Сергей Тихонов

Оценивание виртуальной ширины створа бильярдной лузы при прямых ударах

Июнь, 2014

Нет худа без добра
(*Народная мудрость*)

Трудно ли точно выполнить прямой удар, после которого биток движется по центральной линии, проходящей через центры неподвижных шаров? Не сомневаюсь в том, что подавляющее большинство любителей бильярда ответит на этот вопрос утвердительно. Попробую привести некоторые аргументы, свидетельствующие в пользу такой точки зрения. Если следовать строгой «букве» математики, то вероятность абсолютно точного выполнения прямого удара равна нулю. И с этой позиции вполне очевидно, что обсуждаемая «трудность» неимоверно высока. Но голая теоретизация не интересна для реальной бильярдной игры. Игрокам не нужны отвлеченные научные рассуждения; для них полезной будет какая-нибудь «приземленная» модель, дающая достаточно точное приближение к тому, что происходит на практике. Поэтому, говоря о «точном» ударе, я буду подразумевать такое его выполнение, при котором отклонение битка от центральной линии будет неразличимо «на глаз». Так, что же препятствует точному удару? Таких факторов – множество, перечислю некоторые из них:

– неграмотный подход к столу для выполнения удара и принятие неправильной игровой стойки (включая хват, мост и пр.);
– недостаточная концентрация исключительно на ударе;
– неверное прицеливание;
– недостаточная расслабленность ударной руки;
– помехи, связанные с психологическим состоянием (включая мандраж);
– непрямолинейность перемещения кия при выполнении ударного движения (обусловленная как систематическими ошибками, свойственными устоявшейся технике, так и случайными техническим ошибками);
– снос битка, проявляющийся вследствие нецентральности удара (сознательного или непреднамеренного придания шару бокового вращения);
– искривление траектории битка, проявляющееся в силу неотъемлемой наклонности удара в сочетании с его нецентральностью (эффект массе);
– случайные помехи, оказывающие влияние на движение битка по сукну (соринки, неабсолютная горизонтальность игровой поверхности и пр.).

Конечно же, приведенный выше перечень факторов не является полным. Да я и не стремился добиться здесь полноты перечисления. Для дальнейшего изложения важно понимание того, что на практике игроку «противодействуют» многочисленные и разнообразные факторы, «перебороть» которые отнюдь не просто. Недаром же, продвинутые игроки лишь годами изнурительных и однообразных тренировок добиваются высокой точности выполнения определенных ударов, самым простым из которых может показаться прямой удар. Однако, эта простота – только кажущаяся. Ведь, стоит даже самому мастеровитому игроку на некоторое время прекратить регулярную бильярдную практику, как тут же вся мнимая простота с отчетливой ясностью оборачивается целым «букетом» нелепых промахов.

На основании сказанного выше можно было бы, вроде, сделать однозначный вывод: все вокруг в той или иной мере мешает игроку точно выполнять прямые удары. Однако, вокруг нас можно увидеть совсем немало игроков, способных с удивительной точностью и постоянством «укладывать» прицельные шары в лузы с помощью прямых ударов. Только ли врожденный талант и титанический подготовительный труд тому «виной»? Думается, что нет. Мне представляется, что «в пользу игрока» тоже действуют некоторые факторы. И об одном из них – влиянии эффекта отброса прицельного шара (ЭОПШ) на виртуальную ширину лузного створа – пойдет ниже речь.

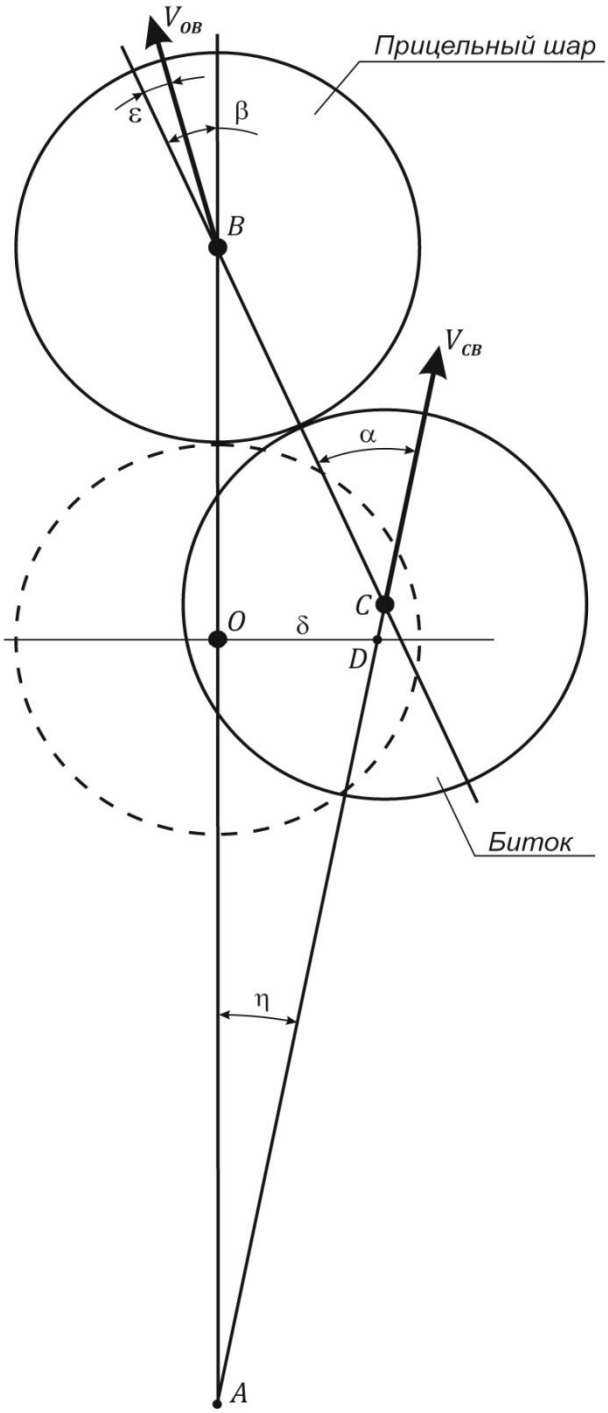

Рис.1. Соударение шаров после прямого удара, выполненного с угловой ошибкой η.

Обратимся к рисунку 1, на котором изображены биток (с центральной точкой C) и прицельный шар (с центром в точке B) в момент их соударения после выполнения прямого удара, при котором была допущена угловая ошибка величиной η. Точка A обозначает начальное положение битка, а точка O – положение его центра в том случае, если бы удар был выполнен точно, а биток двигался по центральной линии AB. Символом α обозначен угол резки, который образуют вектор поступательной скорости битка V_{CB} и линия соударения, проходящая через центры шаров C и B в момент их контакта. Величина δ, являющаяся длиной отрезка OD, представляет собой линейную ошибку выполнения удара. В силу того, что значения α и δ не являются нулевыми, линия соударения (являющаяся «ориентиром» движения прицельного шара после соударения) наклонена по отношению к центральной линии под углом β. Считая известными начальное расстояние между шарами ρ (равное длине отрезка AB), угловую ошибку удара η и равновеликие радиусы шаров R, определим величины δ, α и β. Из прямоугольного треугольника AOD следует, что

$$\delta = \left(\rho - 2R\right)\, tg\, \eta \ . \tag{1}$$

Применяя к треугольнику ABC теорему синусов, найдем связь

$$\frac{BC}{Sin\, \eta} = \frac{AB}{Sin < ACB} \ ,$$

из которой легко определяется угол ACB:

$$< ACB = arcsin\left(\frac{\rho\, Sin\, \eta}{2R}\right) ; \ < ACB \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) . \tag{2}$$

С помощью угла ACB, вычисляемого согласно (2), тривиально находятся искомые углы α и β:

$$\alpha = \pi - < ACB \ , \tag{3}$$

$$\beta = \pi - \eta - < ACB = \alpha - \eta \ . \tag{4}$$

Если бы при соударении между шарами не возникало трения, то после разделения прицельный шар двигался бы по прямой линии, совпадающей с линией соприкосновения CB. И многие новички бильярда ошибочно полагают, что именно это и происходит на самом деле. Но со временем приходит опыт, и доселе неведомое становится явным. Если битку при ударе не было придано сильного внешнего бокового вращения (для случая правой резки, изображенного на рисунке 1, такое вращение направлено влево, то есть против хода часовой стрелки, если смотреть сверху; в Русском Бильярде внешнее боковое вращение чаще называют прямым), то сила трения смещает вектор поступательной скорости прицельного шара V_{OB} в сторону резки на угол отброса ε. Это значит, что траектория прицельного шара располагается

между продолжениями вперед (на рисунке 1 – вверх) линии соударения и центральной линии. Обычно, ЭОПШ считается «вредным» для игрока явлением, с которым приходится не только считаться, но и «бороться» при помощи тех или иных ухищрений. Но в рассматриваемом случае выполнения прямого удара отброс прицельного шара несколько уменьшает нежелательное отклонение траектории шара от центральной линии, возникающее в силу допущенной при ударе угловой ошибки η. А значит, при этом «медаль поворачивается обратной стороной», и проявление ЭОПШ следует только приветствовать. Остается только восхищаться мудростью изречения, оставленного нам в наследство предками – «нет худа без добра»!

Для вычисления угла отброса прицельного шара воспользуемся следующими соотношениями из теоретической работы Доктора Дэйва (*David Alciatore aka Dr. Dave*) «*The Effects of Cut Angle, Speed, and Spin on Object Ball Throw*»:

$$\varepsilon = arctg\left(\frac{V_{OB_\tau}}{V_{OB_n}}\right), \tag{5}$$

$$V_{OB_n} = V_{CB}\, Cos\, \alpha\,, \tag{6}$$

$$V_{OB_\tau} = min\left\{\begin{matrix} \dfrac{\mu\, V_{CB}\, Cos\, \alpha}{\sqrt{\left(V_{CB}\, Sin\, \alpha - R\omega_Z\right)^2 + \left(R\omega_X\, Cos\, \alpha\right)^2}} \\ \dfrac{1}{7} \end{matrix}\right\}\left(V_{CB}\, Sin\, \alpha - R\omega_Z\right). \tag{7}$$

Здесь V_{OB_n} – нормальная составляющая поступательной скорости прицельного шара, направленная по линии соприкосновения; V_{OB_τ} – тангенциальная (касательная) составляющая поступательной скорости прицельного шара, направленная перпендикулярно линии соприкосновения в сторону резки (можно также сказать, что эта составляющая направлена параллельно касательной к поверхностям шаров, проведенной в точке их соприкосновения); V_{CB} – поступательная скорость битка; ω_Z – угловая скорость бокового вращения битка; ω_X – угловая скорость продольного (верхнего или нижнего) вращения битка; μ – коэффициент силы трения скольжения, возникающей при соударении шаров. Следует подчеркнуть, что указанные компоненты скоростей битка относятся к моменту времени непосредственно перед контактом, а компоненты прицельного шара – к моменту времени, наступающему сразу же после разделения шаров. Иными словами, соотношения (6) и (7) позволяют рассчитывать компоненты поступательной скорости, приобретаемой прицельным шаром сразу же после соударения, с помощью компонент поступательной и угловой скорости битка непосредственно перед контактом шаров. Помимо этого, не лишним будет и упоминание о том, что угол отброса ε определяет лишь начальное направление траектории прицельного шара. Если проводить более строгий анализ, то необходимо учитывать и то, что за счет трения между шарами прицельный шар приобретает и некоторое начальное вращение. Благодаря этому вращению, траектория прицельного шара в большинстве случаев не будет прямолинейной. Однако, расчеты (да и высокоскоростные съемки тоже) показывают, что изогнутость этой траектории настолько слабо выражена, что ей вполне можно пренебрегать и считать, что

прицельный шар перемещается по прямой линии, наклоненной к линии соударения под углом ε.

Чаще всего при выполнении прямого удара битку не придают бокового вращения – ведь обычно в этом нет никакой нужды. Действительно, использование такого вращения для управления перемещением битка после соударения шаров – практически трата усилий впустую. И единственное полезное проявление бокового вращения может состоять лишь в его передаче прицельному шару (да и то, только в весьма незначительной мере), чтобы помочь ему попасть внутрь лузы после соударения с ее губкой. Выполняя же удар без бокового вращения более точно, можно достичь того же самого результата атаки. Поэтому, далее будем полагать, что $\omega_Z = 0$. Введем в рассмотрение коэффициент качения K_{roll}, характеризующий соотношение между продольным вращением битка и его поступательной скоростью:

$$K_{roll} = \frac{R\omega_X}{V_{CB}}. \tag{8}$$

По величине коэффициента качения можно судить о характере движения битка. При $K_{roll} = 1$ продольное вращение и поступательное перемещение находятся в равновесном состоянии, и биток естественно катится по игровой поверхности. Такое движение наиболее часто встречается в бильярдной игре, ведь вовсе не малая сила трения, неизменно возникающая при скольжении поверхности шара относительно сукна, всегда стремится привести биток в состояние естественного качения. При $K_{roll} = 0$ биток не обладает как верхним, так и нижним вращением. Если в такой момент происходит контакт с прицельным шаром, то соударение называют плоским. После точно выполненного прямого удара плоское соударение приводит к тому, что биток полностью передает прицельному шару свою поступательную скорость и останавливается на месте. Именно поэтому в таких случаях говорят, что был выполнен удар с остановкой битка. Величины $K_{roll} < 0$ указывают на то, что при соударении биток имеет нижнее вращение, что приводит к его последующей оттяжке. И наоборот, если $K_{roll} > 0$, то после соударения биток продвигается вперед за приведенным в движение прицельным шаром. В результате перемещения вперед, биток может оказаться в лузе, что не всегда входит в планы игрока. Например, при игре в Пул и Снукер, попадание битка внутрь лузы классифицируется как фол. Поэтому, следует позаботиться о том, чтобы положительная величина K_{roll} не была слишком большой и не привела к нежелательным последствиям. В большинстве же разновидностей игр на Русском Бильярде ситуация иная – попадание битка в лузу считается легальным и результативным.

С учетом равенств $\omega_Z = 0$ и (8), соотношения (5)÷(7) приводятся к единственному равенству, позволяющему рассчитывать величину угла отброса ε:

$$\varepsilon = arctg\left[min\left\{\begin{matrix}\frac{\mu}{\sqrt{tg^2\alpha + K^2{}_{roll}}} \\ \frac{1}{7}\end{matrix}\right\} tg\,\alpha\right]. \tag{9}$$

Глядя на соотношение (9), можно сделать предположение о том, что величина ε вовсе не зависит от поступательной скорости битка, а значит – от силы нанесенного удара. И действительно, такая зависимость не будет проявляться во многих игровых ситуациях,

когда выполняется неравенство $\frac{\mu}{\sqrt{tg^2\alpha + K^2{}_{roll}}} > \frac{1}{7}$. Но в общем случае указанное предположение будет ошибочным. Зависимость ε от V_{CB} проявляется опосредованно – через коэффициент силы трения μ. Долгие годы в научном мире считалось, что с очень высокой точностью можно пренебрегать связью между μ и поступательной скоростью. Во многих практических приложениях это – действительно справедливое предположение, позволяющее избавиться от многочисленных «головных болей». Однако, в бильярде все обстоит не так радужно. Многие теоретики бильярда до сих пор полагают $\mu = const$ и «не зацикливаются» на анализе допускаемых при этом погрешностей, а напрасно. Действительно, в ряде практических случаев такое существенное упрощение имеет право на жизнь, но далеко не всегда!

Для вычисления коэффициента силы трения используем подход, предложенный Доктором Дэйвом в выше упомянутой работе. Основываясь на экспериментальных результатах Уэйлэнда Марлоу (*Wayland C. Marlow*), опубликованных в книге «*The Physics of Pocket Billiards*», Доктор Дэйв предложил использовать эмпирическую зависимость экспоненциального вида:

$$\mu = a + be^{-c\,V_{CB_\tau}}\,, \tag{10}$$

в которой $V_{CB_\tau} = V_{CB}\,Sin\,\alpha$ – тангенциальная составляющая поступательной скорости битка в момент соударения шаров; a, b и c – положительные коэффициенты, подлежащие определению с помощью экспериментальных данных. Для отыскания указанных коэффициентов требуется найти решение автоматически вытекающей из (10) системы нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \mu_1 = a + be^{-c\,V_{CB_{\tau_1}}}\,, \\ \mu_2 = a + be^{-c\,V_{CB_{\tau_2}}}\,, \\ \mu_3 = a + be^{-c\,V_{CB_{\tau_3}}}\,. \end{cases} \tag{11}$$

Здесь μ_1, μ_2, μ_3 – измеренные значения коэффициента μ при известных величинах тангенциальной скорости битка $V_{CB_{\tau_1}}$, $V_{CB_{\tau_2}}$, $V_{CB_{\tau_3}}$. Чтобы численно найти величины a, b и c, удовлетворяющие (11), необходимо иметь их начальное приближение, от которого будет зависеть, в частности, сходимость итерационной процедуры. Один из вариантов неплохого приближения и порекомендовал Доктор Дэйв. На мой же взгляд, коэффициенты a, b и c можно найти гораздо проще, если свести систему (11) к единственному трансцендентному уравнению и численно отыскать его корень (кстати, при этом не понадобится знать и «удачного» начального приближения). Такое уравнение нетрудно получить, если из первого уравнения системы выразить a, затем подставить найденное соотношение во второе уравнение и выразить b. Наконец, с помощью соотношений для a и b, из третьего уравнения системы можно получить уравнение для определения коэффициента c. Опуская несложные промежуточные выкладки, приведу вид этого трансцендентного уравнения:

$$(\mu_2 - \mu_3)\, e^{-cV_{CB_{\tau_1}}} + (\mu_3 - \mu_1)\, e^{-cV_{CB_{\tau_2}}} + (\mu_1 - \mu_2)\, e^{-cV_{CB_{\tau_3}}} = 0. \qquad (12)$$

Корень этого уравнения c можно найти различными численными способами – например, с помощью весьма простого метода дихотомии или метода золотого сечения. Но так как сделать это предстоит всего лишь единожды, то еще проще применить элементарный подбор с использованием какой-либо электронной таблицы, например – *Microsoft Excel*. С помощью экспериментальных данных, полученных Александром Сорокиным («*Ball Motion Properties in Stun and Follow Shots*»; $\mu_1 = 0.164$, $\mu_2 = 0.031$, $\mu_3 = 0.014$, $V_{CB_{\tau_1}} = 0$, $V_{CB_{\tau_2}} = 2$ м/с, $V_{CB_{\tau_3}} = 6$ м/с), я без особого труда нашел коэффициенты, позволяющие применять соотношение (10) для расчетов, относящихся к Русскому Бильярду: $a = 0.013773$, $b = 0.150227$, $c = 1.082847$. Сама зависимость коэффициента μ от тангенциальной скорости битка при соударении с прицельным шаром изображена на рисунке 2. Из него нетрудно видеть, что упомянутое выше допущение $\mu = const$ можно особо «не задумываясь» применять лишь в диапазоне тангенциальных скоростей $V_{CB_\tau} \geq 4$ м/с. При 2 м/с $\geq V_{CB_\tau} \geq 4$ м/с такое допущение требует дополнительных оговорок и обоснований, а при $V_{CB_\tau} \leq 2$ м/с вообще является недопустимым.

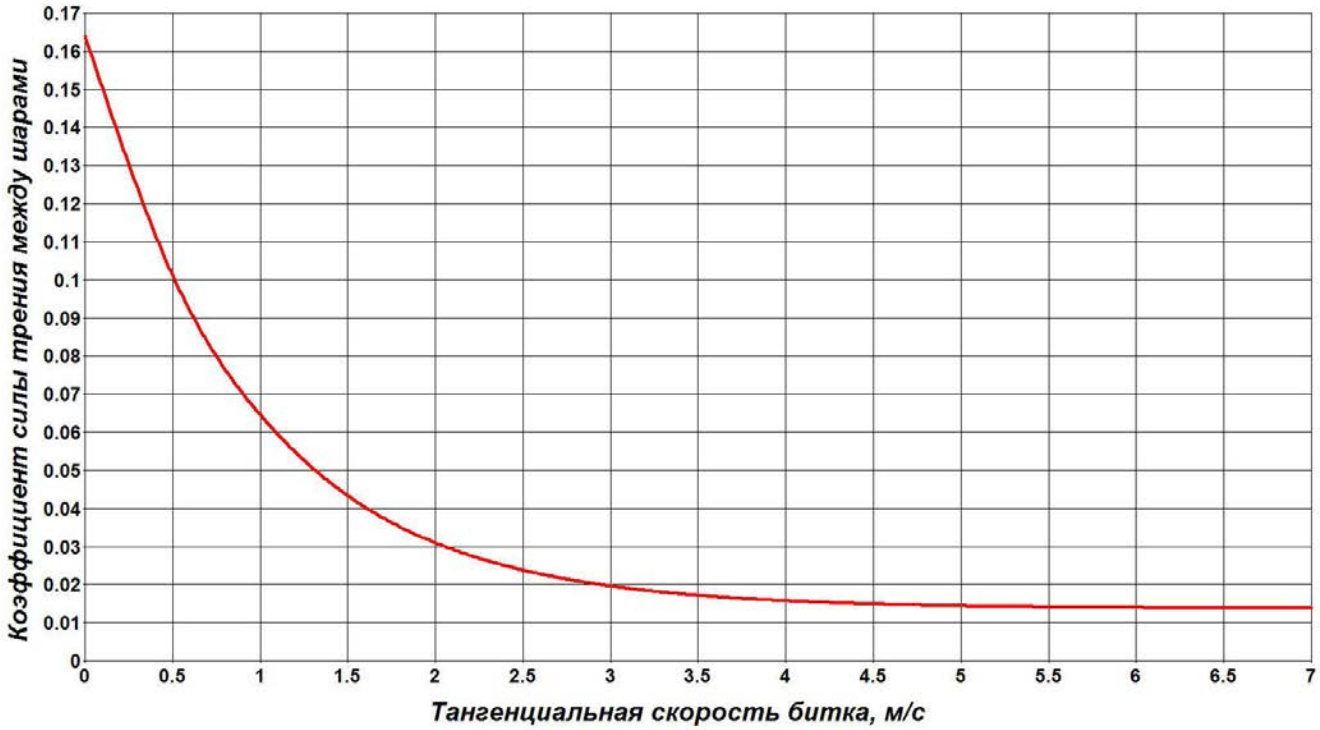

Рис.2. Зависимость коэффициента силы трения между шарами от тангенциальной скорости битка при соударении.

При проведении расчетов с помощью соотношения (9) необходимо выбирать минимальное значение из величин $\frac{\mu}{\sqrt{tg^2\alpha + K^2{}_{roll}}}$ и $\frac{1}{7}$. Это связано с тем, что при определенных сочетаниях параметров α, V_{CB}, K_{roll} между шарами происходит контакт со скольжением поверхностей друг относительно друга, а при иных – контакт со сцеплением. При скользящем контакте величина $\frac{\mu}{\sqrt{tg^2\alpha + K^2{}_{roll}}}$ меньше, чем $\frac{1}{7}$. Чтобы

наглядно изобразить сочетания параметров, при которых происходит переход с одного режима контакта на другой, можно приравнять указанные величины, учесть зависимость (10), связь $V_{CB_\tau} = V_{CB}\, Sin\, \alpha$ и получить следующее соотношение, позволяющее вычислять величину коэффициента качения при переходе между режимами:

$$K_{roll} = \pm\sqrt{49\left(a + be^{-c\,V_{CB}\,Sin\,\alpha}\right)^2 - tg^2\alpha}\,. \qquad (13)$$

Наличие двух возможных знаков (+ и –) перед радикалом говорит о том, что коэффициент качения может быть как положительным, так и отрицательным. Но для анализа перехода от режима сцепления шаров к режиму проскальзывания это не имеет значения, ведь в выражении $\sqrt{tg^2\alpha + K^2{}_{roll}}$ присутствует величина K_{roll} во второй степени. Поэтому, далее для простоты будем полагать, что величина K_{roll} положительна, памятуя при этом, что аналогичный эффект можно получать и при отрицательных значениях K_{roll}.

Результаты расчетов, полученные с помощью формулы (13), представлены на рисунке 3. Так как поступательная скорость битка $V_{CB} = 6$ м/с близка к предельно достижимой для человека величине, то практический интерес представляет только та часть рисунка, которая расположена выше линии красного цвета. Особого интереса не представляют и части графиков, соответствующие значениям $K_{roll} > 1$. Такие величины коэффициента качения свидетельствуют о режиме избыточной интенсивности продольного вращения битка, при котором точка его опоры проскальзывает относительно сукна в сторону игрока. Можно сказать и иначе: при этом шар пробуксовывает. Такой режим движения достигается только после ударов, нанесенных кием в очень высоко расположенные точки поверхности битка, и сохраняется вплоть до соударения шаров лишь в случаях, когда биток и прицельный шар изначально расположены на небольшом расстоянии. Подобные удары, чреватые возможным киксом, крайне редки в практике лузного бильярда, и поэтому случай $K_{roll} > 1$ следует относить скорее к экзотике.

Разберемся на примерах, как можно воспользоваться рисунком 3. Допустим, удар по битку был нанесен так, что при соударении шаров его скорость составляет $V_{CB} = 5$ м/с, а угол резки равен $\approx 2.83°$. По линии зеленого цвета можно определить, что переход между режимами сцепления и скольжения произойдет, если коэффициент качения будет равен ≈ 0.9. Нетрудно заметить, что величина $\frac{\mu}{\sqrt{tg^2\alpha + K^2{}_{roll}}}$, сравниваемая в (9) со значением $\frac{1}{7}$, уменьшается при возрастании K_{roll}. А это значит, что если при $V_{CB} = 5$ м/с и $\alpha \approx 2.83°$ коэффициент качения будет заключен в пределах $0.9 < K_{roll} \leq 1$, поверхности шаров будут проскальзывать друг относительно друга. И наоборот, при $K_{roll} < 0.9$ будет наблюдаться сцепление.

По рисунку 3 нетрудно понять, что при выполнении прямых ударов (когда угловые ошибки η невелики, а значит и углы резки α весьма малы) контакт шаров в подавляющем числе случаев носит сцепляющийся характер. Например, при $\alpha = 2°$ шары будут проскальзывать друг относительно друга лишь в диапазоне скоростей от $V_{CB} = 4$ м/с до $V_{CB} = 6$ м/с, и если при этом движение битка будет весьма близким к естественному качению. Более того, диапазон возможных значений коэффициента

качения (от 0.93 до 1 при $V_{CB} = 6$ м/с) сужается при уменьшении скорости битка, доходя до единственного значения $K_{roll} = 1$ при $V_{CB} = 4$ м/с. При всех же других значениях параметров V_{CB} и K_{roll} поверхности битка и прицельного шара будут друг с другом сцепляться.

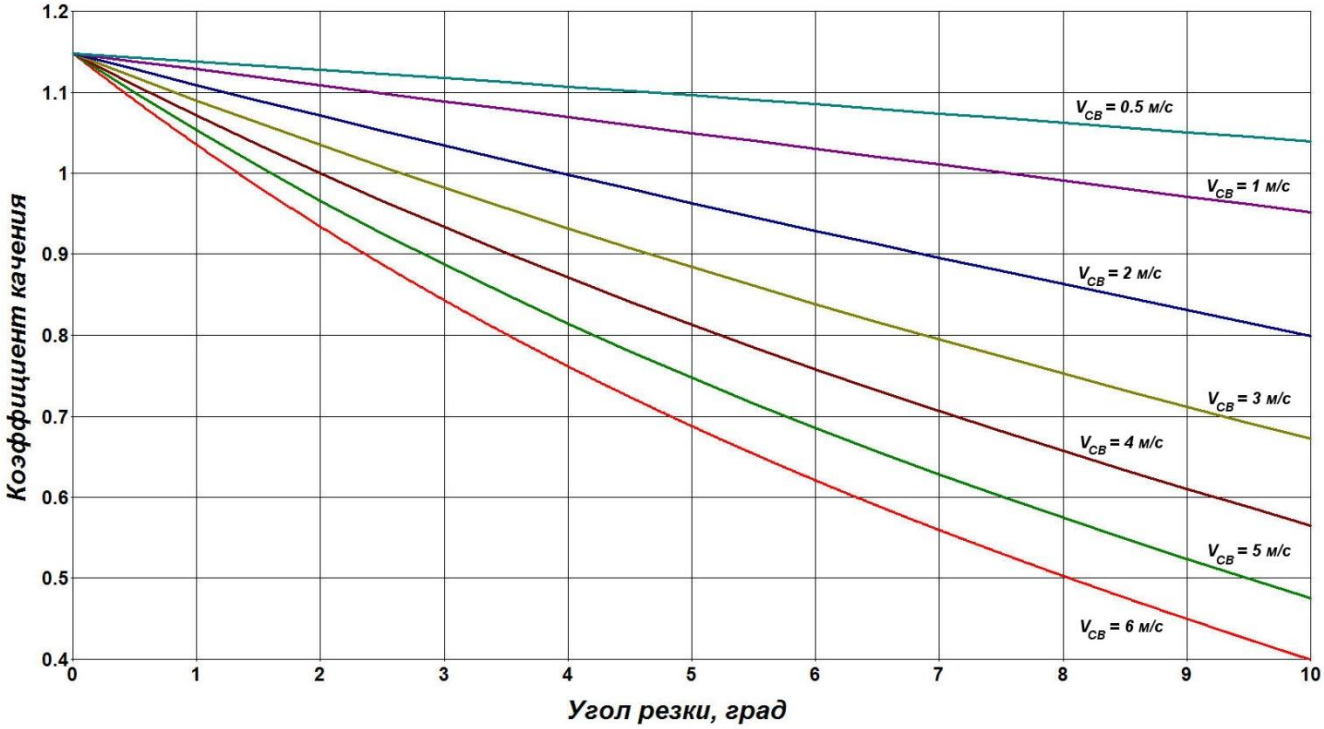

Рис.3. Соотношения параметров α, V_{CB} и K_{roll}, обеспечивающих переход со сцепляющегося режима контакта шаров на режим с проскальзыванием их поверхностей друг относительно друга.

Приведу еще один пример использования рисунка 3. Допустим, необходимо оценить диапазоны углов резки и поступательной скорости битка (силы нанесенного удара), в которых контакт шаров является скользящим, если соударение произошло при естественном качении битка ($K_{roll} = 1$). Учтем то, что для результативности прямого удара, выполненного с некоторой ошибкой, угол резки должен быть ограничен сверху. Например, будем считать, что он не должен превышать $4°$. С другой стороны, рисунок показывает, что режим скольжения возможен, если будет выполнено ограничение $\alpha > 1.33°$. Согласно рисунку, для скольжения при $\alpha = 4°$ поступательная скорость битка должна быть заключена в пределах 2 м/с $\lesssim V_{CB} \lesssim 6$ м/с, а при $\alpha = 3°$ – в пределах 2.65 м/с $\lesssim V_{CB} \lesssim 6$ м/с. По мере уменьшения угла резки диапазон возможных значений V_{CB} сужается и при $\alpha = 1.33°$ вырождается в единственную точку $V_{CB} = 6$ м/с.

Разберемся теперь в том, какие угловые отклонения траектории прицельного шара от центральной линии допустимы при игре в Русский Бильярд. Для этого обратимся к рисунку 4, на котором изображены атакуемая луза и прицельный шар (в статичном положении и при подходе к лузному створу). Точка B обозначает центр покоящегося до удара прицельного шара, находящегося на центральной линии лузы, проходящей через точки B, H и разделяющей лузный створ LR пополам. Символом γ обозначен угол наклона траектории шара к центральной линии лузы. Если рассматривать этот угол с позиции движения прицельного шара, выведенного из

статичного положения за счет соударения с битком, то он представляет собой разность углов, которыми мы оперировали ранее: $\gamma = \beta - \varepsilon$. Но на этот же угол γ можно «взглянуть» и от атакуемой лузы. При этом угол γ следует рассматривать в качестве допустимого углового отклонения прицельного шара от центральной линии лузы. В момент касания губки лузы L центр шара находится в точке E.

Найдем соотношение для вычисления угла γ. Для этого проведем линию LF параллельно траектории BE до пересечения в точке F с диаметром шара, перпендикулярным траектории его движения. Обозначим через W ширину створа лузы, расположенного между губками L и R, а через S – расстояние от исходного положения прицельного шара B до центральной точки лузного створа H. Введем в рассмотрение параметр , представляющий собой отношение ширины проекции шара, приходящейся внутрь створа лузы при касании шаром губки L, к диаметру, равному двум радиусам R. Иначе можно сказать, что представляет собой долю (относительную величину) диаметра шара, которая располагается со стороны створа лузы. По своей сути, параметр характеризует «плотность» контакта прицельного шара с губкой лузы. Если воспользоваться рисунком 4, то нетрудно увидеть, что на лузный створ проецируется часть диаметра, равная расстоянию между точками F и G. А это значит, что $= FG / 2R$ или $FG = 2R$. Если задаться величиной , равной единице, то это будет означать, что при проходе створа лузы шар будет касаться губки вскользь. При $= 0.5$ внутрь лузного створа будет приходиться ровно половина диаметра. Если же задать величину < 0.5, то со стороны створа будет располагаться меньше половины диаметра, и шар теоретически не сможет попасть внутрь лузы. Это значит, что при рассмотрении возможностей успешных атак лузы следует пользоваться лишь значениями $0.5 \leq \leq 1$.

Из прямоугольного треугольника BHL найдем расстояние между точкой B и губкой лузы L: $BL = \sqrt{BH^2 + LH^2} = \sqrt{S^2 + W^2/4}$. Из другого прямоугольного треугольника BLF выразим синус угла BLF: $Sin < BLF = BF / BL = (FG - R) / BL = (2R - R) / \sqrt{S^2 + W^2/4}$. Следовательно, $< BLF = arcsin\left[R(2 - 1) / S2 + W2/4\right.$. Так как линии BE и LF параллельны друг другу, то $<LBE = <BLF$. Из треугольника BHL выразим угол LBH: $< LBH = arctg\ (LH / BH) = arctg\ (W / 2S)$. И наконец, в силу того, что $\gamma = < LBH - < LBE$, получим

$$\gamma = arctg\ (W / 2S) - arcsin\left[R(2 - 1) / \sqrt{S^2 + W^2/4}\right]. \qquad (14)$$

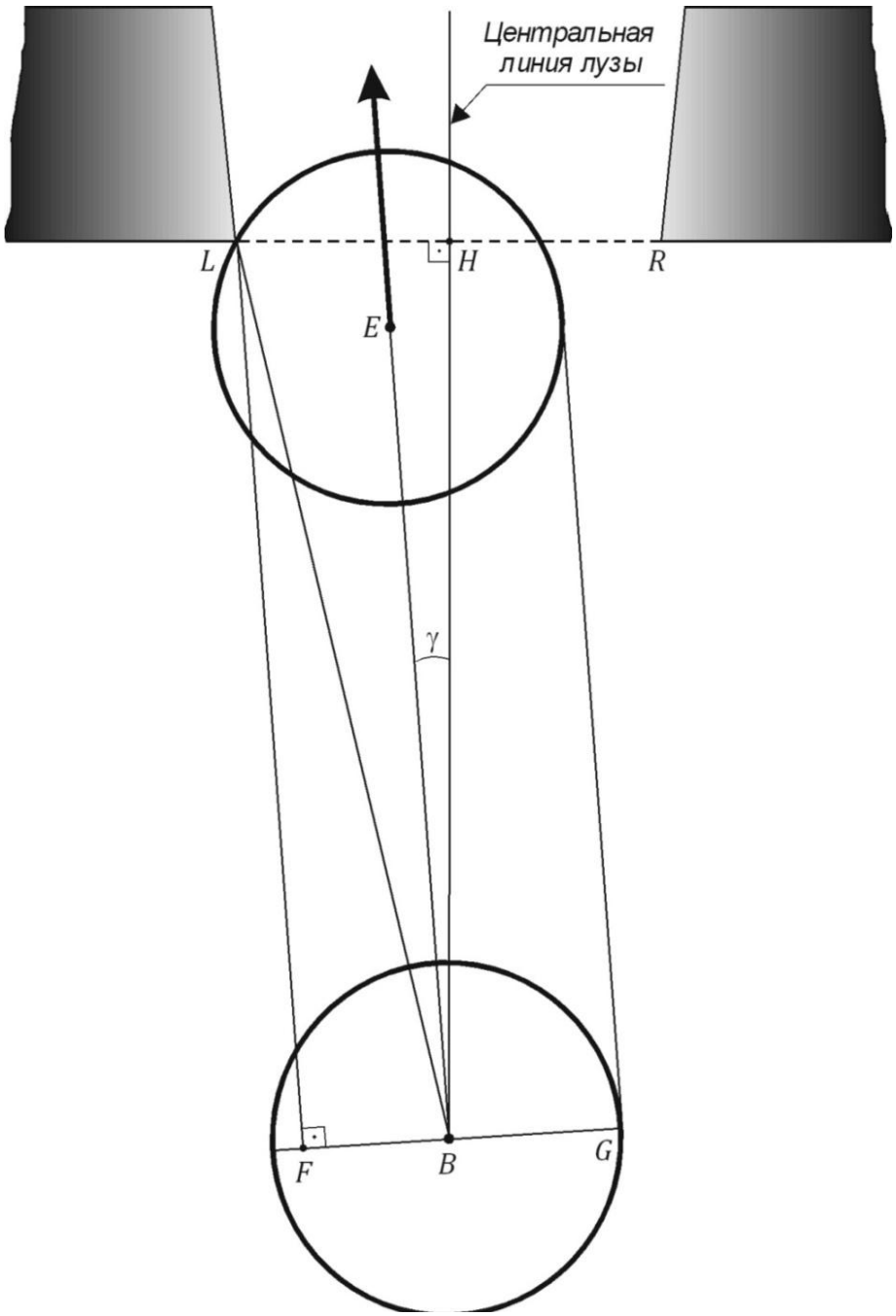

Рис.4. Атака лузы прицельным шаром, располагающимся до удара на центральной линии лузного створа.

Зависимости величин γ, рассчитанных по формуле (14) при $W = 82$ мм, $R = 34$ мм, представлены на рисунке 5. Их вид можно было бы вообразить и без специальных расчетов. Действительно, вполне понятно, что допустимое угловое отклонение прицельного шара от центральной линии лузы должно уменьшаться по мере того, как начальное положение шара отодвигается от лузного створа. Помимо этого, тривиально и влияние параметра на γ: чем больше величина , тем менее плотный контакт шара с губкой может быть допущен, или тем меньше значение γ.

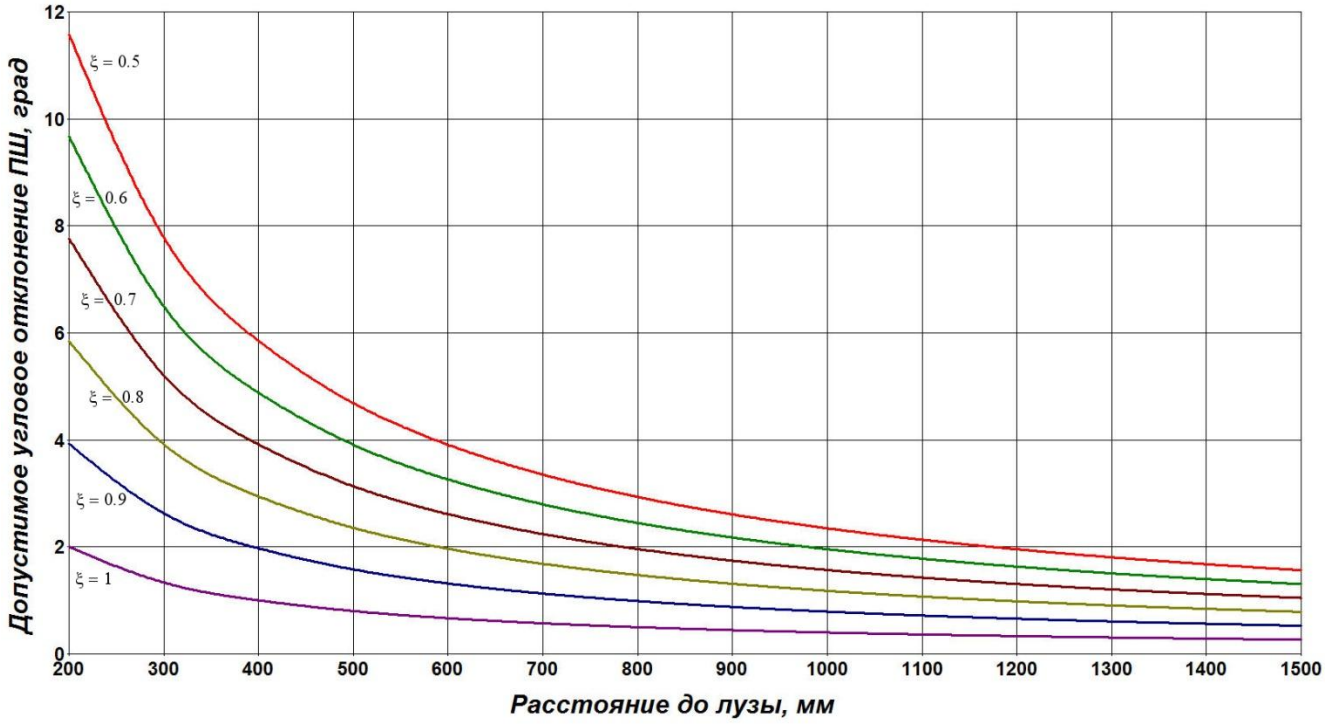

Рис.5. Зависимости допустимого углового отклонения прицельного шара от центральной линии γ от расстояния до лузы S и параметра , характеризующего «плотность» контакта шара с губкой лузы.

В дальнейшем анализе я буду полагать, что атака лузы может быть успешной, если при проходе створа прицельный шар не заденет губок или коснется одной из них вскользь. Конечно, никаких дополнительных усилий не потребовало бы рассмотрение случаев < 1. Но я такой целью не задаюсь, ведь при этом величины γ будут только увеличиваться, а значит, увеличатся и допустимые угловые ошибки удара η, что приведет к большим значениям виртуальной ширины лузы. Иными словами, я стремлюсь получить более строгие оценки. Глядя на рисунок 5, можно заключить, что при $= 1$ допустимое угловое отклонение γ должно быть менее двух градусов, а для большинства атакующих ударов на Русском Бильярде – даже меньше одного градуса. В пользу такого вывода свидетельствуют и дополнительные аргументы. В частности, зависимости, изображенные на рисунке 5, были получены для ширины створа средней лузы бильярдного стола. Если же рассматривать атаку угловой лузы, то значения γ уменьшатся. Для примера приведу и еще один аргумент. Выше рассматривался лишь случай атаки, при котором прицельный шар изначально располагается на центральной линии лузы. В реальной же игре это обычно не так, что приводит к уменьшению «видимой» шару ширины створа лузы. А это говорит о том, что реальные величины γ уменьшатся.

Вернемся теперь к параметрам α, β, ε, $\gamma = \beta - \varepsilon$, характеризующим точность атакующего удара. Их зависимости от угловой ошибки выполнения удара η и поступательной скорости битка в момент контакта шаров V_{CB}, рассчитанные с помощью соотношений (2)÷(4), (9) и выраженные в градусах, представлены на рисунке 6. При вычислениях было принято, что начальное расстояние между шарами ρ составляет 500 миллиметров, а соударение происходит в состоянии естественного качения битка ($K_{roll} = 1$). Сплошные линии на графиках соответствуют величине

$V_{CB} = 1$ м/с, линии, изображенные мелким пунктиром – величине $V_{CB} = 3$ м/с, а линии, представленные крупным пунктиром – величине $V_{CB} = 5$ м/с. Нетрудно заметить, что даже такие чувствительные вариации скорости битка крайне слабо влияют на параметры ε и γ. Некоторые изменения при возрастании силы удара связаны с тем, что при $\eta \gtrsim 0.25°$ для повышенных скоростей битка начинает проявляться не сцепляющийся характер контакта шаров, а скользящий.

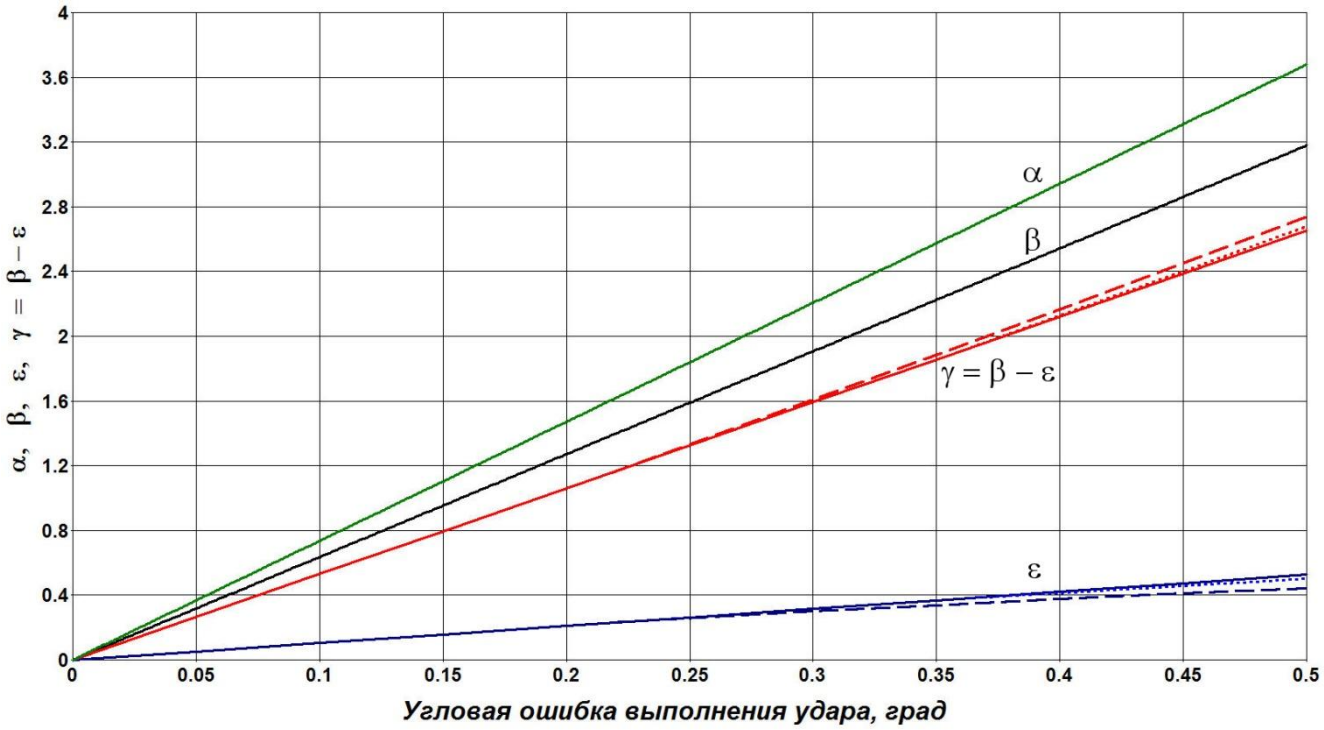

Рис.6. Зависимости углов α, β, ε, γ от угловой ошибки удара η и поступательной скорости битка V_{CB}.

Таким образом, с учетом выше сказанного можно заключить, что в рамках проводимого анализа влияние силы нанесенного удара и коэффициента качения битка на угол отброса прицельного шара ε и, соответственно, на угол γ, можно не учитывать. Варьирование же расстояния между шарами ρ чувствительно изменяет величины ε и γ. Это и не удивительно, ведь при фиксированном значении угловой ошибки удара η боковое отклонение битка от центральной линии меняется пропорционально пройденному расстоянию. При этом, соответственно, сильно меняются углы α, β, а значит и ε, γ. Для примера, на рисунке 7 представлены зависимости угла γ (выраженного в градусах) от угла η и начального расстояния между шарами ρ, рассчитанные при $V_{CB} = 1$ м/с. Если ограничиться величиной $\gamma = 1°$ (что и предлагалось делать выше), то из графиков, изображенных на рисунке 7, можно легко определить величины максимально допустимой угловой ошибки удара η_{max} и, соответственно, величины максимально допустимого угла резки α_{max}. Эти величины представлены на рисунках 8 и 9.

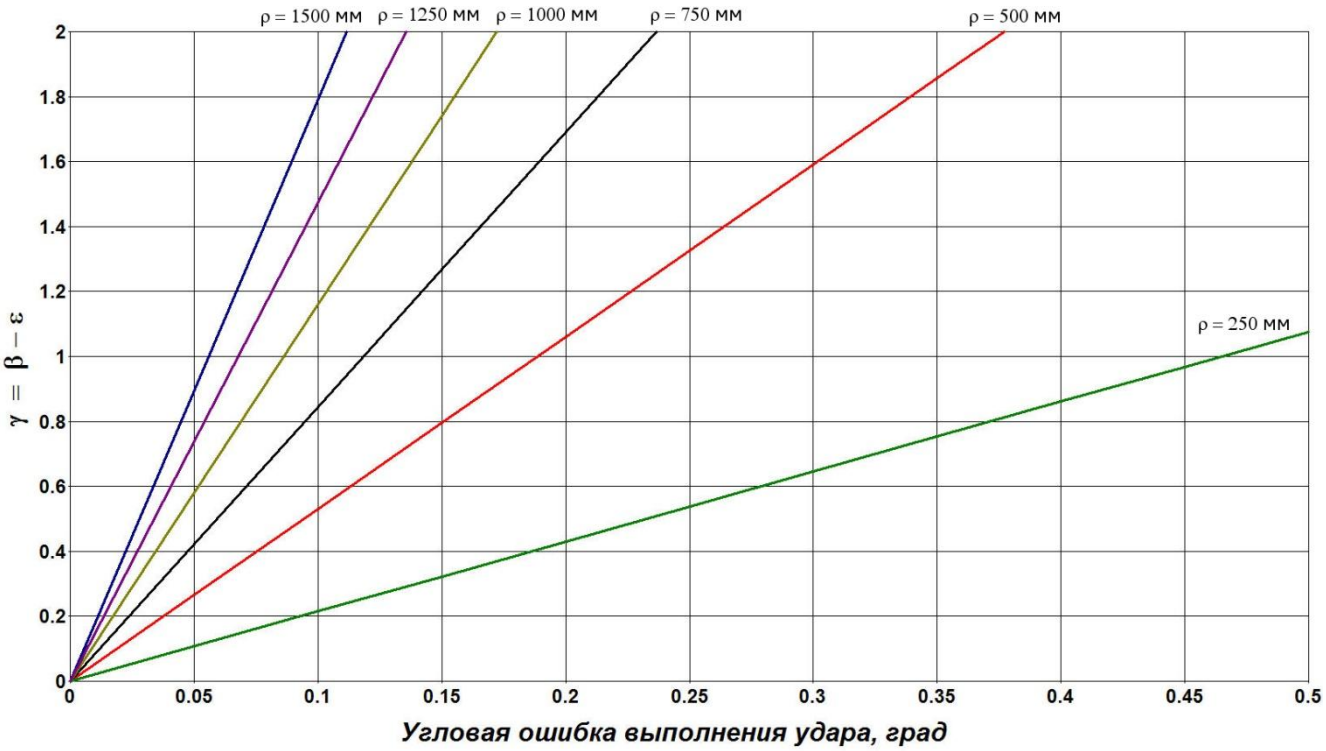

Рис.7. Зависимости угла γ от угловой ошибки удара η и начального расстояния между битком и прицельным шаром ρ.

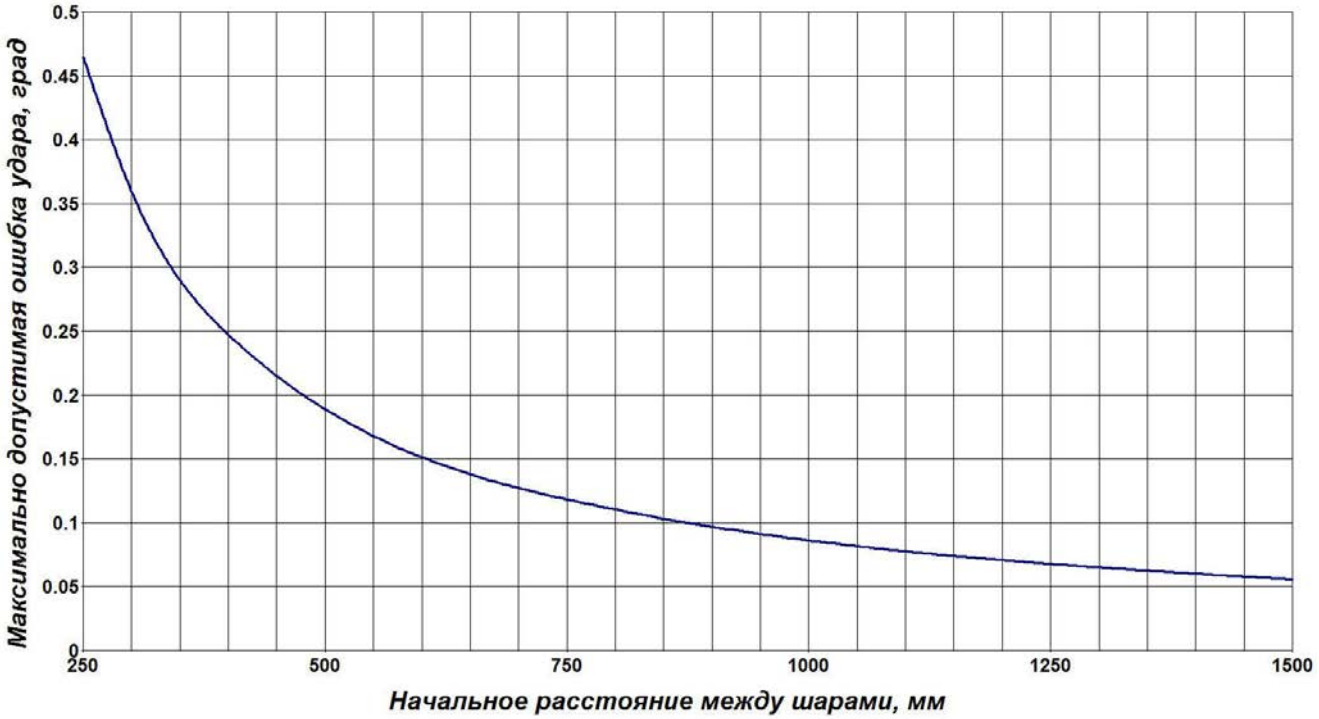

Рис.8. Зависимость максимально допустимой угловой ошибки удара η_{max} от начального расстояния между битком и прицельным шаром ρ.

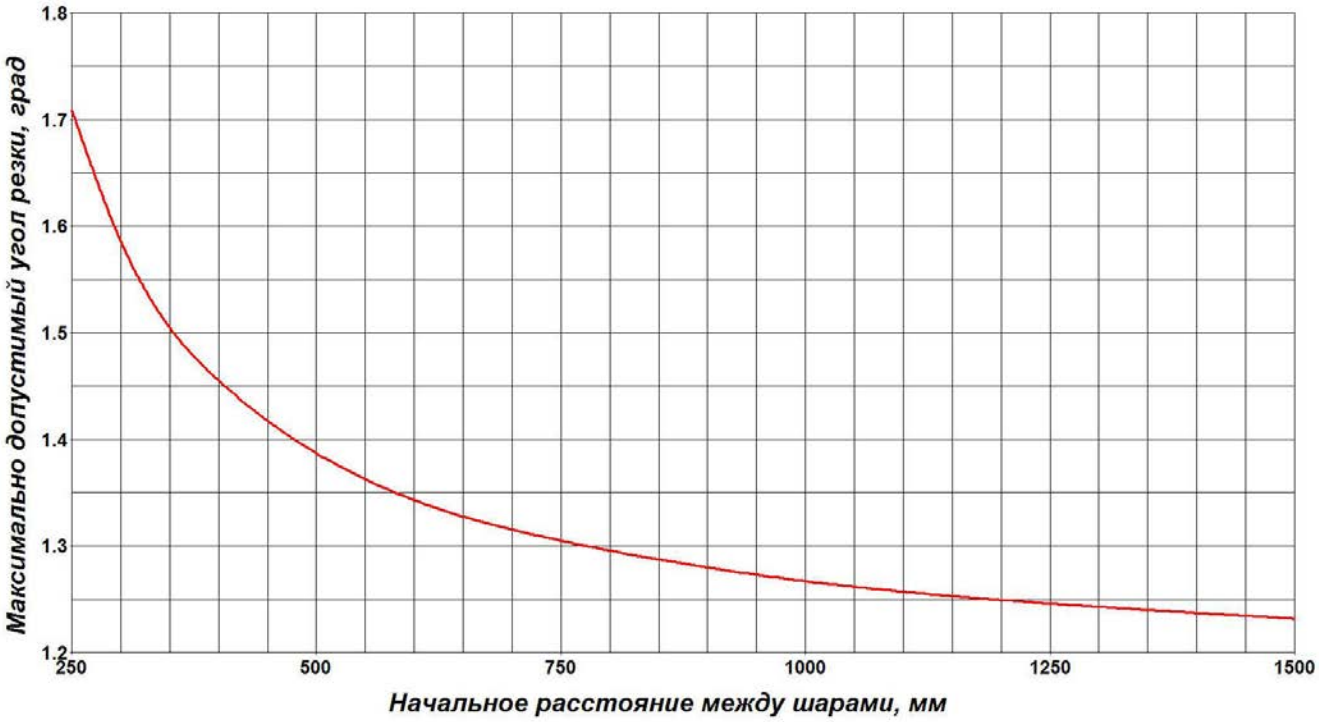

Рис.9. Зависимость максимально допустимого угла резки α_{max} от начального расстояния между битком и прицельным шаром ρ.

Насколько же эффект отброса прицельного шара компенсирует его угловое отклонение от центральной линии, обусловленное ошибкой удара, нанесенного по битку? Ответ на этот вопрос дают следующие два графика, по которым можно получить представление о величинах отношения углов ε и β. На рисунке 10 изображены зависимости величины $\frac{\varepsilon}{\beta}$, выраженной в процентах, от угловой ошибки η и скорости битка V_{CB} (представлены результаты расчетов при $V_{CB} = 1$ м/с, $V_{CB} = 3$ м/с и $V_{CB} = 5$ м/с; $\rho = 500$ мм). Нетрудно видеть, что при $\eta \lesssim 0.22°$ все три графика совпадают. Это – следствие сцепляющегося характера контакта шаров. На рисунке 11 красным цветом изображена зависимость $\frac{\varepsilon}{\beta}$ от начального расстояния между шарами ρ, рассчитанная при $V_{CB} = 1$ м/с. При вычислении отношений $\frac{\varepsilon}{\beta}$ для каждого конкретного значения ρ использовалась соответствующая ему величина максимально допустимой угловой ошибки удара η_{max}. Помимо этого, на этом же рисунке синим цветом представлен график изменения величины $\Omega = \frac{2\varepsilon}{\beta}$, характеризующей пропорциональное увеличение виртуальной ширины створа лузы по отношению к номинальной ширине. Удвоение отношения $\frac{\varepsilon}{\beta}$ учитывает то, что ошибки выполнения прямого удара приводят биток, в общем случае, как правее центральной линии, так и левее нее. С помощью величины Ω можно рассчитать ширину створа $W_{virtual}$ некоторой воображаемой лузы, «строгость» которой, определяемая без учета ЭОПШ, равна «строгости» реальной лузы: $W_{virtual} = W(1 + \Omega)$. Если игрок ничего не знает о действии ЭОПШ (или намеренно забывает об этом эффекте) и успешно атакует эту

воображаемую лузу, то успешной окажется и атака реальной лузы, имеющей более узкий створ. Иными словами, если игрок будет прицеливаться так, чтобы отправить прицельный шар в воображаемую лузу, коснувшись ее воображаемой губки, и не допустит ошибок при выполнении удара, то шар пройдет внутрь реального створа лузы с касанием реальной губки.

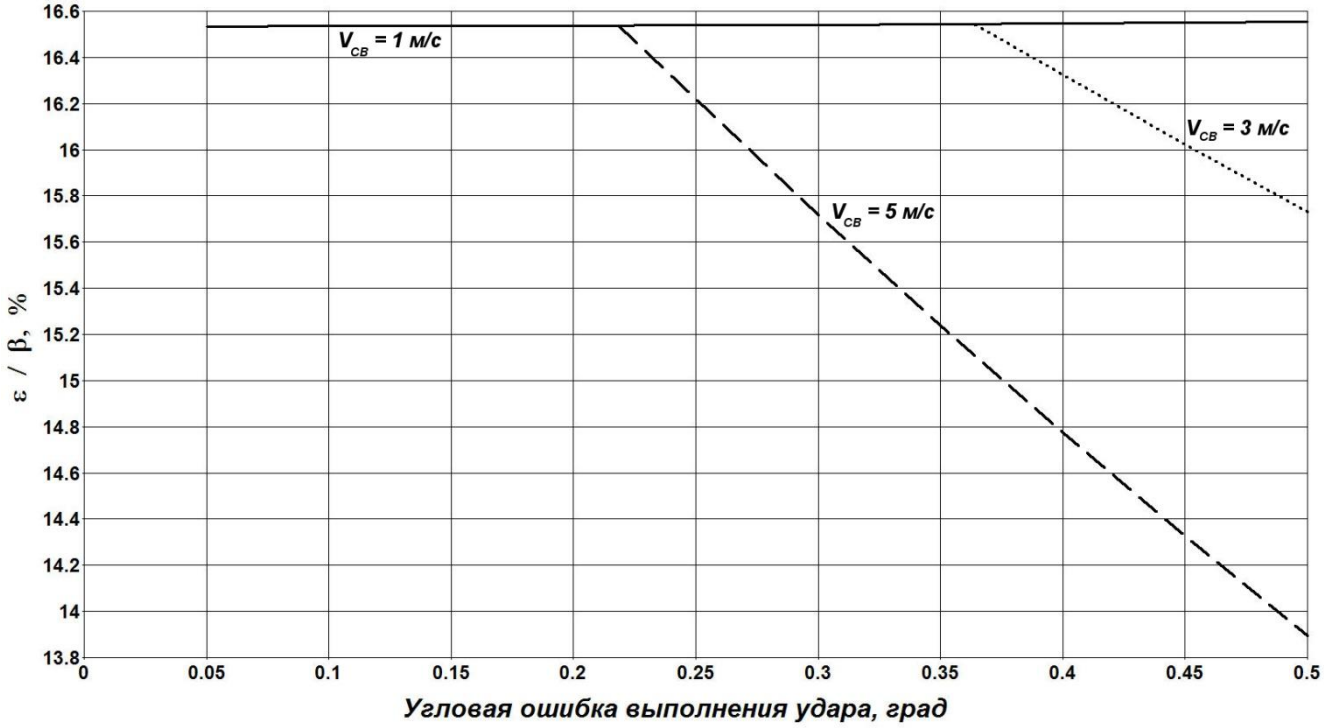

Рис.10. Зависимость отношения величин углов ε и β от угловой ошибки удара η и поступательной скорости битка V_{CB}.

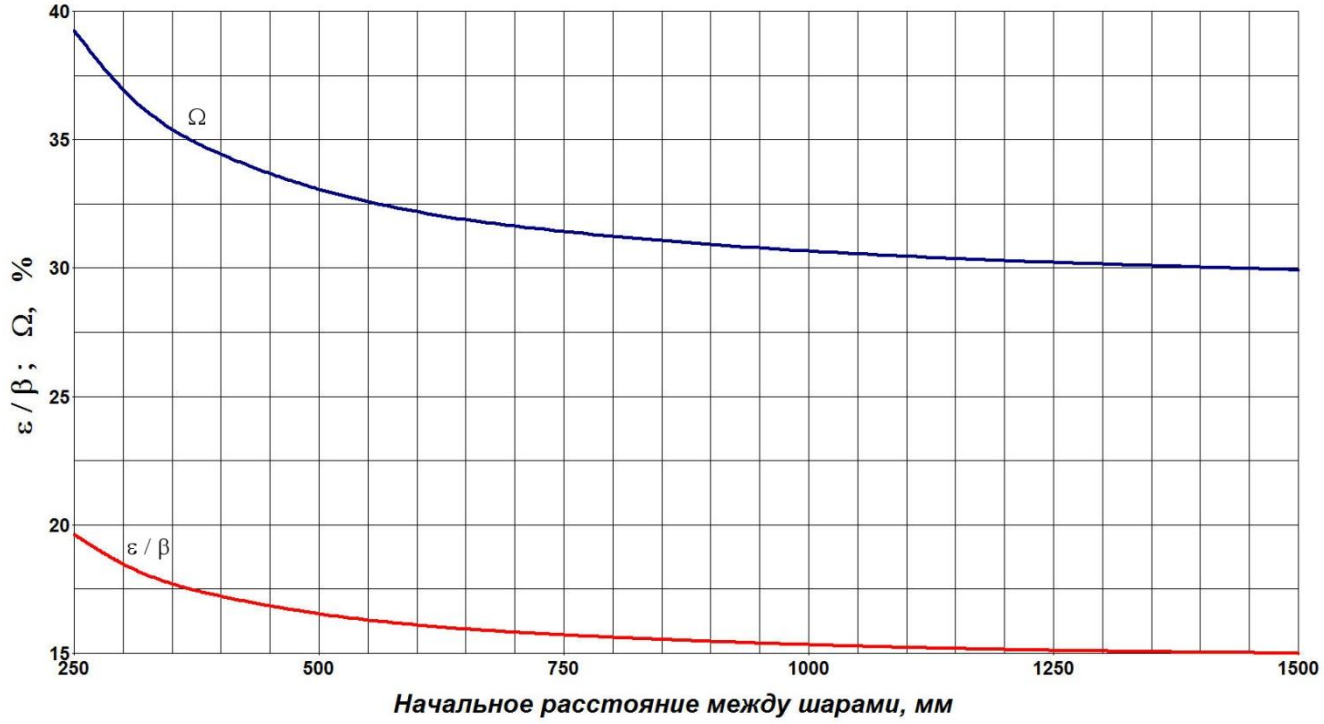

Рис.11. Зависимости величин ε/β и Ω от начального расстояния между битком и прицельным шаром ρ.

Из изображенного на рисунке 11 графика зависимости Ω от ρ видно, что величина Ω изменяется примерно от 0.4 при малых расстояниях между шарами до 0.3 при нанесении ударов по значительно удаленному прицельному шару. В среднем же, значение Ω можно полагать равным ≈ 0.33. Отсюда можно заключить: ***проявление ЭОПШ при прямых ударах приводит к тому, что виртуальная ширина створа атакуемой лузы становится примерно на треть больше реальной ширины***.

Таким образом, проявление эффекта отброса прицельного шара при незначительных ошибках выполнения прямых ударов, не только не мешает игроку, но и «льет воду на его мельницу». ЭОПШ является следствием действия трения между шарами, и чем сильнее сила трения, тем значительнее выражен эффект. Сила же трения принимает тем большие значения, чем больше величина коэффициента трения μ, которая непосредственно связана с состоянием поверхностей шаров – гладкостью и чистотой. Если ознакомиться с основными положениями этой статьи, особо не погружаясь в частности, то может «родиться» такое соображение: для того, чтобы ЭОПШ сильнее помогал при выполнении прямых и почти прямых ударов, следует использовать для игры «видавшие виды» шары, с которых даже и не стоит удалять загрязнения. Более того, может появиться соблазн поделиться с «массами» таким соображением. Предостерегу от подобных попыток. Как показали расчеты, в подавляющем большинстве случаев (а при небольших ошибках ударов – практически всегда) после выполнения прямых ударов проявляется сцепляющийся характер контакта соударяющихся шаров, а результат сцепления шаров не зависит от состояния их поверхностей. Поэтому, не следует плодить мифы.