

Сэмьюл Краун

Моделирование влияния скорости, вращения, коэффициента трения и угла резки на угол отражения шаров из фенольной смолы при почти упругих соударениях

S.C.Crown

**«Modeling the Effects of Velocity, Spin, Frictional Coefficient, and Impact Angle on Deflection Angle in Near-elastic Collisions of Phenolic Resin Spheres»
2004**

Перевод: С.Тихонов, февраль 2013

Резюме

Предложена простая математическая модель, описывающая соударение шаров из фенолформальдегидной смолы, используемых в лузном бильярде. Построение модели частично основано на известном исследовании упругих соударений, выполненном Генрихом Герцем более ста лет назад. Отдельно изучается влияние тангенциальной и нормальной компонент поступательной скорости движущегося шара, соударяющегося с таким же по размеру и массе неподвижным шаром. В заключение рассматривается совместное влияние этих компонент и других факторов на траекторию второго шара.

1. Введение

Побудительным мотивом для написания этой статьи для меня послужил, в первую очередь, интерес к лучшему пониманию физики процесса соударения бильярдных шаров (в дополнение к интуитивному осознанию этого явления на основе имеющегося опыта). К тому же, нужно было чем-то занять свободное время, появляющееся в Орегоне зимой в некоторые дождливые послеполуденные часы.

Для исследования физики процесса квази-упругого соударения (при котором коэффициент восстановления близок к единице) представляется вполне обоснованным использование приближенной линейной модели упругого контакта. (Здесь под коэффициентом восстановления понимается отношение полных кинетических энергий после соударения и до него. Прим. пер.). Для большинства соударений пластичная деформация и вязкое трение приводят к чувствительным потерям энергии, в силу чего коэффициент восстановления принимает значения, меньшие единицы. При этом математическое описание процесса контакта настолько усложняется, что отыскание точных аналитических решений становится затруднительным. В этой же работе, как будет показано ниже, использование модели абсолютно упругого соударения позволяет получить весьма точное приближение к реальному процессу. Рассмотрим соударение двух эластично деформируемых шаров S_1 и S_2 , при котором действуют нормальные (направленные через центры шаров; прим. пер.) и тангенциальные силы. Величина коэффициента восстановления при действии тангенциальных сил существенно зависит от трения (подробнее см. в работах [5], [6]). (В бильярде первый шар обычно называют битком, а второй – прицельным шаром. Прим. пер.).

а. Определения и начальные условия

Ниже будут использованы следующие начальные условия:

- 1) Соударение начинается при первом контакте шаров в момент времени $t = 0$ и заканчивается, когда шары разъединятся при $t = \tau$.
- 2) Ось X используемой системы координат проходит через центры шаров в момент времени $t = 0$.
- 3) Ось Y проходит через точку соприкосновения шаров S_1 и S_2 в момент времени $t = 0$.
- 4) Начальная скорость V шара S_1 (*поступательная скорость в момент начала соударения; прим. пер.*) направлена под углом α к оси X (*таким образом, α – угол резки; прим. пер.*). Соответственно, нормальную V_x и тангенциальную V_y компоненты скорости можно выразить следующим образом:

$$V_x = V \cos \alpha, \quad (1.1)$$

$$V_y = V \sin \alpha. \quad (1.2)$$

Помимо поступательной скорости, шар S_1 может иметь начальное боковое вращение (*вокруг вертикальной оси; прим. пер.*) с угловой скоростью β_{10} . (*Здесь первый индекс соответствует номеру шара, а второй – моменту времени. Прим. пер.*).

- 5) Движение шаров во время соударения ограничено горизонтальной плоскостью без трения. (*Правомерность использования такой упрощенной модели подтвердил Р.Шепард, представив соответствующие расчеты в работе «Любительская физика для любителя игры в Пул». Прим. пер.*).

б. В расчетах будут использоваться следующие значения физических параметров:

- 1) Радиус шаров S_1 и S_2 :

$$r = 2.857 \cdot 10^{-2} \text{ [м]}. \quad (1.3)$$

- 2) Масса каждого шара:

$$M = 1.701 \cdot 10^{-1} \text{ [кг]}. \quad (1.4)$$

- 3) Модуль упругости:

$$E = 5.84 \cdot 10^9 \text{ [Па]}. \quad (1.5)$$

- 4) Коэффициент трения между шарами (для чистых поверхностей):

$$\mu = 8 \cdot 10^{-1}. \quad (1.6)$$

(В расчетах будут использованы и несколько меньшие значения коэффициента трения. Однако, они все же велики по сравнению с реальными величинами, встречающимися в практике бильярда. Прим. пер.)

- 5) Коэффициент Пуассона:

$$\gamma = 3.4 \cdot 10^{-1}. \quad (1.7)$$

2. Нормальная компонента

Для сохранения кинетической энергии и импульса во время упругого соударения нужно, чтобы импульс силы $F \tau/2$, действующей между двумя одинаковыми шарами, вынуждал шар S_1 остановиться по отношению к шару S_2 в момент времени $t = \tau/2$. (Это утверждение справедливо, если шары изготовлены из изотропного материала, а время деформации их формы при соударении равно времени ее восстановления). Сохранение импульса и энергии для шаров одинаковой массы, с учетом отсутствия влияния тангенциальной компоненты скорости и вращения первого шара, означает, что

в момент времени $t = \tau/2$ оба шара имеют скорость $V_x/2$ в положительном направлении оси X . В этот момент форма обоих шаров эластично деформируется, как это схематично показано на рисунке 1. Значения импульса и кинетической энергии, относящиеся к каждому из шаров и их совместному центру масс, приведены в таблице 1 для моментов начала соударения, его середины и окончания. В течение интервала времени $\tau/2 < t < \tau$ деформированные в месте контакта участки поверхностей разжимаются за счет силы F , действующей между шарами (см. соотношения 2.18, 2.19). При упругом соударении «разжимающий» импульс $F \tau/2$ совпадает по величине с импульсом, действовавшим на интервале времени $0 < t < \tau/2$. Благодаря этому, скорость первого шара уменьшается с $V_x/2$ до нуля, а скорость второго шара увеличивается до V_x при $t = \tau$.

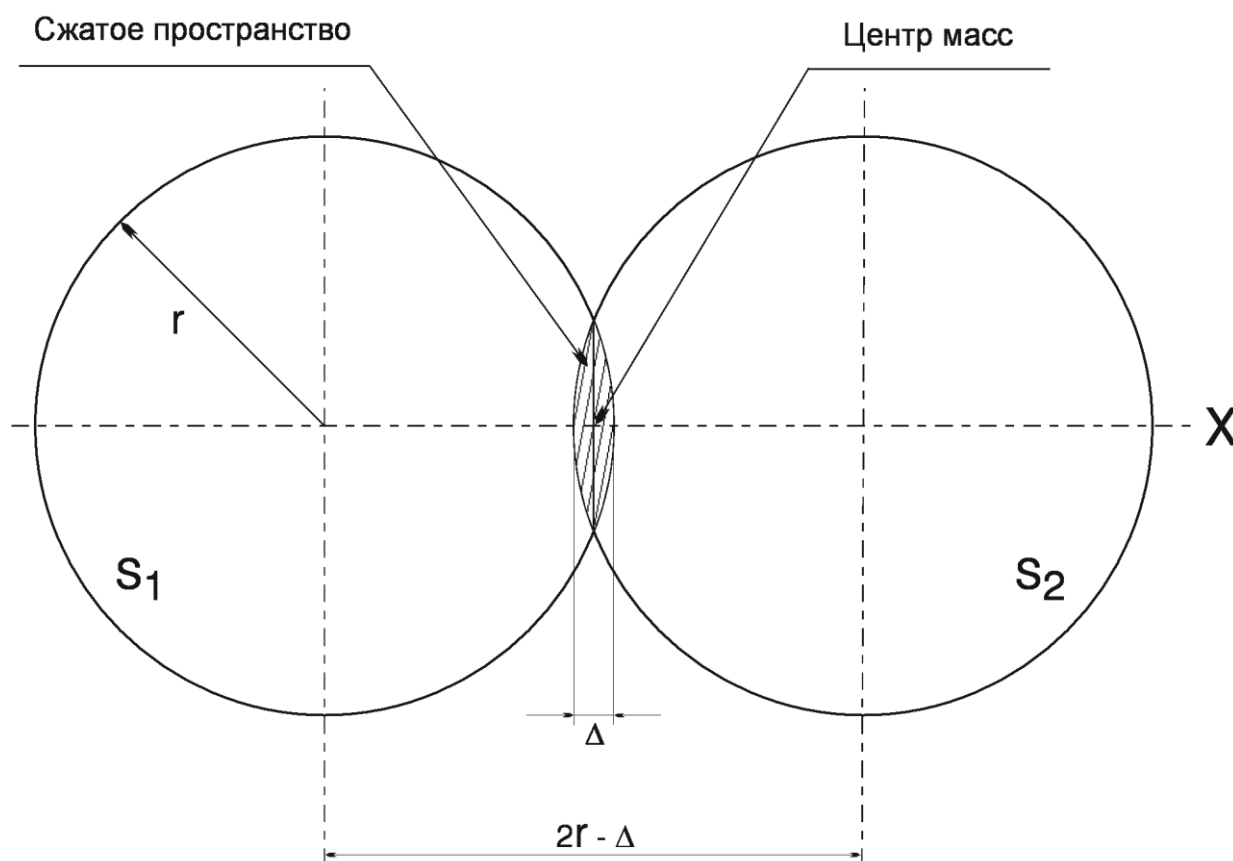


Рис.1. Соударение в момент времени $t = \tau/2$. Заштрихованная область эластично сжата за счет энергии соударения. Относительная скорость между шарами равна нулю, а скорость центра масс составляет $V_x/2$.

	$t = 0$	$t = \tau/2$	$t = \tau$
Импульс первого шара	MV_x	$MV_x/2$	0
Импульс второго шара	0	$MV_x/2$	MV_x
Импульс центра масс двух шаров	$2MV_x/2$	$2MV_x/2$	$2MV_x/2$
Кинетическая энергия первого шара	$MV_x^2/2$	$MV_x^2/8$	0
Кинетическая энергия второго шара	0	$MV_x^2/8$	$MV_x^2/2$
Потенциальная энергия сжатой области	0	$MV_x^2/4$	0

Таблица 1. Импульсы и энергии в три момента времени при соударении

Отметим, что поверхности шаров подвержены максимальной упругой деформации в момент времени $t = \tau/2$; совместный центр масс шаров находится в плоскости их контакта; закон сохранения импульса справедлив по отношению к объединенному центру масс, который имеет постоянную скорость $V_x/2$; максимальное совместное сжатие поверхностей шаров Δ можно определить из соотношения:

$$\Delta := \frac{V_x \tau}{2}. \quad (2.1)$$

Символ «:=» означает «равно по определению». С использованием теоретических принципов, разработанных Г.Герцем [1] и модифицированных Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшицом [2], время контакта шаров выражается следующей зависимостью:

$$\tau := 2.94 \left\{ \frac{M'^2}{k^2 V_x} \right\}^{1/5}, \quad (2.2)$$

где M' – так называемая редуцированная масса:

$$M' := \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}, \quad (2.3)$$

(Здесь M_1 и M_2 – массы первого и второго шара. Так как $M_1 = M_2 = M$, то $M' = M/2$. Прим. пер.).

$$k := 8 \frac{E}{15(1-\gamma^2)} \sqrt{\frac{r}{2}}. \quad (2.4)$$

Величину силы, действующей между шарами, можно найти как произведение площади области соприкосновения Ω и эффективного модуля упругости. Площадь Ω приближенно представляется в виде линейной функции параметра δ (см. рис.2):

$$\Omega \approx \pi a^2, \quad (2.5)$$

$$a^2 = r^2 - (r - \delta)^2. \quad (2.6)$$

Преобразуем (2.6) к виду

$$a^2 = 2 r \delta \left(1 - \frac{\delta}{2r} \right). \quad (2.7)$$

Соотношение (2.7) можно заменить следующим приближенным равенством, приводящим к погрешности менее половины процента:

$$a^2 \approx 2 r \delta. \quad (2.8)$$

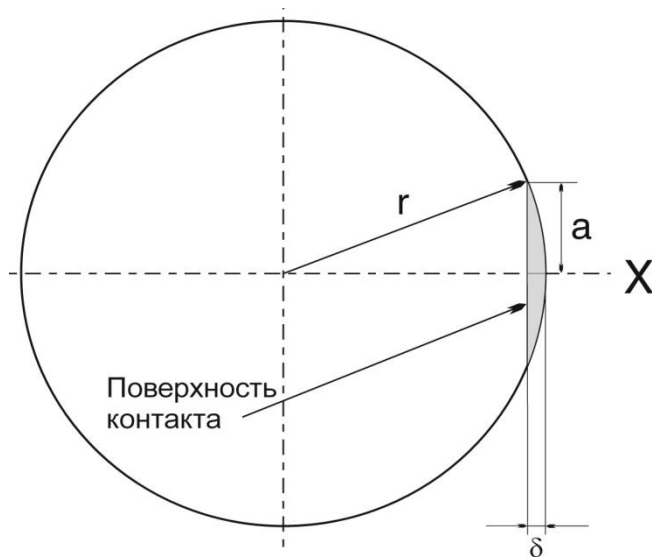


Рис.2. Геометрическое представление поверхности контакта одного из шаров в момент времени $t = \tau/2$.

Действие силы между шарами начинается в момент $t = 0$ и заканчивается при $t = \tau$, достигая своего максимума при $t = \tau/2$. С учетом сказанного выше, величину силы можно выразить в виде линейной функции параметра δ :

$$F \approx k \delta, \quad (2.9)$$

где k – некоторый постоянный коэффициент. С использованием уравнения Ньютона, выражение (2.9) представляется в виде дифференциального уравнения, описывающего перемещение поверхности контакта относительно центра шара:

$$\frac{d^2}{dt^2} \delta = A \sin(\omega t), \quad (2.10)$$

где A – константа, подлежащая определению;

$$\omega := \frac{\pi}{\tau}. \quad (2.11)$$

(Уравнение второго закона Ньютона в совокупности с (2.9) приводит к уравнению гармонических колебаний, решение которого можно преобразовать к виду (2.10). Прим. пер.). Интегрируя (2.10) и используя граничные значения из таблицы 1, получим:

$$V_{x1} := \frac{V_x}{2} (1 + \cos(\omega t)), \quad (2.12)$$

$$x_1 := -r + \frac{V_x}{2} \left(t + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right). \quad (2.13)$$

(Здесь и далее индекс «1» относится к первому шару, а «2» – ко второму. Прим. пер.). Аналогично:

$$V_{x2} := \frac{V_x}{2} (1 - \cos(\omega t)), \quad (2.14)$$

$$x_2 := r + \frac{V_x}{2} \left(t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right). \quad (2.15)$$

Продифференцируем соотношения для скоростей и получим зависимости ускорений шаров от времени:

$$A_{x1} := -\frac{\omega}{2} V_x \sin(\omega t), \quad (2.16)$$

$$A_{x2} := \frac{\omega}{2} V_x \sin(\omega t). \quad (2.17)$$

Отсюда найдем выражения для нормальных сил, действующих на шары во время их контакта:

$$F_{x_1} := - \frac{M\omega V_x}{2} \sin(\omega t), \quad (2.18)$$

$$F_{x_2} := \frac{M\omega V_x}{2} \sin(\omega t). \quad (2.19)$$

Как и ожидалось, на шары S_1 и S_2 действуют равные по величине и направленные противоположно друг другу силы. Сила F_1 действует на первый шар в отрицательном направлении оси X , а F_2 – на второй шар в положительном направлении.

3. Тангенциальная компонента

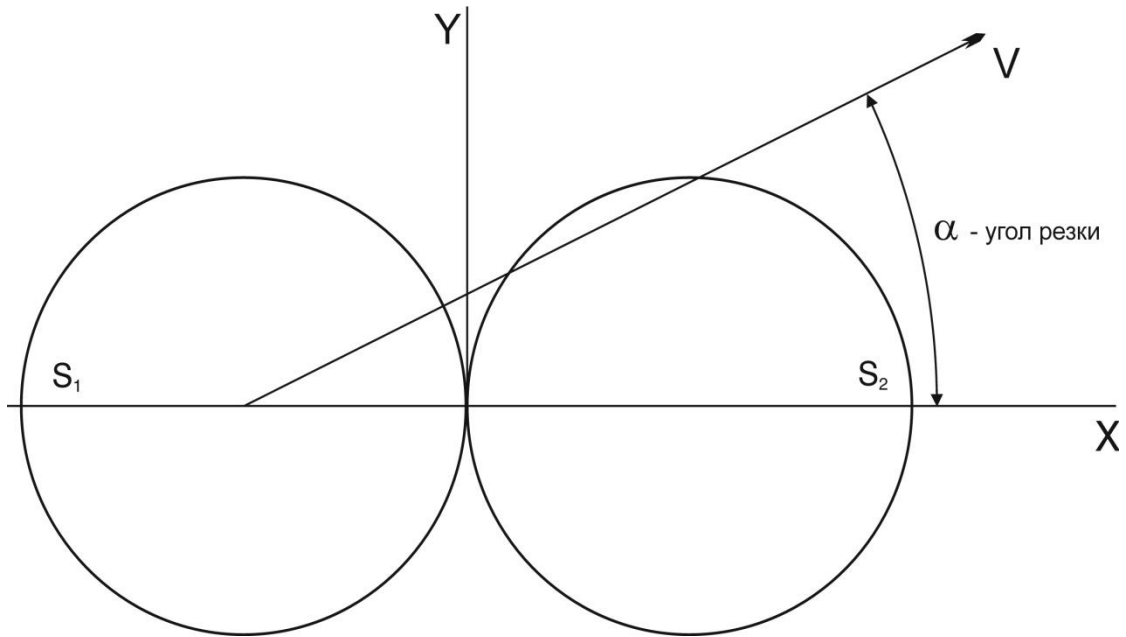


Рис.3. α – угол резки между начальной скоростью первого шара и осью X , проходящей через центры шаров при соприкосновении.

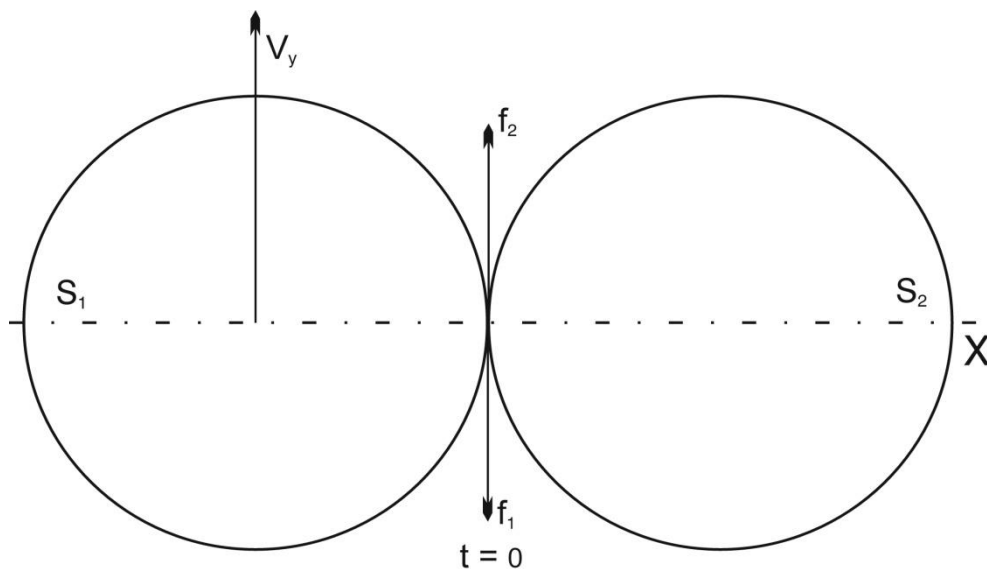


Рис.4. В течение времени контакта к шарам могут быть приложены равные по величине тангенциальные силы, направленные противоположно друг другу.

(Векторы вращающих моментов $\Gamma_1 = r \times f_1$ и $\Gamma_2 = r \times f_2$ перпендикулярны плоскости рисунка 4 и направлены от читателя при $r \times \beta < V_{y1}$. (Здесь \times – символ векторного произведения. Прим. пер.). Тангенциальные силы представляют собой усилие, необходимое для преодоления трения, возникающего при скольжении поверхностей шаров друг относительно друга. Когда скорости в месте контакта шаров равны, скольжение отсутствует и тангенциальные силы не действуют).

Выше отмечалось, что когда вектор скорости первого шара не совпадает с линией, проходящей через центры шаров, контакт называется соударением на резке. От соударений «в лоб» оно отличается наличием дополнительной тангенциальной компоненты скорости величиной $V \sin \alpha$ и поворотом поверхности первого шара за счет наличия угловой скорости вращения (см. рис.4). Угол α между вектором V и осью X называется углом резки (см. рис.3). Обсуждавшийся выше случай действия нормальной компоненты скорости характеризовался симметрией сил и деформации поверхностей шаров при квази-упругом соударении. При рассмотрении же действия тангенциальной составляющей нужно учитывать, что импульс тангенциальной силы, воздействующей на биток, приводит к равному по величине, но несимметрично направленному импульсу, приложенному к прицельному шару (см. рис.5). При их совместном действии, материал, из которого изготовлены шары, в области контакта растягивается. Для энергий, присущих соударениям в бильярде, напряжение в материале не превосходит его предела упругости. Тем не менее, эффект растяжения вносит в рассмотрение процесса соударения дополнительные сложности, которые на настоящий момент не вполне истолкованы и подлежат дополнительным исследованиям. Помимо этого, по сравнению со случаем действия только нормальной скорости, растяжение изменяет объем сжатой при контакте шаров области. В силу этого, математическое описание процесса соударения при наличии резки усложняется. Осознавая неизбежность некоторых погрешностей в излагаемом ниже анализе, я все же сделаю не подтвержденное опытным путем предположение о том, что для рассматриваемых энергий можно разделить влияние нормальной и тангенциальной компонент скорости на динамику шаров. Иными словами, действие этих компонент будет рассматриваться независимо друг от друга, как это установлено первой теоремой Кастильяно [8, стр.51] (С.А.Castigliano). (Теорема Кастильяно определяет, что для статически нагруженного тела перемещение рассматриваемой точки можно найти как первую частную производную энергии деформации по каждой из приложенных сил). Полагаю, что для рассматриваемых в этой работе физических свойств и величин энергий ошибки будут весьма незначительными. Поскольку перемещение шаров стеснено горизонтальной поверхностью, на которой не действуют силы трения, продольное вращение шаров может проявляться лишь в период их контакта. В реальной игре на лузном бильярде игроки обычно сознательно придают битку продольное вращение, которое влияет на траектории обоих шаров после соударения. В этой же работе полагается, что биток может обладать лишь боковым вращением, что является лишь частным случаем. (Таким образом, в этой работе рассматриваются соударения, при которых биток не обладает продольным вращением – верхним и нижним. Когда у битка нет и бокового вращения, соударения называют плоскими. При наличии же бокового вращения такие соударения называют частично плоскими. Прим. пер.).

Во время контакта $0 \leq t \leq \tau$ на шары действуют нормальные силы (см. соотношения (2.18), (2.19)) и тангенциальные силы (см. рис.4):

$$F_y = \mu F_N = M \frac{d}{dt} V_y = \frac{I}{r} \frac{d^2}{dt^2} \theta, \quad (3.1)$$

где I – момент инерции шара; θ – угол поворота (см. рис.5); μF_N – тормозящая сила трения. Рисунок 5 графически демонстрирует эффект действия тангенциальной составляющей скорости во время соударения.

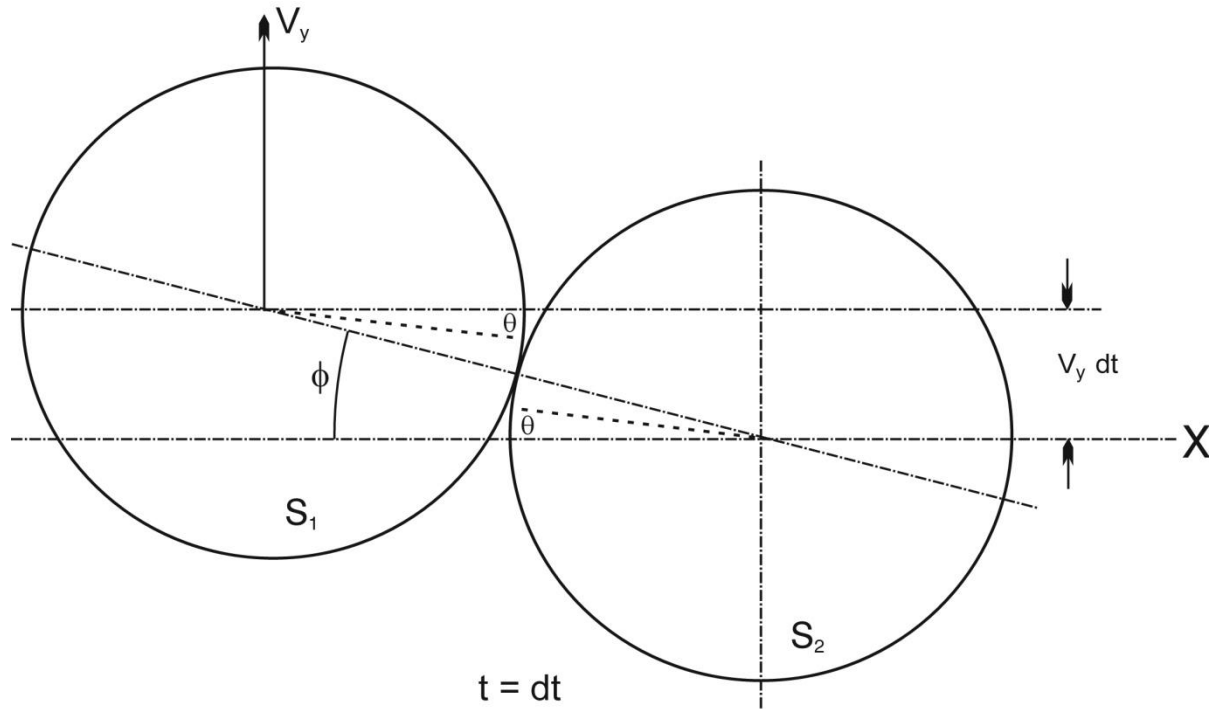


Рис.5. К моменту времени $t = dt$ шары повернулись по часовой стрелке на угол θ . Угловое перемещение первого шара по отношению ко второму характеризуется углом ϕ . Следует обратить внимание на то, что $r \phi > r \theta$ при $\beta_{10} = 0$.

Момент инерции шара относительно его центра масс определяется равенством:

$$I := \frac{2}{5} M r^2, \quad (3.2)$$

Выразим тангенциальные силы, действующие на шары в противоположных направлениях:

$$M \frac{d^2}{dt^2} y_1 = - \varepsilon \mu F_{x_1} = f_1, \quad (3.3)$$

$$M \frac{d^2}{dt^2} y_2 = \varepsilon \mu F_{x_2} = f_2, \quad (3.4)$$

где

$$\varepsilon = 1, \text{ если } r \beta_{10} + V_y \geq 0, \quad (3.5)$$

$$\varepsilon = -1, \text{ если } r \beta_{10} + V_y < 0. \quad (3.6)$$

Начальные условия в момент времени $t = 0$: V_y – начальная скорость первого шара по оси Y ; начальная скорость второго шара по оси Y равна нулю; $x = 0, y = 0$ – положение точки контакта шаров при $t = 0$. Найдем решение уравнений (3.3), (3.4) для проекций скоростей на ось Y :

$$V_{y_1} := V_y - \frac{\varepsilon \mu V_x}{2} (1 - \text{Cos}(\omega t)), \quad (3.7)$$

$$V_{y_2} := \frac{\varepsilon \mu V_x}{2} (1 - \text{Cos}(\omega t)), \quad (3.8)$$

Вращательное движение каждого шара описывается уравнением:

$$I \frac{d^2}{dt^2} \theta = \varepsilon \mu r F_{x_1} . \quad (3.9)$$

Скорости на поверхностях обоих шаров:

$$V_1 := V_{y_1} + r \beta_1 , \quad (3.10)$$

где β_1 – угловая скорость бокового вращения первого шара:

$$\beta_1 := \beta_{10} - \frac{5 \varepsilon \mu V_x}{4 r} (1 - \text{Cos}(\omega t)) , \quad (3.11)$$

Подставляя (3.7) и (3.11) в (3.10), получим:

$$V_1 := (V_y + r \beta_{10}) - \frac{7 \varepsilon \mu V_x}{4} (1 - \text{Cos}(\omega t)) . \quad (3.12)$$

Аналогично, получим:

$$\beta_2 := \frac{5 \varepsilon \mu V_x}{4 r} (1 - \text{Cos}(\omega t)) , \quad (3.13)$$

$$V_2 := \frac{7 \varepsilon \mu V_x}{4} (1 - \text{Cos}(\omega t)) . \quad (3.14)$$

Условие прекращения скольжения поверхностей шаров друг относительно друга состоит в равенстве скоростей в месте соприкосновения:

$$V_1 - V_2 = 0 . \quad (3.15)$$

Если условие (3.15) не может быть выполнено, то это означает, что скольжение будет иметь место в течение всего времени контакта. Решая уравнение (3.15), найдем момент времени T , в который скорости поверхностей шаров становятся равными друг другу и тангенциальные силы перестают действовать (в предположении, что в этот момент нет остаточной энергии деформации и динамических скручивающих вибраций в одном из шаров):

$$T := \frac{\tau}{\pi} \text{Arccos} \left[1 - \frac{2 (V_y + r \beta_{10})}{7 \varepsilon \mu V_x} \right] . \quad (3.16)$$

Значение момента времени T , до которого поверхности шаров продолжают перемещаться со скольжением, не может быть найдено из (3.16), если выполняется условие

$$\frac{V_y + r \beta_{10}}{\mu V_x} > 7 . \quad (3.17)$$

Таким образом

$$T := \frac{\tau}{\pi} \text{Arccos} \left[1 - \frac{2}{7} \left(\frac{V_y + r \beta_{10}}{\varepsilon \mu V_x} \right) \right] , \quad (3.18)$$

если

$$\frac{V_y + r \beta_{10}}{\varepsilon \mu V_x} \leq 7 , \quad (3.19)$$

и

$$T := \tau \text{ при } \frac{V_y + r \beta_{10}}{\varepsilon \mu V_x} > 7 . \quad (3.20)$$

При определении проекций скоростей шаров на ось Y и конечных угловых скоростей полагалось, что после момента времени $t = T$ по оси Y не действуют никакие силы. Соответственно:

$$V'_{y_1} := V_y - \frac{\varepsilon \mu V_x}{2} (1 - \text{Cos}(\omega T)) , \quad (3.21)$$

$$V'_{y_2} := \frac{\varepsilon \mu V_x}{2} (1 - \text{Cos}(\omega T)) . \quad (3.22)$$

Здесь верхний индекс «'» указывает на то, что значение величины соответствует моменту разделения шаров после соударения. Проекции конечных скоростей шаров на ось X в момент $t = \tau$ определяются соотношениями (2.12), (2.14). Аналогично, и конечные угловые скорости шаров (см. (3.11), (3.13)) вычисляются при $t = T$. Координаты шаров по оси Y в момент времени $t = \tau$ определяются соотношениями

$$y'_{1} := \int_0^T \left(V_y - \frac{\varepsilon \mu V_x \omega t}{2} \sin(\omega t) \right) dt + V'_{y_1} (\tau - T), \quad (3.23)$$

$$y'_{2} := \int_0^T \frac{\varepsilon \mu V_x \omega t}{2} \sin(\omega t) dt + V'_{y_2} (\tau - T). \quad (3.24)$$

(По какой-то причине автор не посчитал нужным вычислить интегралы в (3.23) и (3.24), хотя сделать это совсем не трудно:

$$y'_{1} := V_y T - \frac{\varepsilon \mu V_x}{2} \left(\frac{\sin(\omega T)}{\omega} - T \cos(\omega T) \right) + V'_{y_1} (\tau - T),$$

$$y'_{2} := \frac{\varepsilon \mu V_x}{2} \left(\frac{\sin(\omega T)}{\omega} - T \cos(\omega T) \right) + V'_{y_2} (\tau - T).$$

Прим. пер.).

В конце соударения при $t = \tau$ полная энергия Ψ представляет собой сумму

$$\Psi = \Psi_x + \Psi_y + \Psi_\theta + \Psi_f, \quad (3.25)$$

где Ψ_x , Ψ_y – кинетические энергии, определяющиеся поступательными скоростями по осям X и Y ; Ψ_θ – кинетическая энергия вращения двух шаров; Ψ_f – тепловая энергия, выделяющаяся при скольжении поверхностей шаров друг относительно друга:

$$\Psi_x := \frac{M}{2} (V'_{x_1}{}^2 + V'_{x_2}{}^2), \quad (3.26)$$

$$\Psi_y := \frac{M}{2} (V'_{y_1}{}^2 + V'_{y_2}{}^2), \quad (3.27)$$

$$\Psi_\theta := \frac{I}{2} (\beta'_{1}{}^2 + \beta'_{2}{}^2). \quad (3.28)$$

Поскольку кинетическая энергия, связанная с компонентами скоростей по оси X , сохраняется (величина V_{x_2} в момент $t = \tau$ равна V_{x_1} в момент $t = 0$), энергия, затрачиваемая на ускорение второго шара по оси Y , выделение тепла и изменение вращения обоих шаров, эквивалентна энергии, связанной с компонентой поступательной скорости первого шара по оси Y и/или его вращательной энергией. Кроме того, поскольку угловые ускорения шаров эквивалентны, так же как и их ускорения поступательного движения по оси Y , используя соотношение для момента инерции шара (см. (3.2); прим. пер.), можно получить связь между энергией вращения второго шара Ψ_{rot} и энергией его поступательного движения Ψ_{trans} по оси Y :

$$\Psi_{\text{rot}} / \Psi_{\text{trans}} = 5/2. \quad (3.29)$$

Выражение же для тепловой энергии, следующее из факта сохранения энергии, принимает вид:

$$\Psi_f = \int_0^T (V_1(t) - V_2(t)) \mu F_x(t) dt. \quad (3.30)$$

Величина конечной скорости первого шара определяется соотношением

$$V'_{1} := \sqrt{V'_{x_1}{}^2 + V'_{y_1}{}^2}, \quad (3.31)$$

в котором компоненты V'_{x_1} и V'_{y_1} удовлетворяют равенствам (2.12) и (3.7). Отклонение вектора конечной скорости от оси X можно найти следующим образом:

$$\theta_1 := \text{Arcsin} \left(\frac{V'_{y_1}}{V'_{1}} \right). \quad (3.32)$$

Соотношения для расчета отклонения вектора конечной скорости второго шара от оси X аналогичны:

$$V'_2 := \sqrt{V'_{x_2}{}^2 + V'_{y_2}{}^2}, \quad (3.33)$$

$$\theta_2 := \text{Arctg} \left(\frac{V'_{y_2}}{V'_{x_2}} \right). \quad (3.34)$$

4. Результаты

В разделе 3 было показано, что интенсивность бокового вращения и трение между поверхностями шаров во время соударения непосредственно влияют на величину скорости второго шара после контакта и отклонение ее направления от оси X. (Этот результат опровергает присущее неопытным игрокам в Пул убеждение о том, что траектория второго шара всегда проходит по оси X. Такое мнение будет справедливым лишь в случаях, когда коэффициент трения между шарами принимает нулевое значение). Скорость же первого шара после соударения всегда будет направлена параллельно оси Y, независимо от скорости до контакта, вращения, угла резки и коэффициента трения μ .

Представленные ниже графики иллюстрируют влияние различных параметров, обсуждавшихся выше, на отклонение направления конечной скорости второго шара от оси X.

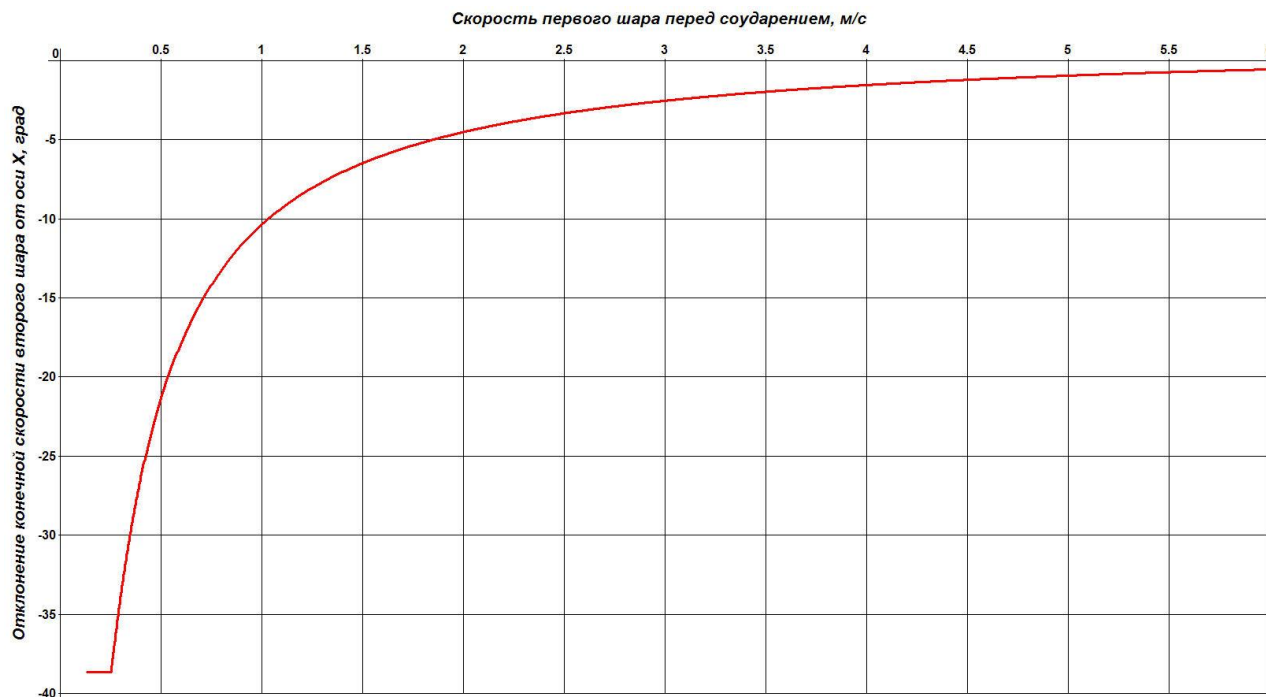


Рис.6. Параметры для расчетов: $\alpha = 10^\circ$; $\beta_{10} = -8$ Гц; $\mu = 0.8$. Иллюстрация влияния начальной скорости бита на отклонение конечной скорости второго шара. Следует обратить внимание на то, что отклонения значительней при малых скоростях бита.

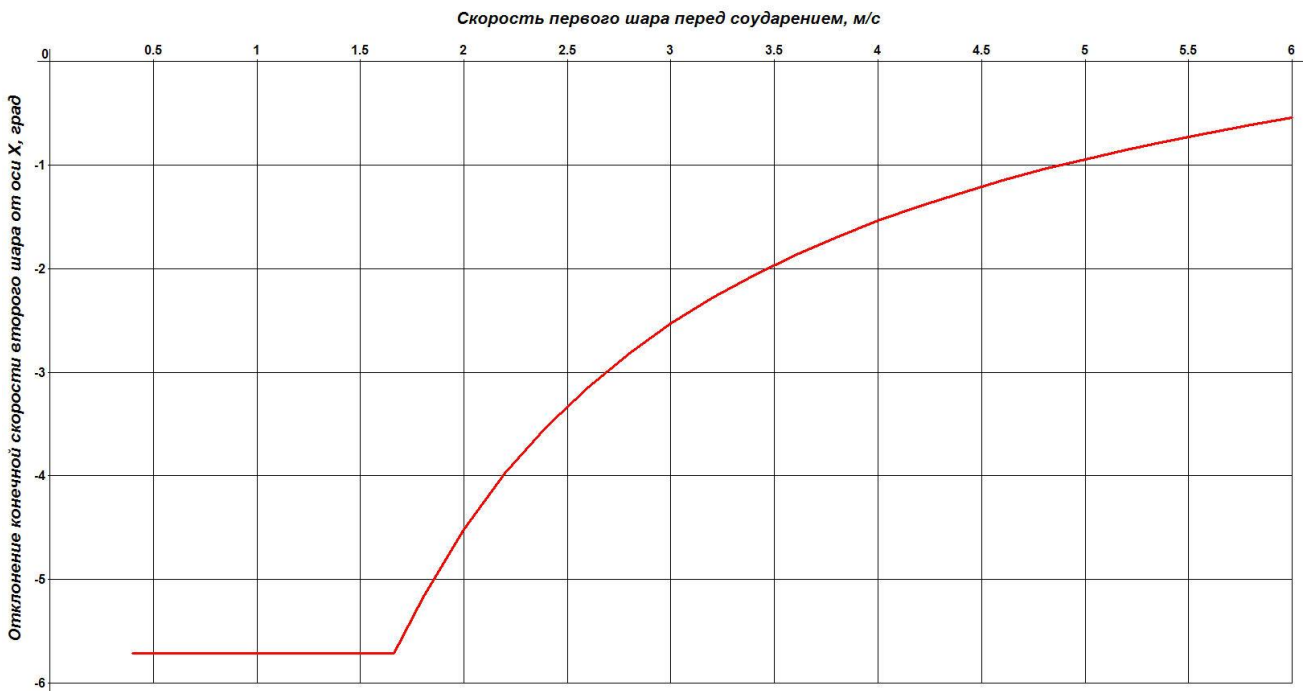


Рис.7. Параметры для расчетов: $\alpha = 10^\circ$; $\beta_{10} = -8$ Гц; $\mu = 0.1$. Иллюстрация значительного уменьшения отклонения конечной скорости второго шара при снижении величины коэффициента трения. Наличие горизонтального участка зависимости при малых скоростях – следствие пониженного обмена энергией между шарами при скольжении поверхностей.

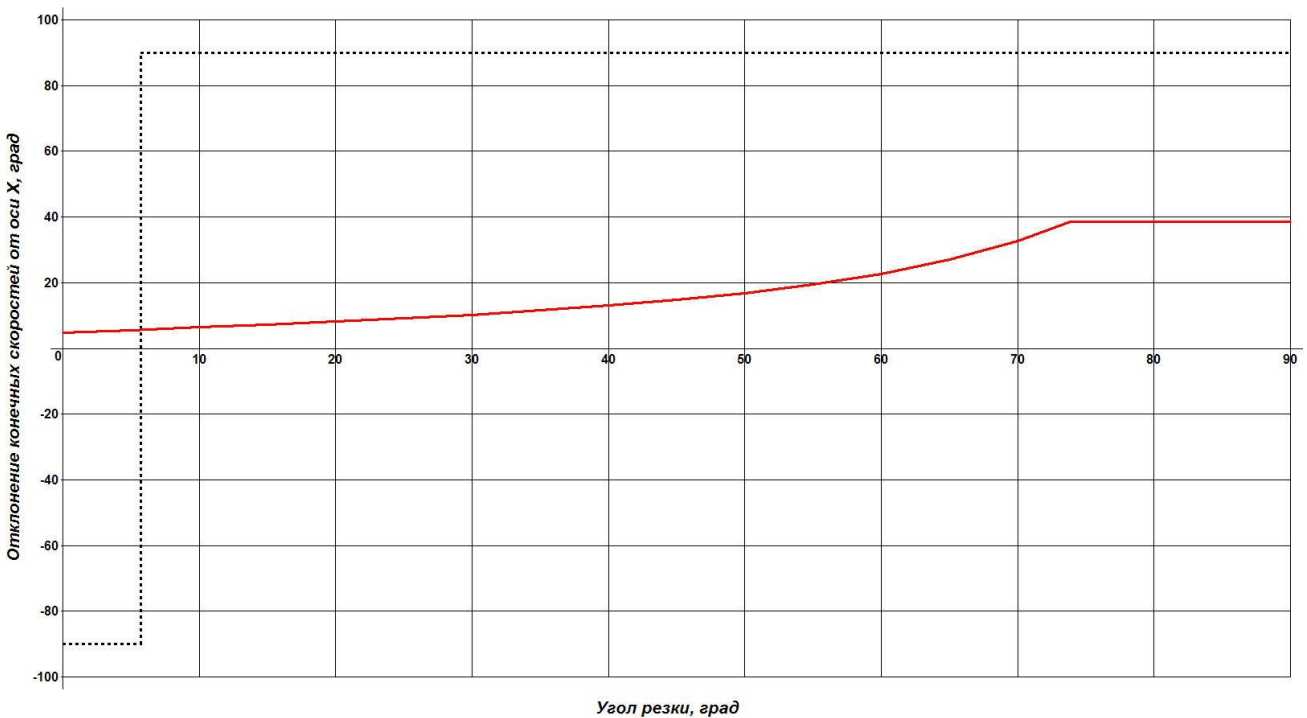


Рис.8. Параметры для расчетов: $V = 3$ м/с; $\beta_{10} = 10$ Гц; $\mu = 0.8$. Иллюстрация влияния угла резки на отклонение конечной скорости битка (черная прерывистая линия) и второго шара (красная линия). Наличие горизонтального участка зависимости отклонения скорости второго шара – следствие пониженного обмена энергией при скольжении поверхностей шаров друг относительно друга. Следует обратить внимание на мгновенное изменение отклонения скорости битка.

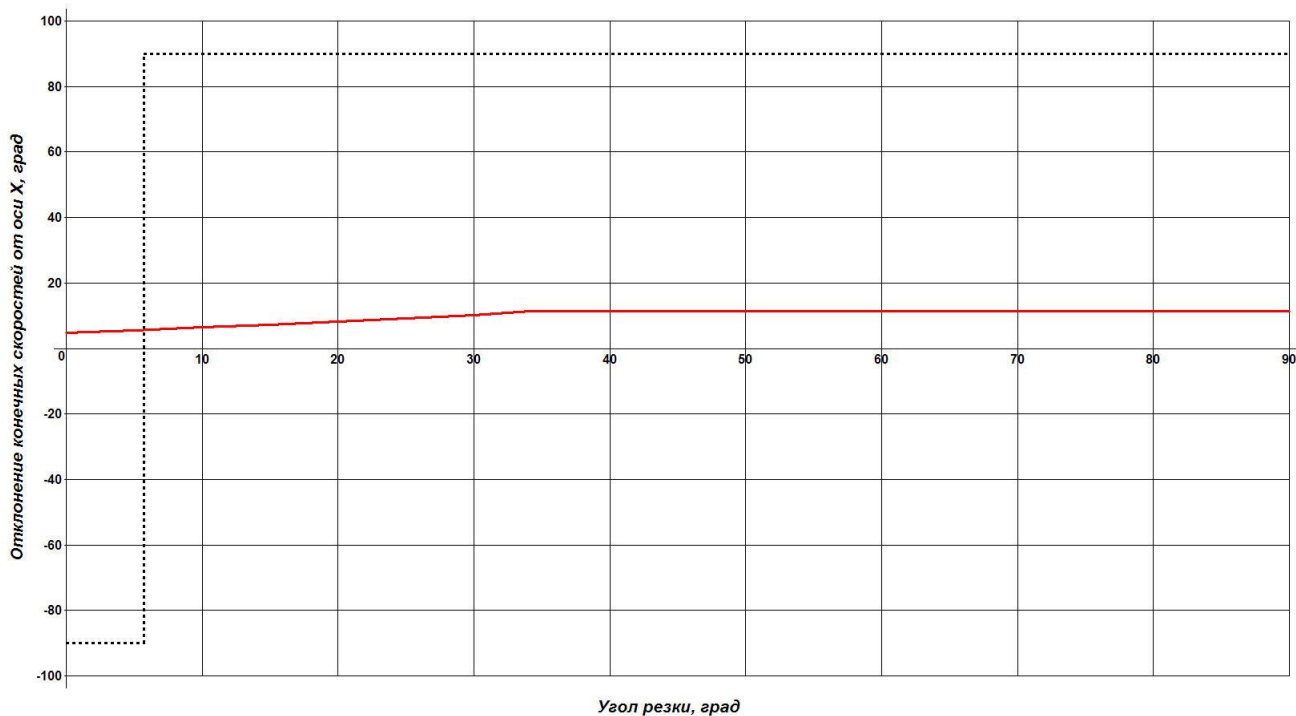


Рис.9. Параметры для расчетов: $V = 3$ м/с; $\beta_{10} = 10$ Гц; $\mu = 0.2$. Иллюстрация уменьшения отклонения конечной скорости второго шара при снижении величины коэффициента трения.

В большинстве случаев при игре на лузном бильярде для достижения требуемого результата игроки стремятся затрачивать минимальное количество энергии. Помимо этого, при первом же удобном случае с поверхностей шаров убирается загрязненность. И то и другое расширяет возможности управления конечным положением битка за счет придаваемого ему вращения. Менее же опытные игроки могут, напротив, придавать битку повышенные скорости, за счет чего уменьшаются ошибки в конечном отклонении прицельного шара. Обращаясь к рисунку 6, игрокам полезно для себя отметить, что при малых скоростях небольшие вариации скорости приводят к чувствительным изменениям угла θ_2 . Рисунок 7 «предлагает» плохим игрокам незаметно наносить смазку на поверхность битка, чтобы второй шар двигался ожидаемым для них образом, а более продвинутые игроки приходили от этого в замешательство. (Конечно же, здесь автор показывает, что юмор ему не чужд. Но, как говорят: «В каждой шутке есть доля шутки». В некоторых трюковых ударах игроки специально (и незаметно для наблюдающих) смазывают место контакта шаров водой (слюной) или тальком. Правда, это проделывают не с битком, а с соприкасающимися прицельными шарами. Прим. пер.).

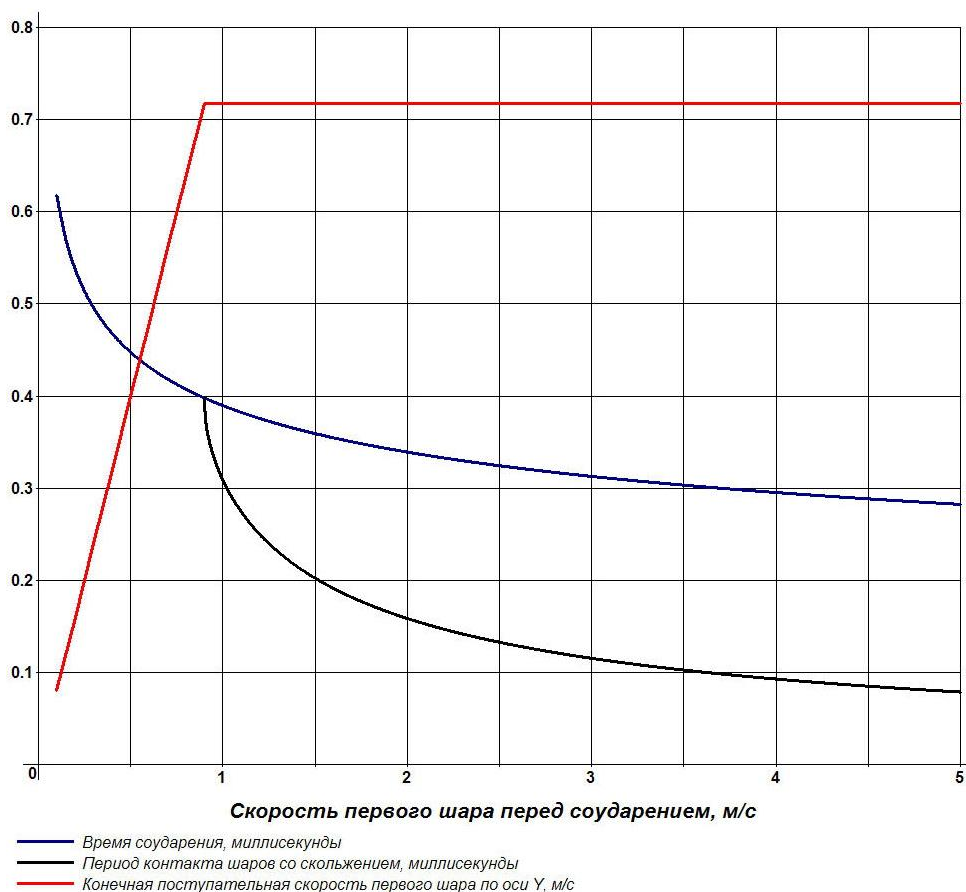


Рис.10. Параметры для расчетов: $\alpha = 0^\circ$; $\beta_{10} = -28$ Гц; $\mu = 0.8$. Иллюстрация связи поступательной скорости бита после соударения (красная линия) с периодом контакта шаров со скольжением T (черная линия) и временем соударения τ (синяя линия). Следует отметить, что при $T < \tau$ величина скорости V'_{y1} неизменна. При отсутствии резки ($\alpha = 0^\circ$) всю кинетическую энергию поступательного движения по оси Y биток получает от своего вращения перед соударением. Такое преобразование энергии происходит только в период контакта шаров со скольжением.

5. Благодарности

Эта работа была выполнена исключительно для удовольствия и без чьей-либо помощи, помимо превосходного профессорско-преподавательского состава, обучавшего меня физике в государственном университете Портленда в 60-х годах прошлого века. Приятно отметить, что я обошелся без поддержки Национального Научного Фонда.

«Самые сильные аргументы ничего не доказывают, пока выводы не проверены опытным путем. Экспериментальная наука – королева науки, она вершит все теории».

Роджер Бэкон. Третье сочинение.

Литература

- [1]. H. Hertz. Uber die Berührung fester elastischer Körper (On the contact of elastic solids). J. Reine Angewandte Mathematik 1882; 92: 156-171
- [2]. Landau L.D. and Lifshitz E.M. Theory of Elasticity, Pergamon, London, 1959, p.30
- [3]. Xiang Zhang and Loc Vu-Quoc. Modeling the dependence of the coefficient of restitution on the impact velocity in elasto-plastic collisions. International Journal of Impact Engineering 2002; 27;:317-341.
- [4]. Johnson K.L. Contact mechanics, 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 1985.
- [5]. Stronge W.J. Coupling of friction and internal dissipation on planar collision of restitution. In: Raous M, editor. Contact Mechanics. New York: Plenum Press, 1995. p.417-26.
- [6]. Vu-Quoc L., Zhang X., Lesburg L. Contact forcedisplacement relations for spherical particles accounting for plastic deformation. International Journal of Solids and Structures 2001; 38(36-37):6455-90.
- [7]. Walton O.R. Numerical simulation of inelastic frictional particle-particle interactions. In: Roco M.C., ed. Particulate Two-Phase Flow. Stoneham, MA: Butterwort-Heinemann, 1993. p.884-911 [chapter 25].
- [8]. Roark R.J. Formulas for Stress and Strain, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1954
- [9]. Marion J.B. Classical Dynamics of Particles and Systems, New York: Academic Press, 1965. p. 130