброса прицельного шара от угла резки, рассчитанные при плоском и частично плоском соударении со средней поступательной скоростью битка, обладающего различными типичными винтами глубиной 100%

$$V := V_{\text{medium}}; \quad \omega_{\text{roll}} := \frac{V}{R}; \quad \omega_{\text{stun}} := 0; \quad \text{SRF} := \frac{5}{4} \cdot 100\%;$$

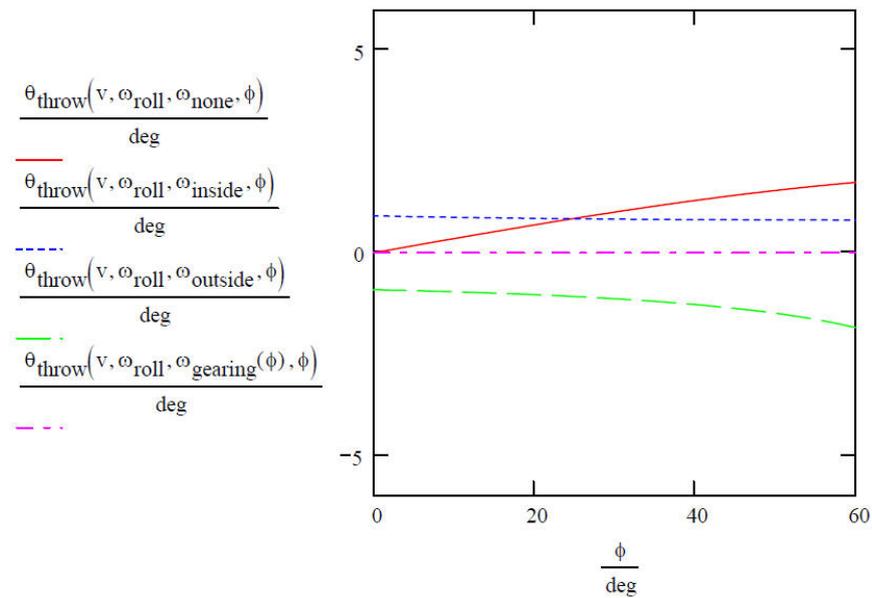
$$\omega_{\text{none}} := 0; \quad \omega_{\text{inside}} := -\text{SRF} \omega_{\text{roll}}; \quad \omega_{\text{outside}} := \text{SRF} \omega_{\text{roll}}; \quad \omega_{\text{gearing}}(\phi) := \frac{v \sin \phi}{R}.$$



Зависимости отброса прицельного шара от угла резки, рассчитанные при качении битка со средней поступательной скоростью и с различными типичными винтами глубиной 100%

$$V := V_{\text{medium}}; \quad \omega_{\text{roll}} := \frac{V}{R}; \quad \text{SRF} := \frac{5}{4} \cdot 100\%;$$

$$\omega_{\text{none}} := 0; \quad \omega_{\text{inside}} := -\text{SRF} \omega_{\text{roll}}; \quad \omega_{\text{outside}} := \text{SRF} \omega_{\text{roll}}; \quad \omega_{\text{gearing}}(\phi) := \frac{v \sin \phi}{R}.$$



Ссылки на источники

1. TP A.5. The effects of ball inelasticity and friction on the 90° rule.
2. TP A.6. The effects of ball inelasticity and friction on the 30° rule.
3. TP A.8. The effects of English on the 30° rule.
4. Marlow W.C. – The Physics of Pocket Billiards, MAST, Palm Beach Gardens, Fla., 1995.
5. TP A.12. The relationship between cue ball spin and cue tip offset.
6. TP A.25. The relationship between spin-rate-factor and percent-English.