

Инхван Хан

Динамика в Карамболе и Трехбортном Бильярде

Inhwan Han

*Department of Mechano-Informatics & Design Engineering,
Hongik University, Jochiwon, Choongnam 339-701, Korea*

Dynamics in Carom and Three Cushion Billiards 2005

Перевод: С.Тихонов, октябрь 2013

В работе представлен анализ результатов динамики бильярдной игры, полученных в рамках механики твердого тела и с помощью расчетной моделирующей программы. Учтено проявление трения между шаром и поверхностью стола, а также между шаром и бильярдным бортом. Рассмотрены три различных динамические ситуации при перемещении шаров по столу: движение шара по сукну; соударение шаров; соударение шара с бортом. Для разработки моделирующей программы были детально проанализированы задачи динамики, связанные с движением при наличии вращения и контактом при трехмерном воздействии трения. Теоретические выкладки были реализованы программно, и их эффективность была продемонстрирована графически при сравнении с экспериментальными данными. Конечные результаты исследования были количественно и качественно проверены с помощью съемок высокоскоростной видеокамерой. При проведении экспериментов было обнаружено, что такие физические параметры, как коэффициенты восстановления и трения, зависят от параметров движения и соответствуют разработанным эмпирическим зависимостям. Экспериментальные результаты хорошо согласуются с результатами моделирования.

1. Введение

Карамболь является одной из разновидностей игр на бильярдном столе, не имеющем луз. Наибольшее распространение он получил в значительной части Азии, США и северных странах Европы. В игре принимают участие два или четыре человека (при командном противостоянии). При каждом ударе игроку нужно пытаться направлять биток (белого цвета) последовательно в два прицельных шара (красного цвета). *(Здесь, указывая цвета, автор имеет ввиду определенную разновидность Карамболя, в котором используются белый и два красных шара. Более распространены игры с иными шарами. Однако, для последующего изложения это не играет принципиального значения. Прим. пер.)*. В Трехбортном бильярде требуется, чтобы биток, прежде чем соприкоснуться со вторым прицельным шаром, не менее трех

раз коснулся бортов. Удар по битку, направляющий его в иной шар и борта стола, наносится наклейкой кия. Игровая поверхность стола ограничена деревянными бортами (*к которым прикреплена бильярдная резина; прим. пер.*). Через равные интервалы на каждом длинном борту обозначены семь отметок в виде брильянтов, а на коротких бортах – по три отметки [2].

Во многих студенческих учебниках по физике динамика бильярда представлена в качестве иллюстративных примеров проявления вращения и механики упругих соударений. Однако, непреднамеренные наблюдения за бильярдными шарами на реальной игровой поверхности не показывают даже приблизительного соответствия с тем, что следует из общепринятого элементарного анализа [8]. Теория бильярда основана на механике твердого тела [6], а формы траекторий шаров определяются, в основном, действием трения и последствиями соударений [1]. Трение создается между шаром и игровой поверхностью, а также между шаром и бортами стола. (*Конечно же, в бильярде есть и другие проявления трения, о которых автор умалчивает. Прим. пер.*). Обычно, после удара кием шар в течение некоторого времени движется со скольжением, обладая при этом вращением, а затем переходит к фазе естественного качения. В общем случае полагается, что он вращается вокруг трех осей и обладает поступательной скоростью, в которой можно выделить две компоненты (*спроектировав вектор скорости на перпендикулярные оси в плоскости стола; прим. пер.*). Однако, помимо контакта между кием и шаром, есть еще две разновидности контактов – между бильярдными шарами, а также между шаром и упругим бортом. Насколько известно автору, существует обширный круг научных работ, в которых подробно излагаются последствия соударения шаров [8,5], в то время как соударения шара с бортом исследованы недостаточно глубоко. Ниже процесс соударения рассматривается как пространственная задача, которая существенным образом отличается от аналогичной задачи, рассматриваемой в двух измерениях. В этой работе не представлен анализ результатов взаимодействия наклейки кия с шаром при ударе, для которого были получены эмпирические формулы. Значительное внимание было сосредоточено на анализе соударения шара с бортом при действии трения, а контакт соударяющихся шаров для простоты рассматривается без учета трения. В работе представлены аналитические результаты, полученные для механики бильярда, рассматриваемой в рамках динамики твердого тела [4]. Теоретические выкладки реализованы в программе, моделирующей и графически представляющей процесс бильярдной игры, эффективность работы которой показана в сравнении с экспериментальными данными. Конечные результаты исследования прошли количественную и качественную проверку высокоскоростной видеосъемкой.

2. Удар по битку

Моделировать процесс удара кием затруднительно как аналитически, так и численно – ведь при этом сказывается влияние человеческого фактора. В силу этого, удар должен быть смоделирован качественно и эмпирически. Есть четыре элемента удара, которые нужно учитывать при его рассмотрении (см. рисунок 1):

- точка удара: на рисунке выделены девять различных точек соприкосновения кия с шаром (C, L, R, F, D, LF, LD, RF, RD);
- сила удара: величина приложенной силы;
- тип удара: выделим три типа – обычный удар; удар с оттяжкой; накат; (под обычным ударом автор, видимо, понимает такой удар, при котором в момент соударения с прицельным шаром биток не имеет верхнего и нижнего вращений; при оттяжке в момент соударения биток обладает нижним вращением, а при накате – верхним; прим. пер.);
- направление удара: направление действия приложенной к шару силы.

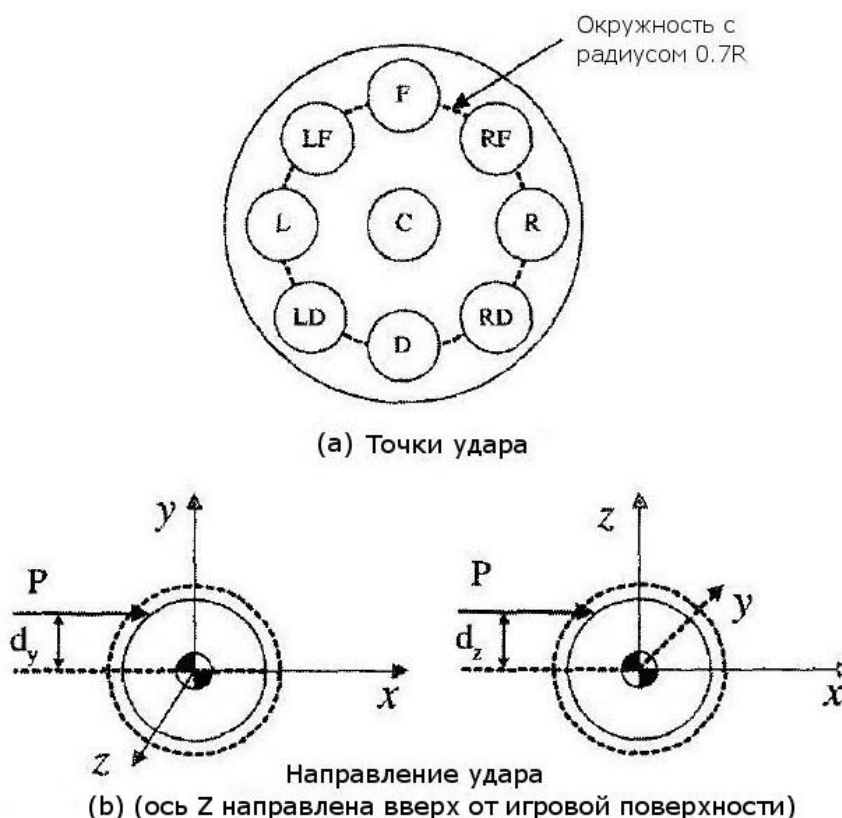


Рис.1. Точки удара и его направление.

3. Вращательное движение шаров на столе

На вращательное движение шара, имеющего сферическую форму и находящегося на плоской поверхности, могут оказывать влияние три силы сопротивления. Это – тормозящая сила сопротивления воздушной среды; сила, порожденная деформацией поверхности и шара в зоне контакта; сила трения скольжения, действующая, когда шар не находится в стадии естественного качения. Для бильярдных шаров сила сопротивления воздушной среды гораздо меньше сил, обусловленных вращением [9]. На рисунке 2 показано, что с шаром, находящимся на столе, связаны три вращательные компоненты ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$), две компоненты поступательного перемещения (V_x, V_y) и переменные, обусловленные действием

трения (f_x, f_y, M_z). После удара, нанесенного кием, или после соударения с другим шаром биток начинает вращаться, некоторое время перемещаясь со скольжением. При этом скорость скольжения V_a в точке контакта шара с игровой поверхностью (*скорость перемещения поверхности битка относительно сукна в точке касания; прим. пер.*) отличается от нуля. Действие силы трения в конечном счете приводит к тому, что шар переходит к естественному качению, если до этого не ударится в борт или в другой шар. Иными словами, скорость скольжения V_a постепенно уменьшается (*по абсолютной величине; прим. пер.*) до момента соударения с чем-либо или до нулевого значения.

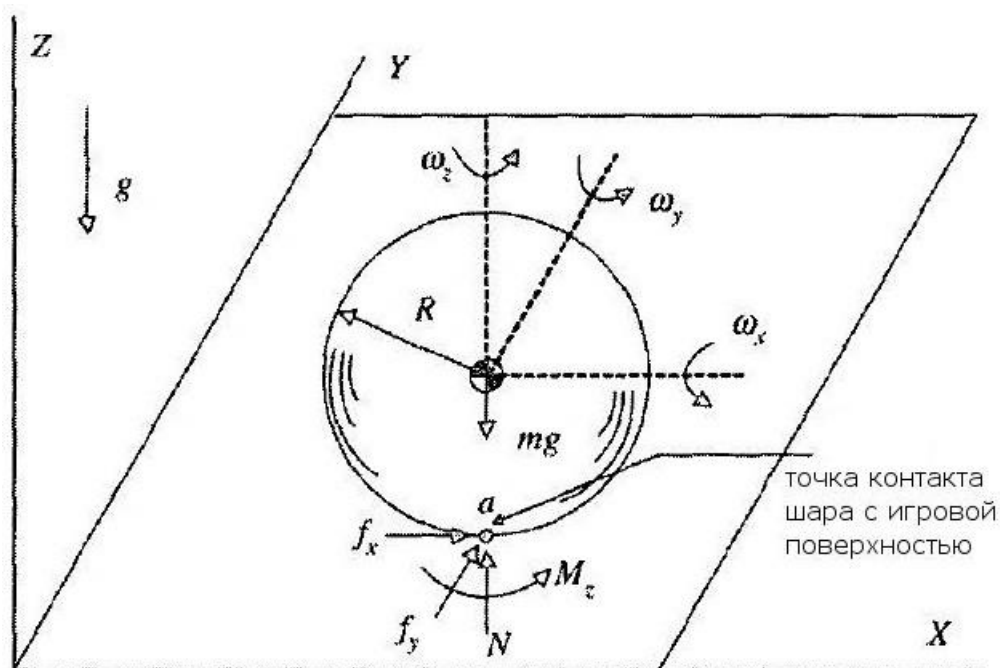


Рис.2. Шар на поверхности стола.

Основные уравнения движения шара могут быть представлены соотношениями (1) – (3):

$$I\dot{\omega}_x = R f_y, \quad I\dot{\omega}_y = -R f_x, \quad I\dot{\omega}_z = -M_z \frac{\omega_z}{|\omega_z|}, \quad (1)$$

$$m\dot{V}_x = f_x, \quad m\dot{V}_y = f_y, \quad (2)$$

$$V_{ax} = V_x - R\omega_y, \quad V_{ay} = V_y + R\omega_x, \quad (3)$$

где

$$V_z = \dot{V}_z = 0; \quad I = \frac{2}{5} m R^2 \quad [= I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}].$$

В (1) – (3) использованы следующие обозначения: f_x, f_y – компоненты силы трения между шаром и поверхностью стола; M_z – момент трения; I – момент инерции шара; m, R – масса и радиус шара, соответственно. Изотропные силы трения Кулона (*Charles-Augustin de Coulomb*) определяются следующими уравнениями:

$$f_x = -f \frac{V_{ax}}{\sqrt{V_{ax}^2 + V_{ay}^2}}, \quad f_y = -f \frac{V_{ay}}{\sqrt{V_{ax}^2 + V_{ay}^2}}, \quad f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \mu mg, \quad (4)$$

где $\mu = \mu_s = \mu_k$ – коэффициент трения; g – ускорение свободного падения. При определении момента трения обычно считается, что эффект ослабления бокового вращения (*вращения вокруг оси Z; прим. пер.*) от его действия может быть представлен в модельном виде. Шар соприкасается с бильярдным сукном не в одной точке, а по некоторой поверхности контакта; тем не менее, принято полагать, что соприкосновение является все же точечным, но при этом следует учитывать действие момента трения. На рисунке 3 изображена поверхность соприкосновения шара с сукном на игровом поле, имеющая радиус ρ . С помощью измерений удалось определить, что максимальная величина ρ составляет 2 миллиметра. В предположении о том, что вес шара распределен по поверхности контакта равномерно, величину момента трения можно выразить следующим образом:

$$M_z = \int_0^\rho \mu \left(\frac{m}{\pi \rho^2} \right) g (2\pi r dr) r = \frac{2\mu mg}{\rho^2} \int_0^\rho r^2 dr = \frac{2}{3} \mu mg \rho = \mu mg \left(\frac{2}{3} \rho \right). \quad (5)$$

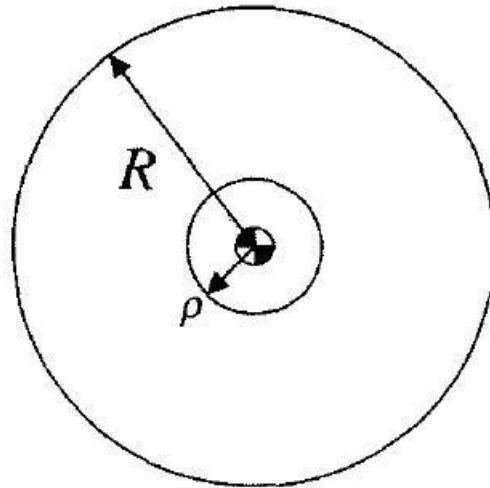


Рис.3. Зона контакта шара с поверхностью стола.

При перемещении по бильярдному столу шар, в общем случае, может проходить два различных этапа движения – скольжение с вращением и естественное качение. На этапе скольжения уравнения движения преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \dot{X}_G &= V_x, & \dot{Y}_G &= V_y, & \dot{V}_x &= -\mu g \frac{V_{ax}}{\sqrt{V_{ax}^2 + V_{ay}^2}}, & \dot{V}_y &= -\mu g \frac{V_{ay}}{\sqrt{V_{ax}^2 + V_{ay}^2}}, \\ \dot{\omega}_x &= -\frac{5}{2} \frac{\mu g}{R} \frac{V_{ay}}{\sqrt{V_{ax}^2 + V_{ay}^2}}, & \dot{\omega}_y &= \frac{5}{2} \frac{\mu g}{R} \frac{V_{ax}}{\sqrt{V_{ax}^2 + V_{ay}^2}}, & \dot{\omega}_z &= -\frac{5}{2} \frac{M_z}{mR^2} \text{sign}(\omega_z), \end{aligned} \quad (6)$$

где X_G, Y_G – координаты центра масс шара; величина $sign(\omega_z)$ равна ± 1 в соответствии со знаком ω_z . Когда скорость скольжения в точке контакта a становится равной нулю, шар переходит к естественному качению, и уравнения движения могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} \dot{X}_G &= V_x, & \dot{Y}_G &= V_y, & \dot{V}_x &= -\frac{5}{7} \frac{M_y}{mR} \frac{\omega_y}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}, & \dot{V}_y &= \frac{5}{7} \frac{M_x}{mR} \frac{\omega_x}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}, \\ \dot{\omega}_x &= -\frac{5}{7} \frac{M_x}{mR^2} \frac{\omega_x}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}, & \dot{\omega}_y &= -\frac{5}{7} \frac{M_y}{mR^2} \frac{\omega_y}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}, & \dot{\omega}_z &= -\frac{5}{7} \frac{M_z}{mR^2} \frac{\omega_z}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь M_x, M_y – моменты сопротивления вращению при естественном качении, подлежащие оценке при моделировании и экспериментальных тестах. Для них справедливы следующие зависимости:

$$M_x = M_y = M_R; \quad M_R \leq \frac{7}{5\sqrt{2}} R\mu mg. \quad (8)$$

При моделировании движения шара постоянно контролируется величина скорости скольжения. Когда она становится равной нулю, вместо соотношений (6), справедливых для этапа перемещения со скольжением, начинают применяться соотношения (7), работоспособные при естественном качении. Информация, необходимая для предсказания момента перехода от одних соотношений к другим, получается с помощью отслеживания предыдущих значений скорости скольжения в дискретные моменты времени. Точное значение времени перехода определяется численно (с помощью отыскания корня уравнения с одним неизвестным; прим. пер.).

4. Динамика соударения

В бильярдной игре встречаются два вида соударений – между шарами; между шаром и бортом. В этой работе считается, что контакт между шарами происходит без действия сил трения, а соударение шара с бортом рассматривается как упругий контакт, при котором проявляется трехмерное действие трения. При моделировании бильярдной динамики необходимо определять положение точки контактирующих тел и время соударения. (Речь идет о моменте времени, в который происходит соударение, а не о длительности контакта. Прим. пер.). Задача определения одной или нескольких точек контакта тел может быть решена геометрически, если использовать упрощающее предположение о абсолютной твердости соударяющихся тел. Для определения времени соударения используются величины расстояния между внешними границами тел (по направлению, соединяющему их центры масс) и его производной по времени. С помощью оценочного значения времени контакта корректируется шаг численного моделирования, позволяющий определить тот момент, в который границы тел соприкоснутся друг с другом (без проникновения внутрь) [3].

С помощью предварительно проведенных экспериментов была определена величина коэффициента восстановления при соударении шаров: $e = 0.98$. Согласно закону сохранения количества движения, для соударения шаров, изображенного на рисунке 4, справедливы соотношения

$$m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} = m_1 V_{1x}' + m_2 V_{2x}'; \quad V_{1x} + V_{2x} = V_{1x}' + V_{2x}' . \quad (9)$$

В этих и нижеследующих формулах нижний индекс «1» относится к первому шару, а «2» – ко второму; верхний индекс «'» отражает принадлежность к моменту времени, наступающему сразу же после соударения. Применение гипотезы Ньютона позволяет получить следующую кинематическую связь:

$$e (V_{a1x} - V_{a2x}) = (V_{a2x}' - V_{a1x}') , \quad (10)$$

где V_{ax} – скорость точки контакта шаров a , равная скорости движения центра соответствующего бильярдного шара.

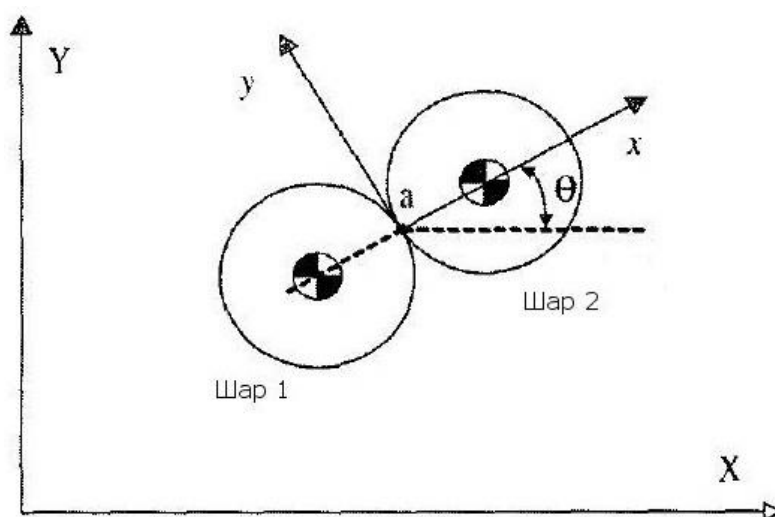


Рис.4. Соударение между шарами.

Из уравнений (9), (10) могут быть найдены выражения для скорости шаров после соударения:

$$V_{1x}' = \frac{1-e}{2} V_{1x} + \frac{1+e}{2} V_{2x}; \quad V_{2x}' = \frac{1+e}{2} V_{1x} + \frac{1-e}{2} V_{2x} . \quad (11)$$

Так как действие трения не учитывается, то здесь предполагается, что вследствие соударения величины $V_y, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ не изменяются.

Реальный процесс соударения шара с бортом весьма сложен. Для его математического представления необходимо сделать некоторые упрощающие предположения. В механике твердого тела полагается, что контакт происходит

мгновенно. В этой работе такое предположение не используется, но длительность контакта считается малой по сравнению с шагом численных расчетов до соударения или сразу после него. Вследствие этого, полагается, что в течение малого интервала времени координаты и угловые положения соударяющихся тел остаются неизменными, поскольку все скорости ограничены. Другое упрощение – предположение о точечном контакте шара с бортом, рассматриваемых в качестве твердых тел. На самом же деле, все связанные с соударением силы действуют в некоторой области, а не точке. (Более того, на протяжении соударения конфигурация этой области постоянно трансформируется. Прим. пер.). Типичный контакт шара с бортом изображен на рисунке 5. Через ε обозначено вертикальное расстояние между точкой соприкосновения борта с шаром и его центром, считающееся постоянным. Для шаров и бортов, используемых в Карамболе, $\varepsilon = 9.25$ мм.

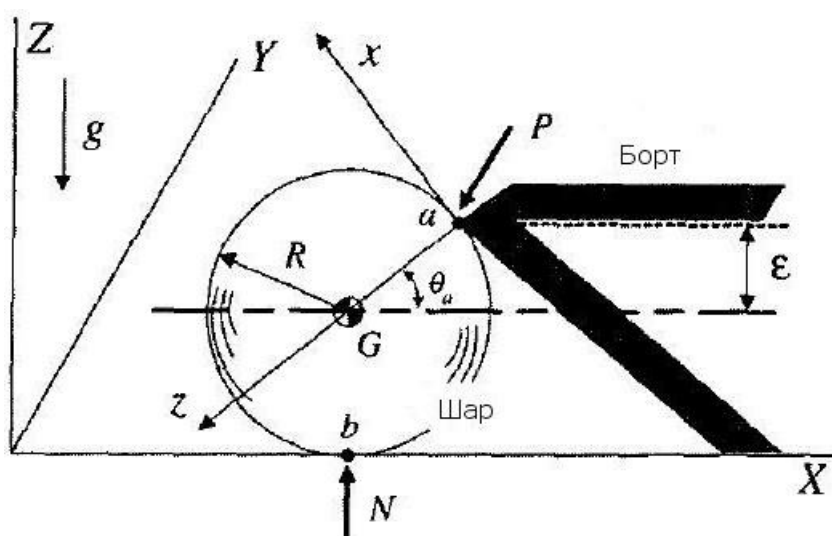


Рис.5. Соударение шара с бортом.

В любой момент времени малого интервала контакта движущихся тел выполняются законы сохранения импульса (количества движения) и момента импульса, которые приводят к соотношениям:

$$m (V_X - V_{X_0}) = P_X; \quad m (V_Y - V_{Y_0}) = P_Y; \quad m (V_Z - V_{Z_0}) = P_Z + N = 0; \quad P_Z = -N. \quad (12)$$

$$I (\omega_X - \omega_{X_0}) = -RP_Y \sin \theta_a; \quad I (\omega_Y - \omega_{Y_0}) = RP_X \sin \theta_a - RP_Z \cos \theta_a; \quad (13)$$

$$I (\omega_Z - \omega_{Z_0}) = RP_Y \cos \theta_a.$$

Здесь P_X, P_Y, P_Z – импульсы проекций силы P , действующей в точке соударения, на оси системы координат X, Y, Z . Относительные скорости скольжения S_x, S_y и сжатия s точек тел, вступающих в контакт, определяются зависимостями:

$$\begin{aligned} S_x &= -V_{a_x} = V_X \sin \theta_a - V_Z \cos \theta_a + R\omega_Y, \\ S_y &= -V_{a_y} = -V_Y - R\omega_Z \cos \theta_a + R\omega_X \sin \theta_a, \end{aligned} \quad (14)$$

$$c = V_x \cos \theta_a + V_z \sin \theta_a .$$

С помощью (12), (13) уравнения (14) можно представить в следующем виде:

$$S_x = S_{x_0} - A P_x; \quad S_y = S_{y_0} - A' P_y; \quad c = c_0 - B P_z , \quad (15)$$

где

$$S_{x_0} = S_x(t_0); \quad S_{y_0} = S_y(t_0); \quad c_0 = c(t_0); \quad A = A' = \frac{1}{m} + \frac{R^2}{I} = \frac{7}{2m}; \quad B = \frac{1}{m} . \quad (16)$$

(Следует внимательно относиться к различию строчных и заглавных букв x, y, z, X, Y, Z , использованных в качестве нижних индексов в соотношениях (12) – (16) и указывающих на отношение к системам координат, повернутых на угол θ_a друг относительно друга. Прим. пер.). Три константы A, A' и B не зависят от начальных скоростей, а определяются массой шара. Для шара, соударяющегося с бортом в конкретной точке, относительная нормальная скорость c_0 должна быть положительной. При контакте с трехмерным действием силы трения, изображенном на рисунке 5, скорость шара после соударения в вертикальном направлении V_z' равна нулю вследствие действия силы реакции N в точке опоры b .

При трехмерном действии силы трения в точке соударения возможны два вида контакта шара с бортом: скользяще-сцепляющийся контакт и контакт с чистым скольжением. (Об анализе контакта при трехмерном действии сил см. подробнее [4],[7], а об общем анализе динамики при наличии трения – [3]). Для обоих видов контакта импульс силы в нормальном направлении определяется зависимостью:

$$P_{zE} = (1 + e_r) \frac{c_0}{B} . \quad (17)$$

(Здесь e_r – коэффициент восстановления между шаром и бортом. Другое название этого параметра – эластичность бортовой резины по отскоку. Прим. пер.).

Тангенциальные импульсы за время соударения для каждого вида контакта рассчитываются по-разному. Для скользяще-сцепляющегося контакта, имеющего место при $P_{zS} \leq P_{zE}$:

$$P_{xE} = \frac{S_{x_0}}{A}; \quad P_{yE} = \frac{S_{y_0}}{A} . \quad (18)$$

Для контакта с чистым скольжением, происходящего при $P_{zS} > P_{zE}$:

$$P_{xE} = \mu_r (1 + e_r) \frac{c_0}{B} \cos \beta; \quad P_{yE} = -\mu_r (1 + e_r) \frac{c_0}{B} \sin \beta . \quad (19)$$

(Символом β обозначен угол падения шара на борт – острый или прямой угол между вектором поступательной скорости шара и линией борта в момент контакта. Вместо β автор использует обозначение θ_0 . Чтобы не было путаницы с углом θ_a ,

здесь и далее в переводе используется символ β . Прим. пер.). Здесь μ_r – коэффициент трения скольжения между шаром и бортом;

$$P_{zS} = \frac{|S_0|}{A}. \quad (20)$$

($|S_0|$ представляет собой модуль скорости скольжения, равный $|S_0| = \sqrt{S_{x_0}^2 + S_{y_0}^2}$. Прим пер.). При скользяще-сцепляющемся контакте, в системе координат, связанной с поверхностью стола, импульсы представляются в виде:

$$\begin{aligned} P_X' &= -\frac{S_{x_0}}{A} \sin \theta_a - (1 + e_r) \frac{c_0}{B} \cos \theta_a, \\ P_Y' &= \frac{S_{y_0}}{A}, \\ P_Z' &= \frac{S_{x_0}}{A} \cos \theta_a - (1 + e_r) \frac{c_0}{B} \sin \theta_a, \end{aligned} \quad (21)$$

а для контакта с чистым скольжением выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} P_X' &= -\mu_r (1 + e_r) \frac{c_0}{B} \sin \theta_a \cos \beta - (1 + e_r) \frac{c_0}{B} \cos \theta_a, \\ P_Y' &= -\mu_r (1 + e_r) \frac{c_0}{B} \sin \beta, \\ P_Z' &= \mu_r (1 + e_r) \frac{c_0}{B} \cos \theta_a \cos \beta - (1 + e_r) \frac{c_0}{B} \sin \theta_a. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (12), (13) можно выразить скорости шара после его контакта с бортом:

$$\begin{aligned} V_X' &= V_{X_0} + \frac{P_X}{m}; \quad V_Y' = V_{Y_0} + \frac{P_Y}{m}, \\ \omega_X &= \omega_{X_0} - \frac{R}{I} P_Y \sin \theta_a, \\ \omega_Y &= \omega_{Y_0} + \frac{R}{I} (P_X \sin \theta_a - P_Z \cos \theta_a), \\ \omega_Z &= \omega_{Z_0} + \frac{R}{I} P_Y \cos \theta_a. \end{aligned} \quad (23)$$

Подстановка выражений для импульсов (21) или (22) в (23) позволяет получить соотношения для расчета скоростей шара после его соударения с бортом. Для случая скользяще-сцепляющегося контакта будем иметь:

$$\begin{aligned} V_X' &= V_{X_0} - V_{X_0} \left[\frac{2}{7} \sin^2 \theta_a + (1 + e_r) \cos^2 \theta_a \right] - \frac{2}{7} R \omega_{Y_0} \sin \theta_a, \\ V_Y' &= \frac{5}{7} V_{Y_0} + \frac{2}{7} R [\omega_{X_0} \sin \theta_a - \omega_{Z_0} \cos \theta_a], \\ (\omega_X &= \omega_{X_0} - \frac{5}{7R} \sin \theta_a (-V_{Y_0} - R \omega_{Z_0} \cos \theta_a + R \omega_{X_0} \sin \theta_a), \quad \omega_Y = \omega_{Y_0} - \frac{5}{7R} (V_{X_0} \sin \theta_a + R \omega_{Y_0}), \end{aligned} \quad (24)$$

$\omega_z = \omega_{z_0} + \frac{5}{7R} \text{Cos } \theta_a (-V_{Y_0} - R\omega_{z_0} \text{Cos } \theta_a + R\omega_{X_0} \text{Sin } \theta_a)$; прим. пер). Для контакта с чистым скольжением справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} V_{X'} &= V_{X_0} - V_{X_0} (1 + e_r) \text{Cos } \theta_a (\mu_r \text{Sin } \theta_a \text{Cos } \beta + \text{Cos } \theta_a) , \\ V_{Y'} &= V_{Y_0} - V_{X_0} \mu_r (1 + e_r) \text{Cos } \theta_a \text{Sin } \beta . \end{aligned} \quad (25)$$

$(\omega_x = \omega_{x_0} + \frac{5}{2R} V_{X_0} \mu_r (1 + e_r) \text{Sin } \theta_a \text{Cos } \theta_a \text{Sin } \beta, \omega_y = \omega_{y_0} - \frac{5}{2R} V_{X_0} \mu_r (1 + e_r) \text{Cos } \theta_a \text{Cos } \beta, \omega_z = \omega_{z_0} - \frac{5}{2R} V_{X_0} \mu_r (1 + e_r) \text{Cos}^2 \theta_a \text{Sin } \beta$; прим. пер). Из уравнений (24) видно, что при скользяще-сцепляющемся контакте величина $V_{Y'}$ зависит от поперечного вращения ω_{X_0} , а $V_{X'}$ сильно зависит от продольного вращения ω_{Y_0} (верхнего или нижнего; прим. пер.). Интересно, что горизонтальная скорость шара после отражения $V_{Y'}$ не зависит от таких физических параметров, как коэффициенты восстановления и трения. С другой стороны, при чисто скользящем контакте скорости отразившегося шара не зависят от угловых скоростей.

5. Моделирование и натурные эксперименты

Все выше приведенные выкладки были реализованы в графической моделирующей расчетной программе. Система моделирования была опробована на многих примерах бильярдной игры. В нее были включены следующие восемь расчетных блоков:

- блок удара по битку, учитывающий: местоположение точки удара; величину прикладываемой силы; тип удара; направление удара;
- блок расчета движения вращающегося шара по поверхности стола (соотношения (6) и (7)) (блок численного интегрирования уравнений движения; прим. пер.);
- блок определения факта соударения между шарами;
- блок определения факта соударения шара с бортом;
- блок анализа соударения шаров без учета трения (соотношения (11));
- блок анализа соударения шара с бортом при трехмерном действии сил трения (соотношения (21) и (23) или (22) и (23));
- блок управления шагом по времени, применяемым при расчетах;
- блок предсказания и вычисления момента остановки шара.

Укрупненная блок-схема программы моделирования изображена на рисунке 6.

В Карамболе и Трехбортном Бильярде диаметр шара составляет 65.5 миллиметров, а масса – 220 граммов. (Приведены весьма странные значения. Прим. пер.). Длина длинного борта равна 2540 миллиметров, а короткого – 1270 миллиметров. Измеренные в предварительных экспериментальных исследованиях значения физических параметров, приведены в таблице 1.

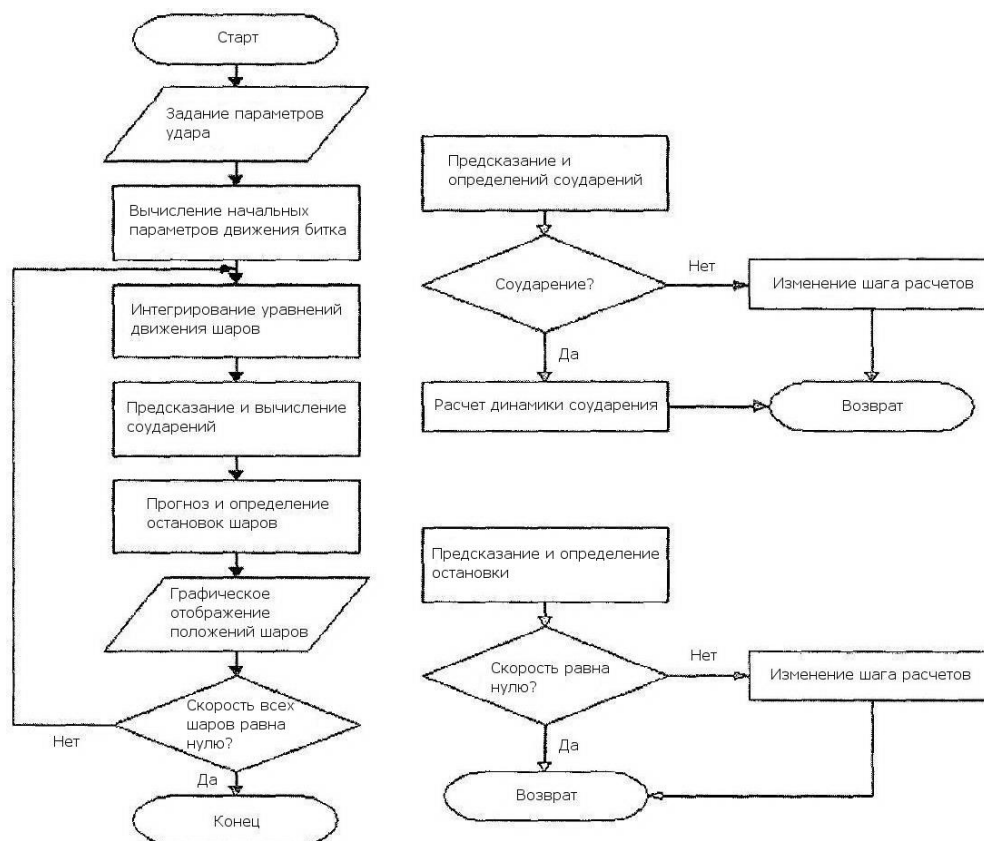


Рис.6. Блок-схема разработанной программы моделирования.

Параметры	Значение	Параметры	Значение
Коэффициент восстановления между шарами, e	0.98	Коэффициент трения между шаром и сукном, μ	0.069
Коэффициент восстановления между шаром и бортом, e_r	0.6 ÷ 0.95	Коэффициент трения между шаром и бортом, μ_r	0.1 ÷ 0.35
Момент трения, M_z	$3.82 \cdot 10^{-4}$, Н·м	$M_R = M_x = M_y$	$3.8 \cdot 10^{-4}$, Н·м

Таблица 1. Измеренные физические бильярдные параметры.

Результаты проведенных экспериментов показали, что величина коэффициента восстановления между шаром и бортом меняется при варьировании значения нормальной компоненты скорости шара V_{X_0} (направленной перпендикулярно борту; прим. пер.). Эмпирически была получена связь между e_r и V_{X_0} , при использовании которой скорость нужно выражать в метрах в секунду:

$$e_r = 0.39 + 0.257V_{X_0} - 0.044 V_{X_0}^2 . \quad (26)$$

(И снова возникает недоумение. Зависимость, представленная соотношением (26), является параболической. Найти величину V_{X_0} , при которой e_r принимает

максимальное значение, не составляет труда: $V_{x_0} = 2.92$ м/с. При этом, максимум e_r равен 0.765. Но из таблицы 1 следует, что при расчетах применялись и гораздо большие значения – вплоть до 0.95. Как это понимать? Прим. пер.). Результаты испытаний свидетельствуют о том, что коэффициент трения между шаром и бортом μ_r зависит от угла падения шара на борт β и практически не связан со скоростью V_{x_0} . Зависимость между μ_r и β определяется следующим соотношением, в котором β необходимо выражать в радианах:

$$\mu_r = 0.471 - 0.241\beta. \quad (27)$$

(Автор не объясняет – что он конкретно имеет ввиду под углом падения шара на борт β . Если из таблицы 1 взять значения $\mu_r = 0.1 \div 0.35$ и провести обратное вычисление с помощью (27), то станет ясно, что расчеты проводились со значениями угла падения β от 56.2° до 88.2° . Отсюда можно предположить, что β – угол между вектором скорости шара в момент соударения с бортом и линией борта. Иными словами, $Tg \beta = V_{x_0} / V_{y_0}$. Прим. пер.). Эмпирические соотношения (26) и (27) были получены с помощью обработки многочисленных результатов экспериментов методом наименьших квадратов.

Для подтверждения правильности работы алгоритмов моделирования, ниже представлены результаты натуральных экспериментов, проведенных при ударах с касанием шаром одного, двух и трех бортов. Движение реальных шаров было зафиксировано камерой для высокоскоростной видеосъемки FASTCAM-Rabbit, способной работать со скоростью 600 кадров в секунду. Отснятый материал анализировался по отдельным кадрам и сравнивался с численными и графическими результатами, полученными с помощью моделирующей программы. На рисунках 7 и 8 представлены примеры ударов с одним и двумя касаниями бортов, соответственно. Результаты моделирования и натурального эксперимента хорошо согласуются друг с другом. Тем не менее, небольшие расхождения в результатах имеют место, что может быть следствием использования модели твердого тела для деформируемого борта и ошибками определения физических параметров. На рисунке 9 изображен пример удара, после которого шар трижды касается бортов. Результаты экспериментов и моделирования довольно неплохо соответствуют друг другу, как по положениям точек касания шара с бортом, так и по траекториям его перемещения.

6. Выводы

В работе представлен анализ динамики бильярдной игры, проведенный на основе механики твердого тела и с помощью разработанной программы численного моделирования. В динамике бильярда можно выделить три самостоятельных аспекта: движение шаров по игровой поверхности; соударения шаров; соударения шара с бортом. Для создания моделирующей программы были детально рассмотрены такие динамические задачи, как анализ движения при наличии вращения и анализ соударения с учетом трех составляющих действующей силы трения. Задача

определения параметров движения при трехмерном рассмотрении соударения двух шероховатых тел приводит к более длительному анализу и некоторым существенным отличиям по сравнению с аналогичной задачей, рассматриваемой в двух измерениях. Полученные аналитические и численные результаты были качественно и количественно проверены сравнением с экспериментальными данными, зафиксированными высокоскоростной видеокамерой. Результаты моделирования и натурального эксперимента хорошо согласуются между собой.

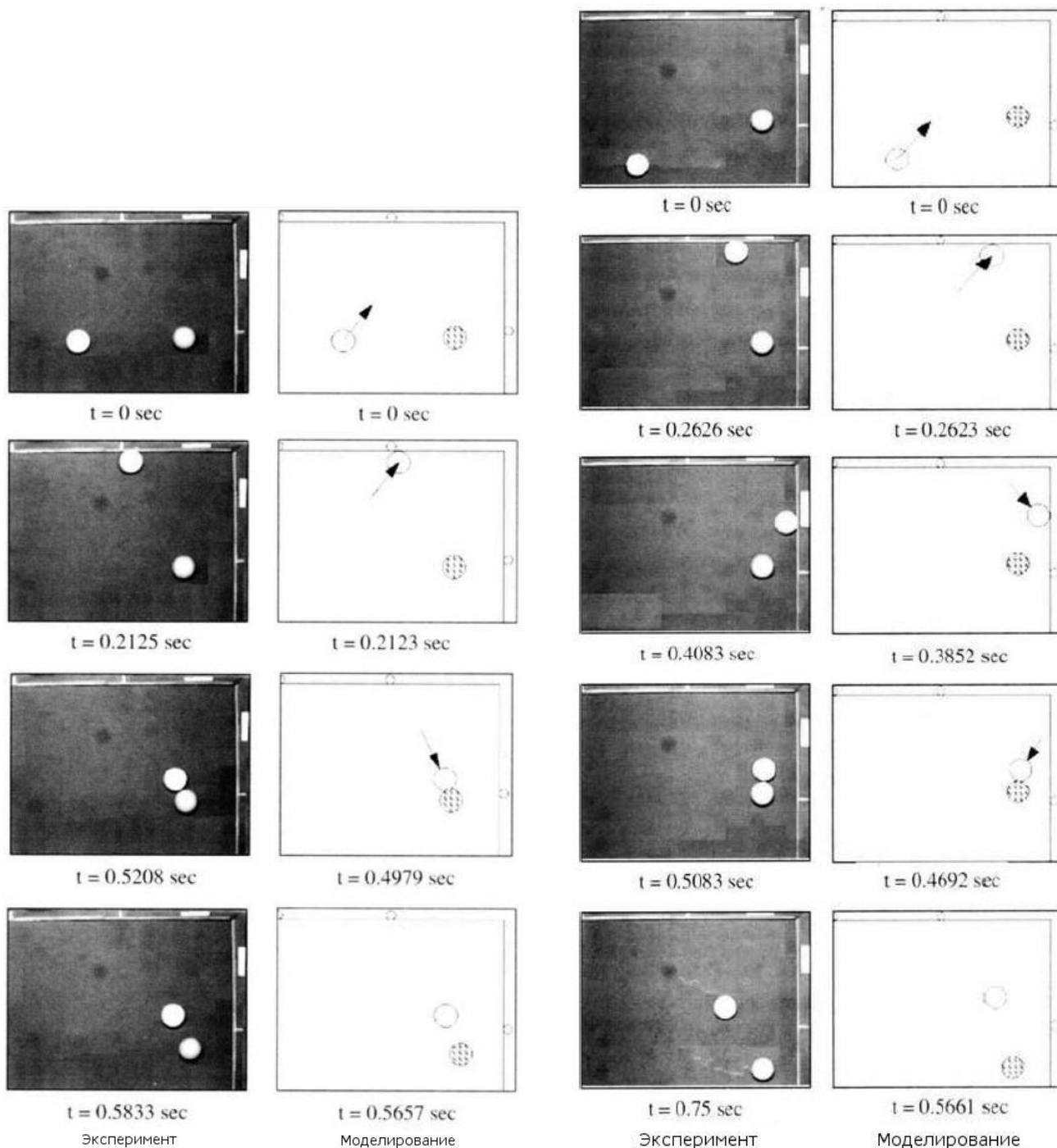


Рис. 7

Рис. 8

Рис.7. Результаты эксперимента и моделирования: одно соударение с бортом;

Рис.8. Результаты эксперимента и моделирования: два соударения с бортом.

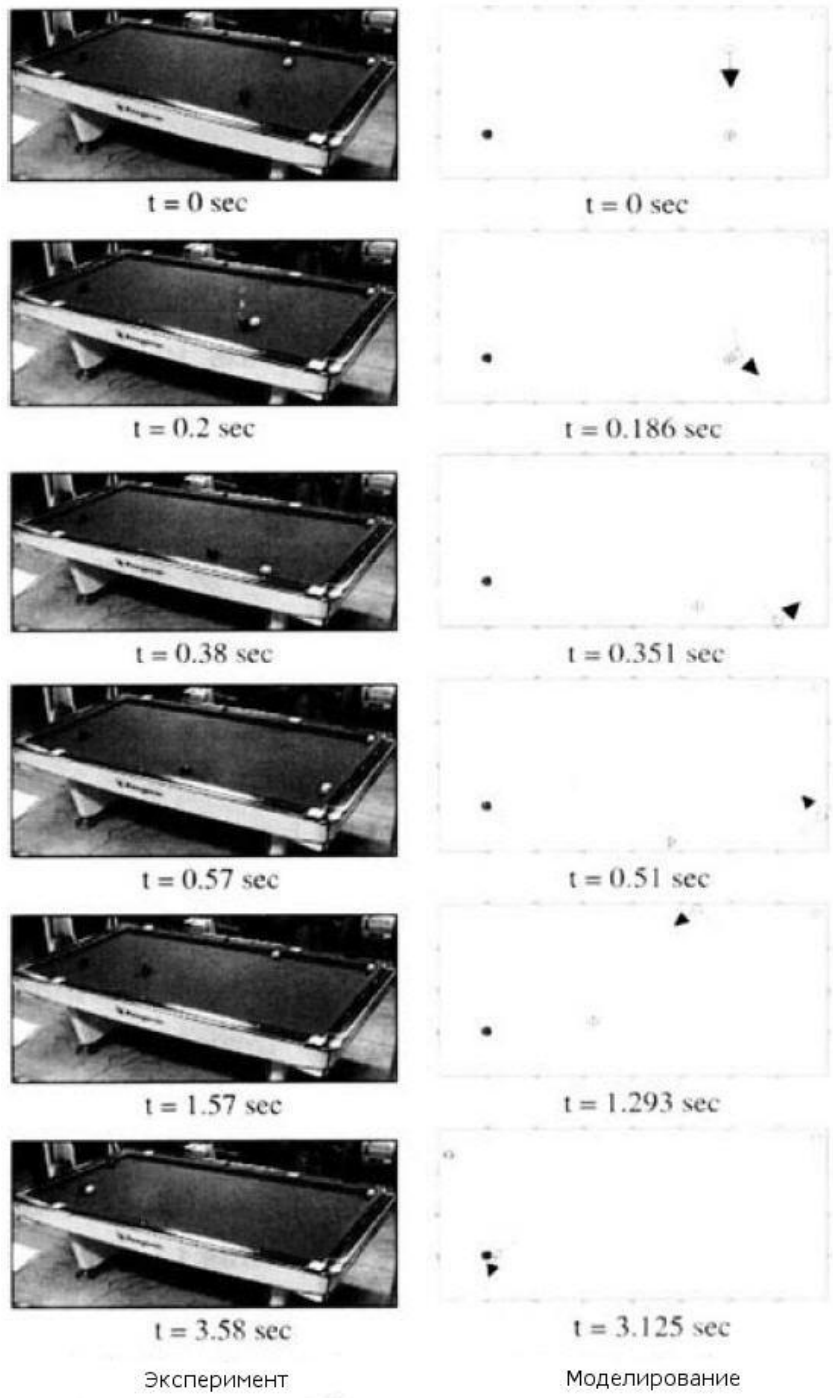


Рис.9. Результаты эксперимента и моделирования: три соударения с бортом.

Ссылки

- [1]. Cheng Bo-Ru, Li Je-Ting, Yang Jr-Syu, 2004, Design of the Neural-fuzzy Compensator for a Billiard Robot, *Proc. of IEEE Int'l Conf. on Networking, Sensing and Control*, Taipei, Taiwan.
- [2]. Cohen G.L., 2002, Three Cushion Billiards : Notes on the Diamond System, *Sports Engineering*, Vol. 5, pp. 43 — 51.
- [3]. Han I., Gilmore B.J., 1993, Multi-body Impact Motion with Friction-Analysis, Simulation and Experimental Validation, *ASME Trans. Journal of Mechanical Design*, Vol. 115, pp. 412-422.
- [4]. Han I., Cho J., 1996, Analysis of Three-dimensional Rigid-body Collisions with Friction-Collisions Between Ellipsoids (in Korean), *Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers*, Vol. 20, No. 5, pp. 1486-1497.
- [4]. Jeong Man-Yong and others, 2003, Chaotic Behavior on Rocking Vibration of Rigid Body Block Structure under Two-dimensional Sinusoidal Excitation, *KSME International Journal*, Vol. 17, No. 9, pp. 1249-1260.
- [5]. Onoda G.Y., 1989, Comment on «Analysis of billiard ball collisions in two dimensions» by R.E.Wallace and M.C.Schroeder [*Am. J. Phys.* 56, 815-819 (1988)], *Am J. Phys.*, Vol.57, No. 5, pp. 476-478.
- [6]. Petit R. 2004, The Art of Billiards Play, http://regis.petit2.perso.sfr.fr/bil_praa.html.
- [7]. Routh E.J., 1891, *Dynamics of a System of Rigid Bodies*, MacMillan and Co., London, pp. 265-269.
- [8]. Wallace R.E., Schroeder, M.C. 1988, Analysis of Billiard Ball Collisions in Two Dimensions, *Am. J. Phys.*, Vol. 56, No. 9, pp. 815-819.
- [9]. Witters J., Duymelinck D., 1986, Rolling and Sliding Resistive Forces on Blls Moving on a Flat Surface, *Am. J. Phys.*, Vol. 54, No. 1, pp. 80-83.
- [10]. All About Billiards (on Korean Language), www.allsportsbid.com.