

Рон Шепард

Любительская физика для любителя игры в Пул

Предисловие переводчика

Исходный текст – Ron Shepard, «Amateur Physics For The Amateur Pool Player», 3rd Edition, 1997 – я впервые увидел пару лет назад, благодаря Интернету. Он и до сих пор размещен в сети в свободном доступе, а перевода на русский язык как не было, так и нет. Почему же этот труд так долго оставался вне поля зрения? Наверно, дело в том, что основной интерес для меня представляет Русский Биллиард, а не Пул. Но после ознакомления с содержанием работы стало сразу же понятно, что практически все изложенное применимо и для прочих игр на лузном бильярде.

Перечислю основные причины, побудившие меня взяться за перевод этого текста:

1. Конечно же, весьма удобно воспользоваться чужим готовым переводом. Но для того, чтобы сделать его качественно, мало одного желания и готовности безвозмездно потратить свои силы и время. Нужен еще опыт по переводу технической литературы и определенная математическая подготовка. Но даже и этого недостаточно! Переводчик должен быть, к тому же, далеко не новичком в бильярде. А вероятность того, что все необходимые (но при этом не достаточные!) условия будут одновременно выполнены, явно невелика.
2. Обсуждения на сетевых бильярдных форумах показали, что в таком переводе заинтересован не только узкий круг «теоретиков». Многие рядовые русскоязычные любители игры высказывали просьбы сделать перевод и выложить его для широкого пользования.
3. В настоящее время развитие отечественного бильярда идет по парадоксальному пути – всячески культивируется наработка практических навыков игроков без совершенствования их теоретической подготовки. И немаловажную роль в этом играет элементарное отсутствие качественной литературы, доступно освещающей теоретические аспекты игры. Совсем по-другому обстоят дела в профессиональном Пуле и Снукере. Поэтому, заимствовать все необходимое у лучших мировых бильярдных школ не только не зазорно, но и весьма полезно.
4. Нельзя не отметить значимость материала, представленного ниже. До недавнего времени практически единственным трудом, освещающим физику бильярда в таком объеме, была книга Г.Кориолиса «Математическая теория явлений бильярдной игры». Но с момента ее выхода в свет прошло уже более полутора веков, что не могло не сказаться на уровне наших претензий к содержанию материала и его «подаче» в этой книге. Рон Шепард изложил суть происходящего на бильярдном столе в современной и (что очень важно!) не перегруженной форме. И пусть знаний средней школы недостаточно для того, чтобы полностью разобраться в представленном материале, полученные результаты и выводы автора «прозрачны» и доступны для понимания любому заинтересованному бильярдисту.

Скажу еще несколько слов для особо придирчивых читателей. Ясно осознаю, что идеального в этом мире ничего нет и быть не может. Не является исключением и предлагаемый Вашему вниманию перевод. Конечно же, при особом желании в нем можно найти недостатки. В частности, в ряде случаев я использовал скорее «литературный» подход к изложению, а не дословно «перекладывал» исходный текст. Помимо этого, в перевод не вошел пятый раздел оригинальной работы Рона Шепарда. Дело в том, что этот раздел посвящен применению методов математической статистики для анализа игры в Пул с гандикапом. Тема эта – интересная, но лежащая в стороне от проблем физики бильярда, анонсированных автором в названии работы. Кроме того, подходы к договоренностям игроков о форе в отечественном бильярде значительно отличаются

от того, что нашло применение в Пуле. Однако, некоторые рациональные зерна можно извлечь и отсюда, но это – тема для отдельного изложения.

Сергей Тихонов
Москва, октябрь, 2012
Дата внесения последних изменений: 11.05.2017

Введение

Английское слово «Любитель» (*Amateur*) образовано из латинских слов «Поклонник» (*Amator*) и «Любить» (*Amare*). Любитель – человек, с любовью относящийся к тому, чем он занимается, а потому и делающий это с удовольствием. Представленный ниже материал предназначен для настоящих Любителей Пула, имеющих еще и желание понять – как происходящее в игре можно объяснить на «языке» физики. Наверно, опытные игроки здесь не найдут для себя каких-то откровений по технике игры, да и сведущие физики, ознакомившись с этой работой, вряд ли смогут пополнить свой научный багаж. Впрочем, есть надежда на то, что заинтересованные физики узнают что-то новое о технике игры в Пул, а игроки – о физике бильярда. Стиль изложения материала специально ориентирован на тех, кому интересна и сама игра и ее научное толкование, а не одно в отрыве от другого. Для понимания того, что представлено в работе, недостаточно начальных знаний по физике; предполагается, что читатель хорошо знаком с законами Ньютона, с такими понятиями, как перемещение центра масс, моменты инерции, линейное и угловое ускорение, с геометрией, тригонометрией и векторным представлением величин. Чтобы полностью разобраться, будет достаточно знаний по начальному курсу физики, изложенному в каком-нибудь учебнике для специального высшего учебного заведения. Например, вполне подойдет первый том книги «*The Feynman Lectures On Physics* (который можно без особого труда найти, пользуясь Интернетом; прим. пер.).

Представленный материал разделен на пять разделов. В разделе 1 обсуждается бильярдное оборудование (шары, стол, кий, наклейка, сукно) и некоторые связанные с ним свойства (коэффициенты трения, силы, моменты инерции), в разделе 2 – принцип естественного вращения, в разделе 3 – взаимодействие наклейки с шаром, в разделе 4 – соударения между шарами, а в разделе 5 – использование статистических методов в приложении к бильярдной игре. Каждый раздел включает в себя общее обсуждение и конкретные теоретические задачи (вместе с их решениями). Помимо этого, читателю предлагаются некоторые упражнения для того, чтобы он поэкспериментировал на бильярдном столе, применяя на практике обсуждаемые аспекты игры.

1. Свойства бильярдного оборудования

Современные бильярдные шары представляют собой однородные пластиковые сферы. Сейчас их изготавливают из специальных (фенолформальдегидных; прим. пер.) смол, а раньше делали из глины, слоновой кости, дерева и других материалов. Обычно все шары имеют одинаковый размер и массу. Диаметр стандартных шаров для Пула составляет $2\frac{1}{4}$ " (здесь и далее символ

" обозначает дюймы; прим. пер.), шары для Снукера бывают двух размеров – $2\frac{1}{8}$ " и $2\frac{1}{16}$ " , а диаметр Карамбольных шаров может составлять $2\frac{27}{64}$ " , $2\frac{3}{8}$ " и $2\frac{7}{16}$ ". Во всех случаях допускаются отклонения ± 0.005 ". Шары для Пула весят от 5.5 до 6 унций, для Снукера – от 5 до 5.5 унций, а для Карамболя – от 7 до 7.5 унций.

Задача 1.1

Как найти объем шара для Пула, зная его радиус?

Ответ: Найдем объем шара, пользуясь сферическими координатами:

$$V = \iiint r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \left(\frac{1}{3} R^3\right)(2)(2\pi) = \frac{4}{3} \pi R^3 ,$$

где R – радиус шара; интегрирование по r проводится в пределах от 0 до R , по θ – от 0 до π , а по φ – от 0 до 2π . С учетом выше указанных допусков на возможные отклонения, минимальный радиус составляет $R_{min} = 1.1225$ " , а максимальный – $R_{max} = 1.1275$ ". Следовательно, объем стандартного шара для Пула находится в пределах от $5.924 \text{ in}^3 = 97.08 \text{ см}^3$ до $6.004 \text{ in}^3 = 98.39 \text{ см}^3$ (здесь «in» – сокращение от слова «inches», использующееся как еще одно обозначение дюймов; прим. пер.).

(Шар для игры в Пирамиду имеет минимальный радиус 3.4 см, а максимальный – 3.425 см. Следовательно, его объем заключен в пределах от 164.636 см^3 до 168.295 см^3 . Прим. пер.).

Задача 1.2

Какова должна быть плотность материала, из которого делают шары для Пула, чтобы удовлетворять установленным ограничениям на их размер и массу?

Ответ: Плотность – отношение массы к объему: $\rho = M/V$. С учетом того, что в одной унции содержится 28.35 граммов, минимальная масса шара равна 5.5 унций = 155.9 г, а максимальная – 6.0 унций = 170.1 г. Соответственно, минимальная плотность составляет $\rho_{min} = M_{min}/V_{max} = 155.9 \text{ г} / 98.39 \text{ см}^3 = 1.58 \text{ г/см}^3$, а максимальная – $\rho_{max} = M_{max}/V_{min} = 170.1 \text{ г} / 97.08 \text{ см}^3 = 1.75 \text{ г/см}^3$. Для сравнения, плотность воды при комнатной температуре равна 0.997 г/см^3 , насыщенного раствора сахара – 1.44 г/см^3 , насыщенного раствора хлорида цезия – 1.89 г/см^3 , а плотность ртути составляет 13.6 г/см^3 . Так что, шар для Пула быстро тонет в воде, медленно, но все же полностью, погружается в сахарный раствор, едва может оставаться на плаву в растворе хлорида цезия, а в ртути с легкостью плавает.

(Хотя масса шаров для игры в Пирамиду и не регламентирована, обычно она заключена в пределах от 280 до 290 граммов. Соответственно, минимальная плотность материала, из которого изготовлен шар, составляет 1.66 г/см^3 , а максимальная – 1.76 г/см^3 . Прим. пер.).

Тензор инерции твердого тела представляется в виде квадратной матрицы размером 3×3 , элементы которой вычисляются по формуле

$$I_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{r}) [\delta_{ij} \sum_k r_k^2 - r_i r_j] dv ,$$

где компоненты вектора $\mathbf{r} = (x, y, z)$ – декартовы координаты; (δ_{ij} принимает значение 1 при $i = j$ и 0 при $i \neq j$; прим. пер.). Для однородного шара $\rho(r) = \rho$ –

неизменная (при $r < R$) плотность материала. Массу шара можно найти как произведение плотности на объем: $M = \rho V = \frac{4}{3} \rho \pi R^3$.

Задача 1.3

Требуется выразить тензор инерции шара через его массу M и радиус R .

Решение: Определим момент инерции относительно оси X :

$$I_{xx} = \int_V \rho(r)(z^2 + y^2)dv = S_{zz} + S_{yy} = 2S_{zz} = 2S_{yy}.$$

Отметим, что момент инерции относительно оси X зависит только от того, как распределена масса объекта по осям Z и Y . Так как начало системы координат выбрано в центре сферы, то величины S_{zz} и S_{yy} равны друг другу. А это значит, что нам предстоит вычислить не два интеграла, а лишь один, что и отражено в конце выше приведенного соотношения. Действительно, для сферы справедливо равенство $S_{xx} = S_{yy} = S_{zz}$, так как оси X , Y и Z можно выбрать произвольно. Замены переменных $z = r \cos \theta$, $x = r \sin \theta \cos \varphi$ и $y = r \sin \theta \sin \varphi$ позволяют выразить эти интегралы в сферических координатах (автор почему-то назвал их полярными; вообще говоря, полярные координаты применяются на плоскости, а не в трехмерном пространстве; прим. пер.). Вычислим, например, S_{zz} :

$$S_{zz} = \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho \left(\frac{1}{5} r^5\right) \left(\frac{2}{3}\right) (2\pi) = \frac{1}{5} MR^2$$

и получим выражение для осевых моментов инерции: $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5} MR^2$.

Можно заметить, что внедиагональные элементы тензора инерции равны нулю. Это – следствие того, что для шара конкретный выбор ортогональных осей формально эквивалентен любому другому выбору. Для прочих же твердых тел элементы, расположенные не на диагонали тензора инерции, в общем случае – ненулевые, и только специальный выбор осей координат может привести эту матрицу к диагональному виду. В матричном виде тензор инерции шара выражается следующим образом:

$$\mathbf{I} = \frac{2}{5} MR^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отметим важное свойство этого тензора – его произведение с любым вектором $\boldsymbol{\omega}$ просто масштабирует вектор, не изменяя направления: $\mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \frac{2}{5} MR^2 \boldsymbol{\omega}$.

Кинетическая энергия шара состоит из двух частей – поступательной и вращательной. Поступательная кинетическая энергия равна $T_{trans} = \frac{1}{2} MV^2$, где V – скорость центра масс шара. (В общем случае, когда скорость шара представляется в виде вектора \mathbf{V} , поступательная кинетическая энергия выражается зависимостью $T_{trans} = \frac{1}{2} M \mathbf{V}^T \mathbf{V} = \frac{1}{2} M |\mathbf{V}|^2$. Верхним индексом «Т» обозначено транспонирование вектора \mathbf{V} . Здесь и далее векторы рассматриваются в качестве векторов-столбцов, транспонирование которых

приводит их к форме в виде вектора-строки. В этой работе автор не использует символ транспонирования, предлагая читателю самостоятельно догадываться – где тот или иной вектор представляет собой столбец, а где – строку. Ниже мы тоже будем применять символ транспонирования только там, где это будет нести особую смысловую нагрузку. Прим. пер.). Масса шара M является коэффициентом пропорциональности между квадратом скорости и энергией поступательного движения. Вращательная кинетическая энергия выражается подобным равенством $T_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$, где ω – угловая скорость (измеряемая, например, в радианах за секунду) вращения вокруг оси. Следовательно, момент инерции I является коэффициентом пропорциональности между квадратом угловой скорости и вращательной энергией. В общем виде вращательная кинетическая энергия твердого тела выражается соотношением $T_{rot} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$. Здесь $\boldsymbol{\omega}$ – вектор, компонентами которого являются угловые скорости вращения вокруг осей; \mathbf{I} – тензор инерции. Выражение $\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$ определяет вектор момента количества движения вращающегося тела, и выше приведенная матричная форма тензора инерции позволяет увидеть, что для бильярдного шара моменты количества движения прямо-пропорционально связаны с угловыми скоростями вращения. Выражение для вращательной кинетической энергии можно переписать в виде $T_{rot} = (\frac{1}{5} MR^2) \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega} = (\frac{1}{5} MR^2) |\boldsymbol{\omega}|^2$. Свобода выбора осей координат для однородной сферы часто позволяет упростить анализ за счет рассмотрения вращения тела вокруг единственной оси. Это дает возможность пользоваться простыми скалярными соотношениями, а не соотношениями в векторной форме.

Когда к твердому телу, такому как шар, приложена сила, скорость перемещения его центра масс изменяется согласно соотношению $\mathbf{F} = M\dot{\mathbf{V}}$, а угловая скорость – соотношению $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}}$ (здесь и ниже символ \times означает векторное произведение; прим. пер.). Когда рассматривается единственная главная ось вращения, последнее соотношение приводится к более простому виду $r \sin \theta |F| = I \dot{\omega}$, где θ – угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{F} с модулями r и $|F|$, соответственно. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ перпендикулярен плоскости, образуемой векторами \mathbf{r} и \mathbf{F} , и направлен по правилу правой руки (иначе говоря, если указательный палец правой руки направить так же, как и вектор \mathbf{r} , а средний палец – как вектор \mathbf{F} , то большой палец, поставленный перпендикулярно указательному и среднему пальцам, покажет направление вектора $\boldsymbol{\omega}$; прим. пер.). Вектор \mathbf{r} направлен из центра масс шара в ту точку его поверхности, в которой приложена сила. В выше представленных соотношениях $\dot{\mathbf{V}} \equiv \frac{d\mathbf{V}}{dt}$ – вектор, компонентами которого являются линейные ускорения шара по каждой из координатных осей, а $\dot{\boldsymbol{\omega}} \equiv \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ – вектор угловых ускорений вокруг каждой из осей. Снова можно отметить некоторое сходство представленных зависимостей: в соотношении для линейного ускорения в качестве коэффициента пропорциональности выступает масса M , так же как и в соотношении для углового ускорения – момент инерции I . Величина $r \sin \theta$ показывает – как угловое ускорение зависит от направления действия силы. Если сила приложена

точно в центр масс шара, величина $\sin \theta$ равна нулю и, соответственно, углового ускорения нет. Оно появляется только в тех случаях, когда приложенная сила направлена не через центр шара.

Для того чтобы между двумя объектами возникало трение, необходимо наличие силы. Если два соприкасающихся тела давят друг на друга с нормальной силой F_N , и, помимо этого, направленная не так, как F_N , сила F_f заставляет их сдвигаться друг относительно друга без ускорения, то коэффициент трения скольжения определяется отношением $\mu_{sl} = F_f/F_N$. Можно с высокой точностью полагать, что коэффициент трения скольжения является постоянной величиной, не зависящей от скоростей тел. Для «скользких» объектов величина этого коэффициента мала, а для «липких» - велика. Помимо этого, существует еще понятие коэффициента трения покоя (коэффициента статического трения). Трение покоя определяется аналогично трению скольжения, но только при этом предполагается, что контактируют два неподвижных объекта. *(Трение покоя – сила, возникающая между двумя контактирующими телами и препятствующая возникновению относительного движения. Эту силу необходимо преодолеть для того, чтобы привести два контактирующих тела в движение друг относительно друга. Трение покоя возникает при малых перемещениях (например, при деформации) контактирующих тел и действует в направлении, противоположном направлению возможного относительного движения. Прим. пер.).* Обычно коэффициент трения покоя чувствительно превышает по величине коэффициент трения скольжения, однако для некоторых материалов они близки друг к другу.

При анализе игры в Пул необходимо учитывать несколько действующих сил трения. Первая из них – сила трения скольжения шара по сукну $F_S = \mu_{sl} W$, где W – вес шара ($F_N = W = Mg$; g – ускорение свободного падения). Так как в конкретной игре вес шара и коэффициент трения скольжения являются константами, сила трения скольжения постоянна по величине. Пока шар скользит по сукну, эта величина не зависит от его поступательной скорости и скорости углового вращения. А вот на направление действия силы трения скольжения указанные скорости уже влияют, и это будет обсуждаться ниже. При отсутствии скольжения по сукну (когда шар покоится или катится по столу без проскальзывания) сила трения скольжения не действует.

Интересно затронуть вопрос о «природе» возникновения силы трения скольжения. На микроскопическом уровне атомы молекул одного тела притягиваются к атомам другого тела. Когда один объект скользит относительно другого, в направлении его перемещения формируются новые междуатомные связи (взаимодействия), поддерживаемые на мгновение, а затем разрывающиеся, когда отдельные атомы расходятся. Тем не менее, трение создают не непосредственно эти связи. Причина заключается в том, что на формирование связей затрачивается кинетическая энергия, которая при их разрыве восстанавливается, но не полностью. За малый интервал времени взаимодействия атомов вибрационная энергия молекул на поверхностях объектов передается другим молекулам в малом внутреннем слое (энергия передается и в обратном направлении, но со значительно меньшей скоростью). Результатом этого обмена энергией является то, что кинетическая энергия поступательного движения трансформируется в вибрации молекул во внутреннем слое или, иначе говоря, преобразуется в тепловую и звуковую энергию. Основываясь на такой точке зрения физика, можно сказать, что силу трения создают

именно тепло и звук, хотя это противоречит общепринятому дилетантскому мнению о том, что трение является первопричиной нагрева контактирующих объектов.

Задача 1.4

Вниз по наклонной плоскости без ускорения скользит блок; какова взаимосвязь между коэффициентом трения скольжения μ и углом наклона плоскости α ?

Ответ: Вес блока $W = Mg$ является силой, направленной вертикально вниз. Следовательно, проекция этой силы на нормаль к наклонной плоскости есть $F_N = W \cos \alpha$, а проекция на саму плоскость равна $F_T = W \sin \alpha$. Сила F_T , направленная вдоль плоскости вниз, приводит блок в движение. Она противоположна по направлению действующей при этом силе трения. Так как движение происходит без ускорения, указанные силы уравниваются друг друга: $F_S = -F_T$. Найдем коэффициент трения, как указывалось выше, разделив F_T на F_N . В результате будем иметь $\mu = \tan \alpha$. Это соотношение между тангенсом угла наклона и коэффициентом трения настолько фундаментально, что иногда де-факто принимается за определение.

Скользящий блок представляет собой простую концептуальную модель, позволяющую понять и некоторые иные аспекты действия трения скольжения. Рассмотрим блок массой M , скользящий по горизонтальной поверхности с коэффициентом трения скольжения μ . Вес блока является направленной вертикально вниз силой $W = Mg$. Она противоположна по направлению силе реакции опоры, действующей вертикально вверх. Это означает, что в вертикальном направлении блок не ускоряется. Горизонтальная сила трения постоянна по величине $|F_S| = \mu W = \mu Mg$ и направлена противоположно скорости, задающей положительное направление. Математически, процесс замедления скользящего блока силой трения описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\dot{V} = -\mu g$, в котором знак минус отражает отрицательное направление действия этой силы. Примечательно, что сюда не входит масса блока; некоторые уравнения движения, представленные ниже, также не будут включать в себя массу бильярдных шаров. Интегрирование уравнения движения по времени дает формулу изменения скорости $V(t) = V_0 - \mu g t$, где V_0 – начальная скорость при $t = 0$. Отметим, что это соотношение действительно только в течение времени, когда блок находится в состоянии скольжения. Повторное интегрирование по времени позволяет получить зависимость дальности продвижения блока от времени $x = V_0 t - \frac{1}{2} \mu g t^2$, в которой текущее значение дальности исчисляется от начального положения.

Кинетическая энергия блока в процессе замедляющегося движения не остается неизменной. В отличие от **консервативных** систем, рассматриваемая система является **диссипативной**. Как кинетическая энергия зависит от времени и дальности продвижения? Подстановка $V(t)$ в соотношение для кинетической энергии дает

$$T = \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} M (V_0^2 - 2V_0 \mu g t + \mu^2 g^2 t^2) = T_0 - \mu M g x .$$

Нетрудно заметить, что кинетическая энергия является убывающей функцией; причем она убывает линейно по дальности и квадратично по времени. Когда блок

останавливается, достигнув некоторой дальности d , его кинетическая энергия обращается в нуль. С учетом этого, из последнего соотношения можно получить $T_0 = \mu Mgd$. Отсюда видно, что если начальную кинетическую энергию удвоить, то и достигаемая при остановке дальность также увеличится в два раза. Если же удвоить начальную скорость, то достигаемая дальность увеличится уже в четыре раза. Заметим также, что если при фиксированном значении начальной кинетической энергии T_0 увеличить коэффициент трения, то величина d уменьшится, а если этот коэффициент уменьшить, то достигаемая дальность увеличится. Введем в рассмотрение понятие **рассеяния энергии**, определяемое как $\dot{T} \equiv \frac{dT}{dt}$.

Дифференцируя выше приведенное соотношение для T , найдем представление для рассеяния энергии в виде $\dot{T} = -\mu MgV$. Трактовка сил трения для скользящего блока довольно проста; несколько сложнее это будет сделать при последующем рассмотрении скольжения бильярдного шара и его соударения с другим шаром.

Как можно измерить значение коэффициента трения? В зависимости от имеющегося оборудования или доступной информации, для этого есть несколько возможностей. (1). Если в наличии имеется прибор для измерения величины силы, заставляющей блок скользить по поверхности без ускорения, то для вычисления коэффициента трения будет достаточно лишь разделить измеренную силу на вес блока. (2). Если поверхность можно наклонить на произвольный угол, то для определения коэффициента трения можно будет воспользоваться соотношением $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ из задачи 1.4, измеряя тот угол наклона α , при котором блок начнет скользить вниз. Однако, такой метод не всегда можно использовать на практике – например, для тяжеловесного бильярдного стола его применение натолкнется на едва ли преодолимые трудности. (3). Если скорость или энергия могут быть с достаточной точностью измерены в двух точках траектории движения, то подставляя в соотношение $T = T_0 - \mu Mgx$ значение T для этих двух точек, можно будет найти T_0 и μMg . Отдельное измерение массы позволит вычислить произведение Mg , а затем из последнего уравнения выразить и μ . Однако, измерение скоростей является довольно-таки непростой задачей, поэтому и этот метод затруднителен при использовании на практике. (4). Предположим, что прежде чем остановиться, блок за время t_d пройдет расстояние d . Это значит, что начальная скорость была равна $V_0 = \mu g t_d$. Подстановка этого значения в выше полученное соотношение $x = V_0 t - \frac{1}{2} \mu g t^2$ позволяет выразить коэффициент трения $\mu = d / (\frac{1}{2} g t_d^2)$. Конечно, выше были представлены не все имеющиеся возможности для определения коэффициента трения. Помимо указанных, можно применять и многие другие схемы, основанные на определении начальной скорости или других траекторных измерениях.

Вторая сила, которую нужно учитывать при анализе бильярдной игры, связана с сопротивлением, оказываемым шару при качении по сукну. Вообще говоря, эта сила по своей физической природе значительно отличается от силы трения скольжения, но их проявление можно трактовать сходным образом. Подробное изучение этого вопроса пока отложим до следующего раздела, а здесь для обсуждения сопротивления качению используем модель, в которой шар катится вверх по наклонной плоскости. Такая модель является консервативной. Будем считать диссипативную потерю энергии реальным бильярдным шаром аналогичной потере энергии «модельным» шаром в консервативном поле сил. Ввиду того, что

модель консервативна, имеется возможность составить уравнения движения без детального рассмотрения действующих сил, не являющихся очевидными на интуитивном уровне понимания.

Высоту подъема шара по отношению к начальной точке движения можно найти из соотношения $h = S \sin \alpha$, где α – угол наклона плоскости; S – расстояние вдоль плоскости, пройденное шаром от начальной точки. Потенциальная энергия в функции S определяется как $U(S) = Mgh = SMg \sin \alpha$. В этой модели предполагается, что потерь энергии на выделение тепла нет. Полная энергия $E = T + U$ постоянна, поэтому любые потери кинетической энергии преобразуются в потенциальную энергию шара. Последняя связь приводит к соотношению $T(S) = T_0 - SMg \sin \alpha$, где $T_0 = E$ представляет собой начальную энергию вращающегося шара, начинающего движение с самой нижней точки наклонной плоскости (где потенциальная энергия равна нулю; прим. пер.). Можно заметить, что кинетическая энергия шара, вращающегося на наклонной плоскости, выражается таким же соотношением, которое выше было получено для блока, скользящего по горизонтальной поверхности. Только здесь роль коэффициента трения μ выполняет сомножитель $\sin \alpha$. Однако, выражение для кинетической энергии вращающегося шара является на самом деле более сложным, что, наряду с рассмотрением взаимодействующих сил, будет предметом детального изучения в следующем разделе. Используя правило цепочек для дифференцирования сложных функций, рассеяние энергии вращающегося шара, поднимающегося по наклонной плоскости, можно представить в виде $\dot{T} = \frac{dT}{dS} \frac{dS}{dt} = -MgV \sin \alpha$, где V – скорость, направленная вдоль плоскости. Если по каким-то причинам нет возможности измерить угол наклона, он может быть определен косвенно – путем вычисления величины $\sin \alpha$ в последнем равенстве при помощи тех методов, которые излагались выше для определения коэффициента трения μ горизонтально скользящего блока.

Родство между вращением подлинного шара на бильярдном столе и в выше рассмотренной модели можно подтвердить, рассмотрев взаимодействие вращающегося шара со столом на микроскопическом уровне. Сила трения возникает, в частности, из-за сжатия волокон бильярдного сукна под весом шара. Будучи сжатыми, волокна не разжимаются незамедлительно после прохода шара; если бы это было так, то не было бы потерь энергии. Энергия теряется за счет не сразу восстанавливаемого сжатия сукна, замедляющего вращение шара (помимо этого, энергия теряется вследствие вибраций шара и стола, в конечном счете приводящих к повышению температуры в районе их контакта). За малый отрезок времени вращающийся шар не только продвигается вперед на малое расстояние, но и немного взбирается «в гору» на сукне, расходуя при этом небольшую часть своей кинетической энергии. Сжатие волокон сукна под весом шара приводит к тому, что потенциальная энергия гравитационного поля преобразуется в потенциальную энергию сжатых волокон (аналогично тому, как образуется потенциальная энергия пружины за счет ее сжатия; прим. пер.). В то время, когда шар продолжает вращаться и продвигаться вперед, волокна остаются в сжатом состоянии в течение некоторого отрезка времени. Эта задержка предотвращает обратное преобразование потенциальной энергии сжатых волокон в кинетическую энергию шара.

Вместо того чтобы рассматривать горизонтальное вращение шара на деформируемом сукне, можно использовать эквивалентную (в смысле

сопротивления движению) модель подъема вращающегося шара на абсолютно жесткой поверхности, имеющей некоторый наклон. Такой умозрительный наклон под углом α будем называть «эффективным». Расстояние, которое шар проходит по бильярдному столу, можно измерить. А вот величина той «эффективной» высоты, на которую он при движении будет взбираться в предположении, что сукно не сжимается, непосредственно измерению не поддается. Для выхода из положения косвенно определим величину эффективного наклона $\sin \alpha$, которую можно ассоциировать с эффективным коэффициентом трения качения μ_{roll}^{eff} .

Рассмотрим вращающийся шар, который за время t до остановки пройдет расстояние d . В течение этого времени на шар будет действовать некоторая сила, препятствующая вращению. Ее можно представить в виде $F_r = -\mu_{roll}^{eff} Mg$ (здесь отрицательный знак указывает на направление действия силы, противоположное поступательному перемещению шара; прим. пер.). С учетом этого, уравнение второго закона Ньютона $F_r = M\dot{V}$ можно записать в виде $\mu_{roll}^{eff} g = -\dot{V}$. Интегрируя его по времени, получим $\mu_{roll}^{eff} gt = V_0 - V$, где V_0 – начальная скорость. Отсюда видно, что конечная скорость обращается в нуль, когда выполняется равенство $V_0 = \mu_{roll}^{eff} gt$. Повторное интегрирование дает $\frac{1}{2}\mu_{roll}^{eff} gt^2 = V_0 t - d$, откуда можно легко выразить эффективный коэффициент трения качения

$$\mu_{roll}^{eff} = \frac{d}{\frac{1}{2}gt^2}.$$

Отметим, что в это соотношение не входит масса шара. Введем в рассмотрение безразмерную величину, обратную к величине эффективного коэффициента трения качения и называемую «**скоростью стола**». (В отечественном бильярде есть аналогичное по смыслу понятие, называемое «раскатом сукна». Его не следует путать с еще одним бытующим понятием – «раскат стола». Когда говорят о раскате стола, во внимание принимают не только свойства сукна, но и упругость бортов. Прим. пер.). Иными словами, скорость стола определяется как $1/\mu_{roll}^{eff}$ и также не зависит от массы шара. Столы для Пула являются очень медленными, когда их скорость заключена в интервале от 50 до 70. Для большинства столов скорость составляет 80÷100, а очень быстрые столы имеют скорость более 120. По сравнению с сукном, используемым для игры в Пул, на столы для Карамболя обычно натягивают более тонкое и гладкое сукно. Поэтому на быстрых карамбольных столах величина скорости может превышать 150. Отдельно отметим, что сила трения качения значительно меньше силы трения скольжения.

Силы трения скольжения и качения шара на бильярдном столе не зависят друг от друга. Для примера, рассмотрим движение шара по твердой резиновой поверхности. Величина силы трения скольжения при этом будет довольно-таки большой, в то время как противодействие качению – относительно слабым. Наоборот, для шара, перемещающегося по тефлоновой поверхности с мягкой подкладкой, трение скольжения будет относительно небольшим, а сопротивление качению – чувствительным. Единообразие материалов, из которых изготавливают бильярдное сукно, лимитирует разброс экстремальных значений скорости стола, встречающихся на практике. Правила, устанавливаемые Бильярдным Конгрессом Америки (*Billiard Congress Of America – BCA*), определяют, что бильярдное сукно должно быть преимущественно шерстяным. Требования PBTA (Professional Billiard

Tour Organization) более конкретны – они выделяют марку и тип используемого сукна, например – Simonis 860. С одной стороны, можно отметить конструктивность такого подхода – в смысле стандартизации требований к используемому сукну, но с другой – в нем можно усмотреть элементы рекламы и спонсорства. Для нового (только что натянутого) быстрого сукна на пуловском столе типичны значения скорости от 100 до 130.

Задача 1.5

Наблюдения за шаром, медленно катящимся по стандартному девятифутовому столу для Пула, показали, что он двигался от левого короткого борта до правого 7 секунд. Достигнув правого борта, шар остановился. Какова скорость стола? Какой была начальная скорость шара, когда он касался левого борта?

Ответ: Игровое поле девятифутового стола имеет длину 100". Между короткими бортами центр шара проходит расстояние $(100" - 1.125" - 1.125") = 97.75"$. (Здесь 1.125" – радиус шара; прим. пер.). Ускорение свободного падения равно $g = 386 \text{ in/c}^2$. Вычислим скорость стола:

$$\text{Скорость стола} = 1/\mu_{roll}^{eff} = \frac{\frac{1}{2}gt^2}{d} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 386 \cdot t^2}{97.75} = 1.97 \cdot (7^2) = 96.7 .$$

Полученное значение свидетельствует о том, что рассматриваемый стол является довольно быстрым. Заметим, что отношение $\frac{g}{2d}$ равно 1.97, что весьма близко к целому значению 2. Поэтому для оценки скорости девятифутового пуловского стола можно с неплохой точностью использовать приближенное, но очень простое соотношение $2t^2$, в котором время нужно выражать в секундах.

Определим теперь скорость шара при соприкосновении с левым бортом:

$$V_0 = \mu_{roll}^{eff} gt = \frac{2d}{t} = \frac{2 \cdot 97.75}{7} = 27.9 \text{ in/c}.$$

Из последнего соотношения видно, что начальная скорость шара равна удвоенному отношению пройденного расстояния d ко времени движения t . Это полезно запомнить.

Упражнение 1.1

Определите величины скорости нескольких столов, на которых Вы обычно играете. Для того чтобы заставить шар медленно катиться, не наносите удар кием, а воспользуйтесь следующим советом. Возьмите два кия и скрепите их вместе в районе турняка (например, с помощью липкой ленты). Образовавшийся между киями желобок используйте для того, чтобы по нему самостоятельно скатывался бильярдный шар. Встаньте у короткого борта, возьмите кии одной рукой в районе центра тяжести конструкции и обоприте их наклейками о сукно стола. При этом направьте ось желоба примерно параллельно длинным бортам. Наклоните кии, приподняв турняки. Свободной рукой положите шар на желоб и отпустите, чтобы он самостоятельно скатился, достиг противоположного короткого борта, ударился в него и покатился назад. Регулируя наклон желоба и начальное местоположение шара на киях, добейтесь того, чтобы шар останавливался точно в момент возврата к ближнему от Вас короткому борту. Засекайте время, затраченное шаром на качение от дальнего борта к ближнему (видимо, для этого Вам понадобится помощник). На самом деле, после соударения с дальним бортом шар в течение некоторого отрезка времени будет двигаться со скольжением по сукну. Однако, длительность этого этапа движения будет

совсем незначительной, и поэтому можно с удовлетворительной точностью считать, что естественное качение наступает сразу же после отражения от борта. Для расчета величины скорости стола усредните результаты замеров времени движения шара.

(Представленный здесь перевод содержания Упражнения 1.1 является несколько условным. Дело в том, что оригинальный текст состоит всего лишь из четырех предложений, дающих общую канву того, что предлагается сделать. В развернутый же «перевод» добавлены частности, не искажающие исходного смысла. Прим. пер.).

Третья важная сила трения действует на бильярдные шары при их соударении. Силы, возникающие при контакте двух шаров, меняются во время соударения. Время контакта очень мало, вследствие чего эти силы, приводящие к передаче энергии от одного шара другому, могут быть значительны по величине. Силы трения действуют в направлении касательной к поверхностям шаров в точке их контакта (такие силы принято называть тангенциальными). Схематически это показано на рисунке 1.1. Сила, которая ускоряет шары, направлена вдоль линии, соединяющей их центры (именуемой **центральной линией соударения**), и называется нормальной силой. Результирующая сила, действующая на шар, является векторной суммой двух сил – нормальной и тангенциальной. Так как результирующая сила направлена не по центральной линии соударения, то от этой линии отклоняется и вектор скорости шара. Смещение направления скорости от центральной линии соударения вследствие наличия тангенциальных сил трения называют также **отклонением за счет соударения** или **отклонением за счет вращения** – в зависимости от того, что послужило причиной этого смещения – наличие угла резки (*это понятие будет рассмотрено ниже; прим. пер.*) или вращение шаров. Когда шары двигаются навстречу и при соударении проскальзывают друг относительно друга, возникающие силы трения ускоряют оба шара. Каждая из пары противоположно направленных сил ускоряет тот шар, к которому она приложена. Однако заметим, что угловые ускорения, приобретаемые шарами вследствие действия сил трения, направлены в одну и ту же сторону (имеют одинаковый знак). Причина тому – противоположная направленность сил, приложенных к шарам с разных сторон (фронтальной и тыльной). Как и выше, будем полагать, что сила трения не зависит от скорости скольжения контактирующих поверхностей друг относительно друга. Такое допущение справедливо с достаточно высокой точностью. Также будем считать, что сила трения постоянна по величине, за исключением того отрезка времени, когда шары «сцеплены» между собой. В это время сила трения вообще не действует.

Задача 1.6

Два неподвижных прицельных шара перед ударом касались друг друга (по терминологии отечественного бильярда такие шары называют «зайцами»; прим. пер.), а центральная линия соударения проходила перпендикулярно короткому борту через отметку на столе (точку, на которой в начале партии устанавливается головной шар пирамиды; прим. пер.). При этом ближайшая к борту точка поверхности дальнего от игрока прицельного шара находилась на расстоянии $d_N = 72"$ от борта. Удар битком был нанесен по ближнему прицельному шару так, что траектория битка имела наклон по отношению к центральной линии «зайцев». После удара дальний шар из пары «зайцев» попал в борт так, что точка касания сместилась от точки пересечения центральной

линии с этим бортом на расстояние $d_T = 4''$. Каков был коэффициент трения между «зайцами», с учетом того, что указанный сдвиг стал следствием отклонения за счет соударения?

Ответ: Изображенные на рисунке 1.1 силы, в приложении к рассматриваемой задаче направлены следующим образом: вектор силы F_N проходит через отметку на столе, а F_T – перпендикулярно центральной линии соударения. Так как по условиям мы имеем здесь дело с отклонением за счет соударения, вектор скорости прицельного шара (имеющий проекцию V_N по нормальному направлению и V_T – по тангенциальному) направлен параллельно вектору суммарной силы F . По определению, коэффициент трения равен $\mu = \frac{F_T}{F_N}$. Это соотношение можно преобразовать следующим образом:

$$\mu = \frac{F_T}{F_N} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{V_T}{V_N} = \frac{d_T}{d_N} = \frac{D_T}{D_N},$$

где α – угол наклона вектора скорости дальнего прицельного шара к центральной линии; D_T – сдвиг центра дальнего прицельного шара относительно центральной линии в момент касания борта; D_N – расстояние, пройденное дальним прицельным шаром до момента соударения с бортом. Здесь учтено, что $d_T = D_T$, а $d_N = D_N$. Подстановка известных значений D_T и D_N дает возможность вычислить величину коэффициента трения $\mu = 0.0556$.

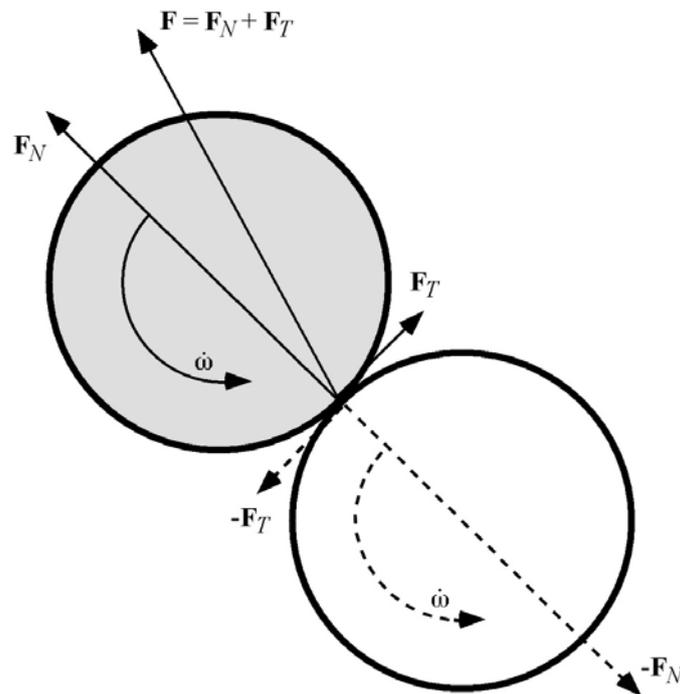


Рис 1.1. Для двух контактирующих шаров показаны: нормальные силы F_N ; тангенциальные силы F_T , образующиеся за счет трения скольжения; угловые ускорения $\dot{\omega}$. Величины сил в период соударения изменяются, но отношение тангенциальной и нормальной сил остается постоянным; оно определяет величину коэффициента трения. Величина тангенциальных сил показана в значительно увеличенном масштабе. Следует обратить внимание на то, что тангенциальные силы действуют на шары в разных направлениях, но результирующие угловые ускорения имеют одинаковый знак.

Упражнение 1.2

Измерьте угол отклонения за счет соударения, проведя в Вашей бильярдной ряд экспериментов с разными комплектами шаров. Обычно, для изношенных (потертых) или грязных шаров коэффициент трения больше по величине, чем для новых. Нанесите немного бильярдного мела в точке контакта «зайцев» и обратите внимание на то, что при таком эксперименте величина коэффициента трения увеличится. В другом эксперименте нанесите на место соприкосновения шаров небольшое количество порошка талька. Следствием этого будет снижение величины коэффициента трения. Наконец, смочите точку контакта водой или слюной. В результате, коэффициент трения будет близок к нулю. Запомните, что учет различий в величине отклонения за счет соударения – важный аспект для успешной игры разными комплектами шаров.

Четвертая сила, проявляющая себя в бильярде, представляет собой статическое трение между наклейкой кия и битком. При ударе наклейка не должна проскальзывать по поверхности шара. Если же это все-таки непреднамеренно происходит, то такую ситуацию в бильярде называют **кикс**, после которого биток ведет себя непредсказуемо. А если игрок намеренно наносит удар так, что наклейка проскальзывает относительно битка, то чаще всего это квалифицируется как удар с нарушением правил. Сила статического трения связана с нормальной силой через коэффициент статического трения $\mu_{static} = F_T / F_N$, где F_T – минимальная величина силы, приводящая к проскальзыванию наклейки кия по поверхности битка.

Задача 1.7

В результате наблюдений было замечено, что кикс начинает проявляться, когда при ударе наклейка контактирует с битком в точке, находящейся по высоте посередине между центром шара и его самой верхней точкой. Каков при этом коэффициент статического трения? Каково вертикальное смещение наклейки от центра шара, если коэффициент статического трения равен единице?

Ответ: Обратимся к рисунку 1.2. Котангенс угла наклона продольной оси кия к тангенциальному направлению α можно выразить следующим образом:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\frac{b}{R}}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{R}\right)^2}},$$

где b – вертикальное смещение наклейки кия от центра шара; R – радиус шара. Когда сила F приложена к шару в горизонтальном направлении, она может быть представлена в виде суммы (векторной; прим. пер.) нормальной силы $F_N = F \sin \alpha$, направленной через центр шара, и тангенциально направленной силы трения величиной $F_T = F \cos \alpha$. Коэффициент статического трения и максимальное смещение b_{max} связаны соотношением:

$$\mu_{static} = \frac{F_T}{F_N} = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\frac{b_{max}}{R}}{\sqrt{1 - \left(\frac{b_{max}}{R}\right)^2}}.$$

Отсюда легко выразить отношение b_{max} к R :

$$\frac{b_{max}}{R} = \frac{\mu_{static}}{\sqrt{1 + \mu_{static}^2}}$$

Из предпоследнего равенства при $\frac{b_{max}}{R} = \frac{1}{2}$ найдем величину коэффициента статического трения $\mu_{static} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2}} = 0.577$. При $\mu_{static} = 1$ получим $\frac{b_{max}}{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$.

Полученные численные значения подтверждают, что чем больше значение коэффициента статического трения, тем дальше можно сместить наклейку кия от центра шара при ударе без кикса.

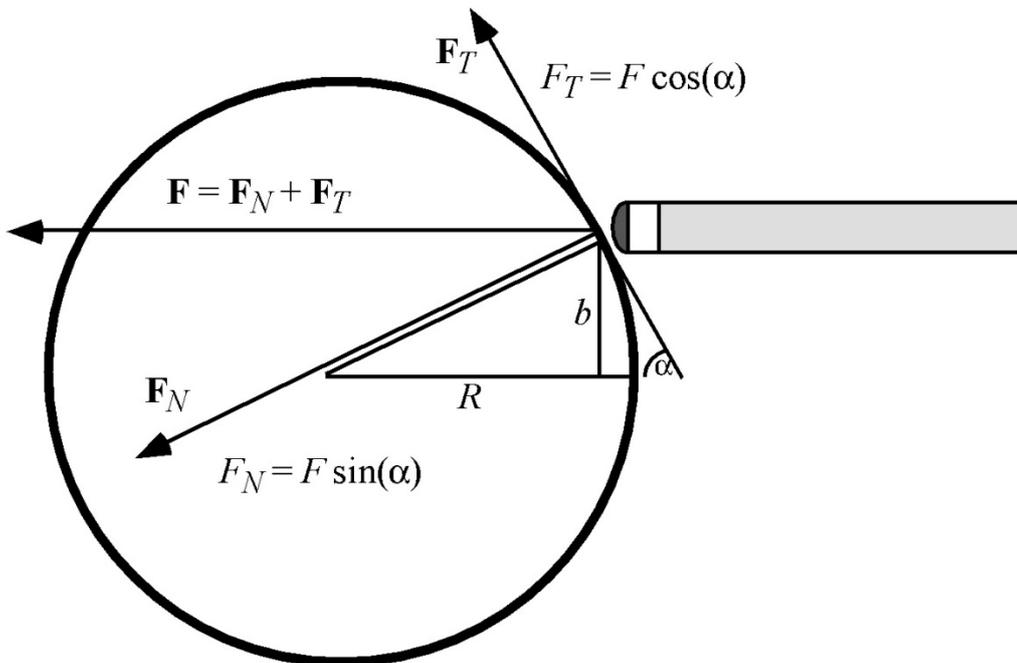


Рис 1.2. При контакте наклейки кия с битком схематически показаны: нормальная сила F_N ; тангенциальная сила F_T , образуемая за счет статического трения; результирующая сила F . Величины сил при контакте изменяются, но отношение тангенциальной и нормальной сил остается постоянным; оно определяется местоположением точки соприкосновения наклейки с битком и ограничено величиной коэффициента статического трения.

Упражнение 1.3

Найдите коэффициент статического трения между наклейкой Вашего кия и шаром. Вместо определения той точки шара, удар в которую приведет к киксу, поставьте биток рядом с бортом и, удерживая кий вертикально, обоприте его наклейкой о биток. Измерьте то смещение от центра шара, при котором кий не будет удерживаться на битке, а начнет проскальзывать. Найденное смещение используйте для расчета μ_{static} по формуле из задачи 1.7. Протрите наклейку, очищая ее от бильярдного мела, и в результате получите наименьшее значение μ_{static} . Поэкспериментируйте с разными наклейками и разными типами мела. Обратите внимание на то, что измерять следует смещение места касания наклейки, а не смещение оси кия, ведь это – не одно и то же.

2. Скольжение и естественное качение

Рассмотрим движущийся шар, вращающийся вокруг своего центра масс. Пусть в некоторый момент известны поступательная скорость его центра масс и угловая скорость вращения. Для простоты пока будем считать, что ось вращения горизонтальна и направлена перпендикулярно вектору поступательной скорости (то есть, шар обладает поступательным вращением – верхним или нижним; например, $\mathbf{V} = V \hat{\mathbf{i}}$ и $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{j}}$). Когда шар скользит по поверхности стола, трение между ним и сукном изменяет как поступательную, так и угловую скорость. Сила трения придает шару ускорение, которое увеличивает или уменьшает поступательную скорость до тех пор, пока не наступит ситуация «равновесия», в которой поступательная скорость и угловая скорость вращения «соответствуют» друг другу. В этот момент сила трения скольжения становится равной нулю. Дальнейшее движение шара называется **естественным качением** (также применяются названия **натуральное качение**, **нормальное вращение** и **вращение без скольжения**). За малый отрезок времени dt центр масс шара проходит расстояние Vdt , а точка его опоры смещается относительно центра масс на расстояние $R\omega dt$ (*естественно, при этом опорой становится другая точка поверхности шара; прим. пер.*). Ситуация «равновесия» скоростей наступает при равенстве указанных расстояний, а, следовательно, когда выполняется соотношение $V = R\omega$.

Состояние естественного качения занимает важное место в бильярдной игре. Действительно, сила трения скольжения всегда изменяет поступательную и угловую скорости так, что обязательно наступает естественное качение шара (*конечно, если до этого момента шар не столкнется с чем-либо или не покинет пределы игрового поля; прим. пер.*). После этого он катится до тех пор, пока не остановится или пока не произойдет его соударение с другим шаром или бортом.

При скольжении кинетическая энергия шара не остается постоянной. Справедливость этого утверждения легко доказать, рассмотрев движение бита после удара кием, придающего шару нижнее продольное вращение (см. рисунок 2.1). Непосредственно после удара поступательная и угловая скорости направлены в разные стороны (*стремятся перемещать шар противоположно друг другу; прим. пер.*). Начальное действие силы трения стремится одновременно замедлить поступательную скорость и скорость углового вращения шара, что приводит к уменьшению обеих частей кинетической энергии (*поступательной и вращательной; прим. пер.*).

При анализе динамики шара важно понимать – какое значение принимает отношение угловой скорости к поступательной ω / V . В некоторых ситуациях удобней использовать безразмерное отношение $J = R\omega / V$. Когда одновременно рассматриваются несколько компонент угловой скорости (*при вращении шара относительно нескольких осей; прим. пер.*) применяют безразмерный вектор отношений $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z) = R\boldsymbol{\omega} / V$. Согласно обсуждению, представленному выше, отношение $J_y = +1$ соответствует состоянию естественного качения шара, когда его поступательная скорость направлена по оси X .

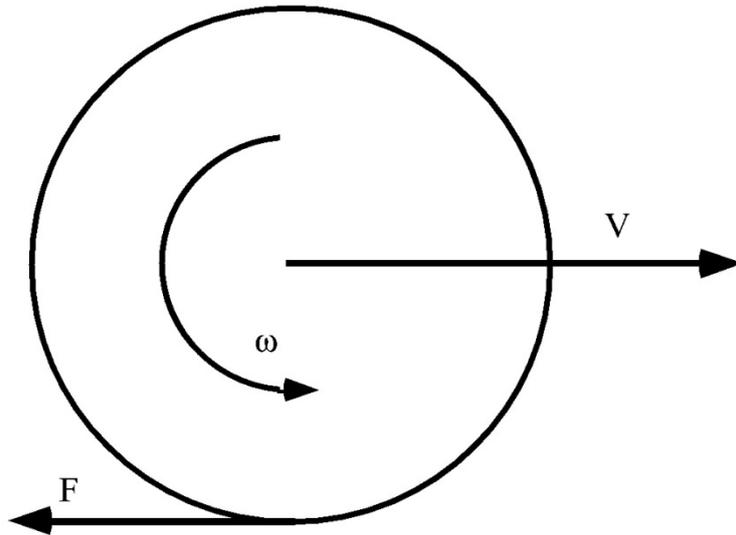


Рис 2.1. Для шара, имеющего нижнее продольное вращение, схематически показаны: поступательная скорость V ; угловая скорость ω ; сила трения F . Видно, что F и ω направлены противоположно V .

Сила трения приложена к шару в его самой нижней точке – там, где он касается сукна. Ее действие направлено горизонтально, то есть в плоскости стола. Сила трения придает шару ускорение согласно уравнению $\mathbf{F} = M\dot{\mathbf{V}}$, интегрирование которого на некотором интервале времени t дает соотношение, определяющее импульс силы:

$$\mathbf{F} t = M(\mathbf{V} - \mathbf{V}_0),$$

где \mathbf{V}_0 – вектор начальной скорости. Следует обратить внимание на то, что после удара, придающего шару нижнее вращение, направления поступательной скорости и силы трения противоположны. Это приводит к тому, что с течением времени поступательное продвижение шара замедляется. Когда же скорость и сила трения направлены в одну сторону, а угловая скорость больше отношения V / R (такая ситуация характерна для удара кием, нанесенного с избыточным верхним вращением; при этом $R\omega_0 > V_0$), поступательная скорость скользящего шара с течением времени увеличивается. Для случая, изображенного на рисунке 2.1, последнее равенство можно представить в более простом виде $|F|t = -M(V - V_0)$. С учетом того, что $|F| = \mu Mg$, получим $\mu g t = -(V - V_0)$, где отрицательный знак в правой части равенства отражает разную направленность поступательной скорости и силы трения. (В общем случае, когда величина V_0 положительна, $F > 0$ при $R\omega_0 > V_0$ и $F < 0$ при $R\omega_0 < V_0$. Иными словами, величины F и $(J - 1)$ имеют один и тот же знак).

Угловая скорость скользящего по сукну шара изменяется согласно дифференциальному уравнению $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = I \dot{\boldsymbol{\omega}}$. Для удара с нижним вращением $\mathbf{r} = -R \hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{F} = -|F| \hat{\mathbf{i}}$ и $\boldsymbol{\omega} = \dot{\omega} \hat{\mathbf{j}}$. В таком случае приведенное уравнение упрощается и принимает вид

$$R|F|t = I(\omega - \omega_0).$$

Отметим, что с помощью этого равенства для ситуации, изображенной на рисунке 2.1, можно заключить: после удара с нижним вращением сила трения скольжения увеличивает угловую скорость с начальной отрицательной величины до конечной

положительной. Если биток соударяется с прицельным шаром в момент, когда угловая скорость все еще остается отрицательной, нанесенный удар называют **оттяжкой**. Если же к моменту контакта шаров отрицательная угловая скорость полностью исчерпывается за счет скольжения по сукну (*в этот момент угловая скорость становится нулевой по величине; прим. пер.*), то такой удар называют по-английски Stun Shot, что можно перевести как «оглушительный удар». (В Русском Биллиарде для подобного удара нередко употребляли название «клапшот», в переводе означающее «хлопающий удар». Термины очень сходны, не правда ли? Однако, оба они – довольно-таки неудачные. Прилагательные «оглушительный» и «хлопающий», видимо, были подобраны для подчеркивания силы нанесенного удара. Но для того, чтобы при соударении шаров биток не имел продольного вращения, совсем не обязательно «колотить» кием по шару до звона в ушах. Этого можно добиться и по-другому – с помощью несильного, мягкого удара. Суть происходящего точнее отражает иногда используемый термин «удар с остановкой битка». Действительно, после соударения биток, не имеющий продольного вращения, может сразу остановиться. Но для этого нужно, во-первых, чтобы соударение произошло «в лоб», то есть без резки, а во-вторых, биток при этом еще не должен иметь и бокового вращения. Поэтому название «удар с остановкой битка» можно применять лишь в частных случаях. Гораздо удачней – термин «**плоский удар**», который и будет использоваться ниже в настоящем переводе. Прим. пер.). Если к моменту соударения с прицельным шаром биток уже успевает переменить нижнее вращение на верхнее (при этом угловая скорость положительна; в частности, соударение может произойти уже на этапе естественного качения), то нанесенный игроком удар называют **тормозящим накатом** (иногда его именуют «медленным накатом»; прим. пер.). Из последнего соотношения легко увидеть, что величина угловой скорости в момент контакта шаров определяется начальной угловой скоростью, силой трения скольжения шара по сукну и временем, прошедшим до соударения. Именно от этих величин и зависит то, какой именно удар – оттяжка, плоский удар или тормозящий накат – будет реализован в конкретной практической ситуации. (Действительно, одно дело – задумать какой-то удар, а другое – выполнить его на практике. Например, игрок может захотеть сделать оттяжку, но технически неверно ударить по битку, в результате чего на практике получится плоский удар, а то и тормозящий накат. Прим. пер.).

Задача 2.1

Как связаны между собой поступательная и угловая скорости шара при скольжении по сукну?

Ответ: Подставляя связь $|F|t = -M(V - V_0)$ в последнее соотношение и исключая $|F|t$, получим

$$\frac{I}{R} (\omega - \omega_0) = -M(V - V_0).$$

Отсюда, раскрывая значение для I , будем иметь

$$V = V_0 - \frac{2}{5} R (\omega - \omega_0).$$

Полученная связь справедлива в любой момент времени, когда шар скользит по сукну. И хотя мы ее получили, исходя из того, что был нанесен удар с нижним вращением, она действительна и для всех прочих ударов, после которых начинается скольжение шара. Обратим внимание на то, что после ударов с нижним вращением величина V

уменьшается, а ω увеличивается (то же самое наблюдается и после ударов, нанесенных с верхним вращением, если выполняется условие $R\omega_0 < V_0$; прим. пер.); после же ударов с избыточным верхним вращением (когда $R\omega_0 > V_0$) имеем обратную «картину» – V увеличивается, в то время как ω уменьшается. Полезно заметить, что полученная связь между V и ω не включает в себя массу шаров и коэффициент трения скольжения.

Задача 2.2

Требуется определить – как величина конечной поступательной скорости V_{NR} , по достижении которой шар переходит к естественному качению, зависит от начальных скоростей – поступательной V_0 и угловой ω_0 (величина V_{NR} будет одновременно являться и начальной поступательной скоростью этапа естественного качения; прим. пер.).

Решение: Естественное качение начинается, когда поступательная и угловая скорости уравниваются, то есть когда выполняется равенство $V = R\omega$. Учитывая это, преобразуем последнее соотношение из задачи 2.1 к виду

$$V_{NR} = \frac{5}{7} V_0 + \frac{2}{7} R\omega_0.$$

Отсюда видно, что если начальная угловая скорость равна нулю, то по завершении скольжения поступательная скорость будет составлять пять седьмых от своего начального значения. Если начальные значения поступательной и угловой скорости равновесны ($V_0 = R\omega_0$), то естественное качение со скоростью $V_{NR} = V_0$ наступает сразу же после нанесения удара. Если начальная угловая скорость отрицательна, как это бывает после удара с нижним вращением, конечная скорость V_{NR} будет меньше пяти седьмых от начальной скорости. Например, если начальная угловая скорость является отрицательной, а по величине равна уравнивающей угловой скорости ($V_0 = -R\omega_0$), то конечная поступательная скорость будет равняться всего лишь трем седьмым от начального значения. Когда начальная угловая скорость отрицательна и значительна по величине (при $R\omega_0 < -\frac{5}{2} V_0$; прим. пер.), конечная поступательная скорость будет меньше нуля; такая ситуация может сложиться после существенно наклонного удара кием (называемого «массе») или после соударения с прочим шаром. (Теоретическую возможность нанесения удара, после которого шар сначала будет со скольжением удаляться от игрока, а в какой-то момент, не столкнувшись с чем-либо, переменит направление движения на обратное и в конце концов будет естественно катиться к игроку, впервые обосновал Г.Кориолис в своей книге «Математическая теория явлений бильярдной игры». О том, что француз Миньо выполнял такой удар при многочисленных свидетелях, упоминал в своей книге «Теория бильярдной игры» теоретик Русского Биллиарда А.И.Леман. Именно после того, как Франсуа Миньо изобрел кожаную наклейку для кия, на бильярде стали возможны разнообразные «крученые» удары и, в частности, тот удар, который здесь обсуждается. Кстати, именно наблюдения за игрой Миньо сподвигли Г.Кориолиса на то, чтобы написать и выпустить в свет его книгу. Прим. пер.). Следует особо отметить, что скорость естественного качения V_{NR} не зависит от трения между шаром и сукном, а также от массы шара.

Упражнение 2.1

Проведите эксперимент, выполняя тормозящий накат. В качестве битка используйте полосатый шар – для того, чтобы визуально ощущать его вращение. Ударьте по битку в точку, расположенную ниже центра, и наблюдайте, как вначале он вращается назад (имеет нижнее вращение). Трение с сукном замедлит это вращение, а затем сведет его к нулю; шар при этом будет продолжать скользить по столу. С этого момента биток начнет приобретать верхнее вращение. В конце концов, в некоторой точке своего движения шар перестанет скользить, и начнется естественное качение. В течение всего отрезка времени, когда шар скользил по сукну, его поступательная скорость уменьшалась (*именно поэтому такой удар и был назван тормозящим; прим. пер.*). Если у Вас есть видео-камера, проведите съемки нескольких тормозящих накатов, а потом просмотрите их в прямом и обратном направлении на малой скорости воспроизведения. Тормозящий накат целесообразно применять, когда в позиционных целях требуется малая скорость битка при соударении с прицельным шаром, а поверхность стола загрязнена или игровое поле несколько наклонено. (*Действительно, малой скорости соударения можно добиться, нанеся слабый удар. Но при этом можно и не попасть в нужную резку при соударении – на пути медленно катящегося битка может встретиться какая-нибудь соринка, или биток может свернуть с номинальной траектории из-за поката стола. После же тормозящего наката большую часть своего пути биток проходит на чувствительной скорости, так что загрязнения и уклон сказываются на движении незначительно. Прим. пер.*). Высокая начальная скорость шара уменьшает проявление эффекта наклона стола, ведь только в самом конце движения после того, как началось естественное качение, поступательная скорость снижается примерно до трех седьмых от начального значения. Средняя же скорость движения составляет приблизительно пять седьмых от начальной. А это означает, что эффект смещения битка ввиду наклона стола снижается на две седьмых или почти 29% по сравнению со случаем, когда естественное качение наступает сразу же после удара кием.

Упражнение 2.2

Поэкспериментируйте, изучая плоский удар. Вспомните, что угловая скорость вращения битка вокруг горизонтальной оси должна равняться нулю при его соударении с прицельным шаром или бортом стола. Устанавливайте биток на разных расстояниях от прицельного шара и наносите удары без резки (чтобы биток попал «в лоб» прицельному шару). Как и в предыдущем упражнении, используйте полосатый биток, чтобы хорошо видеть его вращение. При фиксированных значениях расстояния между шарами и силы удара (скорости кия во время соприкосновения с битком) правильно выбирайте величину придаваемого нижнего вращения (*вертикальное смещение точки удара кием от центра битка; прим. пер.*), чтобы точно к моменту соударения оно полностью исчерпывалось за счет трения о сукно. После соударения биток должен незамедлительно останавливаться на месте, не имея ни верхнего ни нижнего продольных вращений. Ослабляя силу удара при фиксированном начальном расстоянии между шарами, добивайтесь большей начальной угловой скорости нижнего вращения. Проведите эксперименты на разных столах. Для того чтобы выполнить плоский удар на засаленных столах (*автор называет их «липкими»; прим. пер.*) (с более высоким коэффициентом трения скольжения), требуются более выраженные нижние вращения, чем на «скользких» столах. Плоские удары важны для ведения позиционной игры и, как это будет обсуждаться ниже, для точной оценки углов отскока.

Задача 2.3

Какова форма траектории шара, скользящего по сукну до наступления естественного качения? Какова форма траектории при естественном качении?

Ответ: Проинтегрируем уравнение движения шара $\mathbf{F} = M\dot{\mathbf{V}}$ дважды и получим

$$\frac{1}{2} \mathbf{F} t^2 = M(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0 - \mathbf{V}_0 t),$$

где \mathbf{q} – вектор, определяющий местоположение центра шара; его компонентами являются координаты шара по осям X и Y . Преобразуем последнее соотношение к виду

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \mathbf{V}_0 t + \frac{1}{2M} \mathbf{F} t^2.$$

Так как выбор осей координат произволен, разместим начало системы координат в точке начального местоположения шара при $t = 0$. Направим ось X так, что проекция силы трения скольжения на нее будет нулевой (*иными словами, сила трения направлена по оси Y ; прим. пер.*). Тогда последнее соотношение можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{0x} \\ V_{0y} \end{pmatrix} t + \frac{1}{2M} t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ F_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{0x} \\ V_{0y} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\mu g \end{pmatrix} t^2,$$

где x и y – координаты шара по осям X и Y , соответственно; V_{0x} и V_{0y} – проекции начальной поступательной скорости на оси X и Y , соответственно; F_{0y} – проекция силы трения скольжения на ось Y . Выбором осей мы добились того, что скорость по оси X остается с течением времени неизменной. Из верхней части последнего уравнения видно, что координата x изменяется по времени линейно: $x = V_{0x}t$. Выражая отсюда $t = \frac{x}{V_{0x}}$ и подставляя эту связь в нижнюю часть зависимости

координат x и y от времени, будем иметь $y = \frac{V_{0y}}{V_{0x}} x + \frac{\mu g}{2V_{0x}^2} x^2$. Легко видеть, что мы получили уравнение параболы. Следовательно, пока шар скользит по сукну, его траектория является параболой, форма которой определяется начальной поступательной скоростью и силой трения между шаром и сукном. Вид траектории шара не зависит от его массы. Пока шар скользит, сила трения не изменяется по величине и направлению действия. Эти выводы можно применить к движению шаров после их соударения с бортом и между собой, а также к движению битка после нанесенного по нему удара существенно наклоненным кием («массе» или «полу-массе»). Сила трения ускоряет шар до тех пор, пока он не достигнет состояния естественного качения. Начиная с этого момента, сила трения скольжения не действует, и нет других боковых сил, способных придать шару ускорение. А это значит, что при естественном качении шар движется по прямолинейной траектории.

Задача 2.4

Какую долю общей кинетической энергии составляют поступательная энергия и энергия вращения, когда шар достигает состояния естественного качения?

Ответ: Найдем общую кинетическую энергию шара при естественном качении:

$$T = T_{trans} + T_{rot} = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{5} MV^2 = \frac{7}{10} MV^2.$$

Отсюда получим искомые доли: $T_{trans}/T = 5/7$; $T_{rot}/T = 2/7$.

Теперь, когда мы имеем выражение для полной кинетической энергии естественно катящегося шара, можно более подробно обсудить тему противодействия вращению. Выше рассмотренная консервативная модель шара, катящегося вверх по наклонной плоскости, будет применена и здесь для того, чтобы понять действие вовлеченных в этот процесс сил. В случае, когда вращающийся без скольжения шар поднимается по наклонной плоскости, результат действия этих сил известен. Действительно, хоть шар и тормозится, в любой момент должно выполняться условие естественного качения $V = R\omega$. Однако, обеспечивающие указанное условие силы не очевидны. Для того чтобы при изучении динамики шара непосредственно применить соотношения, следующие из законов Ньютона, необходимо наперед иметь информацию об этих силах. В данном случае это – не так. Поэтому, используем уравнения движения в форме Лагранжа. Введем в рассмотрение обобщенные координаты q_i , $i = \overline{1,3}$: $q_1 = S$; $q_2 = \theta$; $q_3 = \lambda$, где S – длина пути, пройденного шаром; θ – суммарный угол, на который шар поворачивается вокруг своего центра за время движения; λ – множитель Лагранжа, подлежащий дальнейшему определению. Тогда обобщенные скорости \dot{q}_i , $i = \overline{1,3}$ представятся как $\dot{q}_1 = \dot{S} = V_s$; $\dot{q}_2 = \dot{\theta} = \omega$; $\dot{q}_3 = 0$, где V_s – поступательная скорость шара; ω – угловая скорость вращения. Составим функцию Лагранжа L в виде $L = T - U + \lambda f$, где T – кинетическая энергия; U – потенциальная энергия; f – соотношение, устанавливающее связь между обобщенными координатами и приведенное к виду $f = 0$. Соотношения для T , U и f таковы: $T = \frac{1}{2} MV_s^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$; $U = SMg \sin \alpha$; $f = R\theta - S = 0$, где α – угол наклона плоскости. Уравнения движения в форме Лагранжа определяются соотношениями $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$. Вычисляя производные и подставляя их в последние соотношения, получим:

$$-Mg \sin \alpha - \lambda - M\dot{V}_s = 0 ,$$

$$\lambda R - I\dot{\omega} = 0 ,$$

$$R\theta - S = 0 .$$

Дифференцируя последнее уравнение дважды по времени, найдем, что $R\dot{\omega} = \dot{V}_s$. С учетом этого, выразим из второго уравнения движения до сих пор неизвестный множитель $\lambda = I \dot{V}_s / R^2$. Подстановка такого значения множителя в первое из трех представленных выше соотношений дает уравнение движения шара при естественном качении без скольжения:

$$M\dot{V}_s = -\left(1 + \frac{I}{MR^2}\right)^{-1} Mg \sin \alpha = -\frac{5}{7}Mg \sin \alpha = -Mg \sin \alpha + \frac{2}{7}Mg \sin \alpha = \\ = F_{gravity} + F_{constraint} ,$$

где $F_{gravity} = -Mg \sin \alpha$ – проекция силы тяжести на плоскость, по которой движется шар; $F_{constraint} = \frac{2}{7}Mg \sin \alpha$ – сила сопротивления движению. Если бы вместо естественного вращения без скольжения рассматривалось чистое скольжение шара, то уравнение его движения можно было бы записать с помощью второго закона Ньютона в виде $M\dot{V}_s = F_{gravity} = -Mg \sin \alpha$. Сравнивая полученные уравнения движения, можно заметить, что при скольжении продвигающийся шар тормозится быстрее, чем при естественном качении. Помимо этого, видно, что при качении на шар действует сила, порожденная наличием статического трения между шаром и наклонной плоскостью.

Она направлена противоположно силе тяжести, то есть вверх, а ее проекция на плоскость, по которой перемещается шар, равна $\frac{2}{7}Mg \sin \alpha$. Ввиду того, что эта сила не приводит к скольжению, рассеяния энергии в рассматриваемой модели нет – потери кинетической энергии здесь вносят свой вклад в накопление потенциальной энергии. В первом разделе вместо движения шара, вращающегося на горизонтальной деформируемой поверхности, был рассмотрен подъем вращающегося шара по абсолютно жесткой наклонной поверхности. Это позволило ассоциировать коэффициент трения вращения с синусом угла наклона поверхности: $\mu_{roll} = \sin \alpha$. Здесь же, мы получили уравнение движения шара в виде $M\dot{V}_s = -\left(1 + \frac{I}{MR^2}\right)^{-1} Mg \sin \alpha$, которое можно представить так: $-\dot{V}_s = \mu_{roll}^{eff} g$, где μ_{roll}^{eff} представляет собой эффективный коэффициент трения качения, равный

$$\mu_{roll}^{eff} = \left(1 + \frac{I}{MR^2}\right)^{-1} \sin \alpha = \left(1 + \frac{I}{MR^2}\right)^{-1} \mu_{roll} = \frac{5}{7} \mu_{roll} .$$

В каких случаях при изучении движения следует использовать коэффициент трения μ_{roll}^{eff} , а в каких μ_{roll} ? Ответ таков: в этом нет большой разницы; естественно, сказанное справедливо при условии, что применяется именно то уравнение движения шара, которое соответствуют выбранному коэффициенту трения. Использование коэффициента μ_{roll} предпочтительней в том смысле, что единожды определенное значение μ_{roll} можно применять для анализа динамики объектов иной формы (например, катящихся цилиндров, трубок, колец или шаров с пустотами), но изготовленных из того же материала, что и шар. С этой точки зрения, коэффициент μ_{roll} играет более фундаментальную роль, чем μ_{roll}^{eff} . Движения разных объектов будут, конечно же, несколько отличаться друг от друга, так как уравнения динамики включают в себя зависимость от момента инерции, что и демонстрирует следующая задача.

Задача 2.5

Стол для Пула, о котором шла речь в задаче 1.5, перемещен на поверхность Луны. Бильярдный шар заменен на цилиндр, сделанный из того же материала, что и шар (массы шара и цилиндра одинаковы; прим. пер.). Сколько времени этот цилиндр будет катиться от одного короткого борта до другого?

Ответ: Сначала определим значение μ_{roll} с использованием данных из задачи 1.5:

$$\mu_{roll} = \frac{7}{5} \mu_{roll}^{eff} = \frac{7}{5 \cdot 96.7} = 0.0145 .$$

Для однородного цилиндра $I = \frac{1}{2} MR^2$. На Луне гравитация вшестеро меньше, чем на Земле; ускорение свободного падения равно $g_{moon} = 63.8 \text{ in/c}^2$. Запишем уравнение движения цилиндра:

$$\dot{V} = - \left(1 + \frac{I}{MR^2} \right)^{-1} g_{moon} \mu_{roll} .$$

Интегрируя его по времени дважды, а затем выражая t , получим:

$$t = \sqrt{\frac{2(1 + \frac{I}{MR^2})d}{g_{moon} \mu_{roll}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 97.75}{63.8 \cdot 0.0145}} = 17.8 \text{ с.}$$

Определяя аналогичным образом длительность перемещения из уравнения движения шара, будем иметь $t = 17.2 \text{ с}$. Такой же результат можно было бы получить, просто масштабируя время движения шара из задачи 1.5 ($t = 7 \text{ с}$) посредством коэффициента $\sqrt{g / g_{moon}} = 2.46$. Таким образом, отличие гравитации на Земле и Луне значительней сказывается на результатах решения, чем отличие в моментах инерции шара и цилиндра.

Задача 2.6

Какое расстояние от начального местоположения до места остановки пройдет биток, получивший начальную поступательную скорость $V_0 = 0$, в зависимости от начального вращения $R\omega_0$, если учитывать действие трения скольжения и трения качения (и в предположении о том, что до остановки соударений с другими шарами и бортами не произойдет)?

Ответ: В последующих разделах будет подробно обсуждаться то, что равенство $V_0 = 0$ является начальным условием при рассмотрении движения битка после соударения с прицельным шаром без резки; при таком контакте прицельный шар полностью «забирает» поступательную скорость битка и не оказывает влияния на его вращение. (При рассмотрении соударений шаров автор будет пользоваться упрощением, полагая что продольное вращение битка при контакте не изменяется. Если же подходить к анализу более строго, то необходимо учитывать некоторое уменьшение угловой скорости вращения за счет трения между шарами. Прим. пер.). Согласно задаче 2.2, это вращение затем ускоряет шар до достижения им скорости естественного качения $V_{NR} = \frac{2}{7} R\omega_0$. Время, необходимое шару для перехода к этапу естественного качения, определяется соотношением $t_{NR} = \frac{2R\omega_0}{7\mu_s g}$, где μ_s – коэффициент трения скольжения; полагается, что угловая скорость ω_0 положительна. (Автор сразу же дает конечное соотношение для t_{NR} без каких-либо слов о том, как оно было получено. Восполняя этот небольшой пробел, обратимся к той части текста настоящего раздела, в которой обсуждалась ситуация, изображенная на рисунке 2.1. Была получена связь между временем и поступательной скоростью, которую для данного случая можно представить в виде $\mu_s g t = V - V_0$. Так как $V_0 = 0$, а в момент начала естественного качения (при $t = t_{NR}$) $V = V_{NR} = \frac{2}{7} R\omega_0$,

то подстановка этих значений дает выше приведенное соотношение для t_{NR} . Прим. пер.). За время t_{NR} биток проходит расстояние $d_{NR} = \frac{1}{2} \mu_s g t_{NR}^2 = \frac{2(R\omega_0)^2}{49\mu_s g}$ (это следует, например, из решения задачи 2.3; прим. пер.). По завершении скольжения шар переходит к естественному качению, которому препятствует сила трения качения. Время движения на этапе качения можно определить из равенства $t_R = \frac{V_{NR}}{\mu_{roll}^{eff} g}$. (Его можно получить, если проинтегрировать уравнение движения $\dot{V} = -\mu_{roll}^{eff} g$ и учесть, что конечная скорость равна нулю, а начальная $V = V_{NR}$. Прим. пер.). За время t_R биток пройдет расстояние $d_R = V_{NR} t_R - \frac{1}{2} \mu_{roll}^{eff} g t_R^2 = \frac{(V_{NR})^2}{2\mu_{roll}^{eff} g} = \frac{2(R\omega_0)^2}{49\mu_{roll}^{eff} g}$. (Чтобы получить эту зависимость, нужно дважды проинтегрировать уравнение движения битка; прим. пер.). Таким образом, полное расстояние, пройденное битком, выразится следующим образом: $d_{total} = d_{NR} + d_R = (R\omega_0)^2 \left(\frac{2}{49g}\right) \left(\frac{1}{\mu_s} + \frac{1}{\mu_{roll}^{eff}}\right)$.

Это уравнение можно использовать как при прокате битка после соударения вперед, так и для оттяжки. Важно заметить, что длина пути битка зависит от квадрата начальной угловой скорости. Это объясняет – почему гораздо проще добиться нужного положения шара при выполнении удара с остановкой битка, чем при сильной оттяжке или ударе с длинным прокатом вперед. Действительно, малые отклонения скорости вращения битка при соударении приводят к гораздо большим длинам пути шара при сильных вращениях, чем при слабых.

3. Взаимодействие наклейки кия с битком

Рассмотрим соударение горизонтально расположенного кия с битком. При контакте наклейка сообщает битку силу, приложенную в некоторой точке его поверхности. Этот контакт не мгновенен, но весьма непродолжителен по времени (длится примерно одну тысячную долю секунды; прим. пер.). В отличие от соударения шаров (характеризуемого малыми тангенциальными силами трения, немного отклоняющими основную действующую силу, направленную по центральной линии соударения), наклейка не скользит по поверхности битка (исключая, естественно, случай кикса при ударе). Следовательно, прикладываемая к битку сила направлена вперед по оси shaft кия. Угловое ускорение, создаваемое этой силой, подчиняется уравнению $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}}$. Когда по битку наносится горизонтальный удар, вектор углового ускорения удовлетворяет уравнению $\dot{\boldsymbol{\omega}}^T \frac{\mathbf{F}}{|\mathbf{F}|} = (\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{r} \times \mathbf{F}))^T \frac{\mathbf{F}}{|\mathbf{F}|} = 0$. (Это является следствием того, что при горизонтальном ударе векторы $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ и \mathbf{F} ортогональны; соответственно, при этом скалярное произведение таких векторов равно нулю. Прим. пер.). Горизонтальный удар не придает шару углового ускорения вокруг продольной оси кия, и поэтому при движении не возникает сил трения между шаром и сукном, действующих в сторону от направления продольной оси. В результате, биток скользит по прямой линии, параллельной положению продольной оси в момент контакта наклейки и битка, имея

в общем случае два вращения – продольное и боковое. При продольном вращении шар поворачивается вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной оси кия, а при боковом вращении – вокруг вертикальной оси, перпендикулярной поверхности стола. Прямолинейность траектории движения – следствие того, что тензор инерции шара представляет собой произведение некоторого множителя на единичную матрицу. (Если бы это было не так, например – если бы центр тяжести был смещен относительно геометрического центра, шар двигался бы по криволинейной траектории).

Сначала рассмотрим случай, когда наклейка кия попадает точно в центр битка. При этом выполняется равенство $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0} = \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}}$, и за счет удара биток не приобретает углового вращения. (В таком случае векторы \mathbf{r} и \mathbf{F} коллинеарны, и их векторное произведение равно нуль-вектору. Прим. пер.). При ударе происходит обмен энергией между кием и битком, в результате чего шару сообщается движущая сила. Будем полагать, что время контакта между наклейкой и шаром настолько мало, что при этом можно не учитывать эффекты взаимодействия кисти игровой руки с кием. В самом начале контакта наклейки с битком кий тормозится, в результате чего его скорость становится меньше скорости руки. В силу этого, кожа ударной руки несколько сжимается, но в тот момент, когда возникающие от этого силы начинают влиять на кий, биток и наклейка уже отделяются друг от друга.

Задача 3.1

Будем считать, что сила, прикладываемая рукой к кию, во время удара постоянна. Какова связь между энергией кия, его скоростью, длиной удара (длиной замаха; прим. пер.) и приложенной силой?

Ответ: Интегрирование соотношения $F = M_S \dot{V}$ по времени дает $F t = M_S (V - V_0) = M_S V$, где F – сила, приложенная к кию; M_S – масса кия. Повторное интегрирование позволяет получить связь $\frac{1}{2} F t^2 = M_S (x - x_0) = M_S d$, где d – длина удара (расстояние, пройденное кием при выполнении ударного движения). Выражая t из первого соотношения и подставляя его во второе, получим выражение для кинетической энергии кия $T = \frac{1}{2} M_S V^2 = F d$. Решая это уравнение относительно V , будем иметь $V = \sqrt{\frac{2Fd}{M_S}}$. Из полученных соотношений видно, что энергия кия пропорциональна приложенной силе и длине удара, а скорость кия пропорциональна квадратным корням, извлеченным из величин длины удара и силы. Важно отметить, что энергия кия, равная $T = F d$, не зависит от его массы. Это означает, что при заданной силе, прикладываемой к кию, и длине удара энергии легкого и тяжелого киев одинаковы.

Задача 3.2

Как определить приобретаемую битком скорость V_b и скорость кия после контакта с шаром V_s в зависимости от скорости кия перед соударением V_0 , массы шара M_b и массы кия M_s ?

Ответ: Перед контактом с шаром кий обладает импульсом силы (количеством

движения; прим. пер.) $M_S V_0$ и кинетической энергией $\frac{1}{2} M_S V_0^2$. После же соударения импульс силы и энергия есть как у кия, так и у битка. Применяя законы сохранения импульса и энергии, для удара в центр битка получим:

$$M_S V_0 = M_S V_S + M_b V_b,$$

$$\frac{1}{2} M_S V_0^2 = \frac{1}{2} M_S V_S^2 + \frac{1}{2} M_b V_b^2.$$

Решая эту систему из двух уравнений относительно V_b и V_S , будем иметь:

$$V_b = \frac{2M_S}{M_S + M_b} V_0,$$

$$V_S = \frac{M_S - M_b}{M_S + M_b} V_0,$$

$$V_b / V_S = \frac{2M_S}{M_S - M_b}.$$

Масса стандартного кия для Пула составляет 18 унций, что примерно в три раза больше массы шара. Исходя из этих значений, по выше приведенным формулам получим: $V_b = \frac{3}{2} V_0$, $V_S = \frac{1}{2} V_0$, $V_b / V_S = 3$. Отсюда следует, что после контакта шар движется примерно в три раза быстрее, чем кий. Если массы кия и шара примерно одинаковы (что справедливо, если используется очень легкий кий), то скорость битка будет равна скорости кия перед соударением, а скорость кия после контакта станет равной нулю; при этом кий передаст всю свою энергию шару. Если же масса кия будет меньше массы шара, то скорость кия после контакта будет направлена в другую сторону по сравнению с его скоростью перед соударением. Это значит, что в таком случае кий отразится от битка в сторону игрока. Отметим также, что скорости битка и кия после удара не могут быть равны друг другу ни при каких условиях.

Задача 3.3

Какая доля энергии передается кием битку в зависимости от их масс?

Ответ: Используя выражения для скоростей, найденные в задаче 3.2, получим:

$$T_b = \frac{1}{2} M_b V_b^2 = \frac{4M_b M_S}{(M_S + M_b)^2} \cdot \frac{1}{2} M_S V_0^2 = \frac{4M_b M_S}{(M_S + M_b)^2} T_0,$$

где T_b – энергия, приобретенная битком; T_0 – энергия кия перед соударением. Обозначим через $\alpha_s = M_S / M_b$ отношение масс кия и шара. Тогда отношение энергий можно будет представить в виде:

$$\frac{T_b}{T_0} = \frac{4\alpha_s}{(1 + \alpha_s)^2}.$$

При $\alpha_s = 1$ энергии T_b и T_0 равны друг другу, что соответствует выводу, приведенному в задаче 3.2. Когда массы кия и шара не одинаковы, отношение T_b / T_0 принимает значение меньше единицы, а это значит, что при этом эффективность передачи энергии падает по сравнению со случаем $\alpha_s = 1$.

Если кий массой 6 унций обеспечивает оптимальную передачу энергии битку, то почему он не встречается на практике? Если другие кии в этом смысле не оптимальны, то почему же их все-таки используют для игры? Отвечая на эти вопросы, выделим два независимых аспекта. Во-первых, в игре не так важно эффективно передавать энергию от кия шару, как контролировать количество переданной энергии. А делать это проще тяжелым кием, чем значительно облегченным. И поэтому, неотъемлемая неэффективность передачи энергии (в силу

разницы масс кия и шара) с другой стороны является залогом уменьшения ошибок в скорости, сообщаемой битку. Исключением является начальный удар в Пуле – разбой пирамиды, при котором битку требуется придать максимум энергии. Это приводит нас ко второму аспекту ответа на сформулированный выше вопрос.

За счет работы бицепса при начальном ударе ускорение придается одновременно кию и предплечью игровой руки. Чтобы понять, как это влияет на передаваемую при ударе энергию, сделаем упрощающие предположения. Заменяем в рассмотрении предплечье на эквивалентный ему по массе тонкий стержень. Тогда вместо момента инерции предплечья можно воспользоваться приблизительно равной ему величиной $\frac{1}{3}M_f L^2$ момента инерции «модельного» стержня. Здесь M_f – масса предплечья, а L – его длина (*ось вращения при этом перпендикулярна стержню и проходит через его конец; прим. пер.*). Момент инерции кия относительно локтя равен $M_s L^2$. Так как предплечье и кий ускорятся вокруг локтя, поворачиваясь при этом на угол θ под действием постоянной силы F (*условие постоянства прикладываемой силы – еще одно допущение; прим. пер.*), то общую кинетическую энергию можно определить как $T = FL\theta$ (*см. задачу 3.1; прим. пер.*). Для заданной длины удара $L\theta$ и силы F , величина T не зависит от масс кия и предплечья. Выражая общую энергию в виде суммы энергий кия T_0 и предплечья T_f , получим:

$$T = T_0 + T_f = \frac{1}{2}M_s L^2 \omega^2 + \frac{1}{6}M_f L^2 \omega^2 = T_0 \left(1 + \frac{M_f}{3M_s}\right).$$

Хотя общая кинетическая энергия фиксирована соотношением $T = FL\theta$, разделение ее на части между рукой и кием определяется отношением масс M_f / M_s . Полученное соотношение интересно тем, что определяющим фактором в разделении энергии является только отношение масс, а длина предплечья не играет никакой роли (естественно, в рамках принятых упрощающих допущений). Это означает, что оптимальная масса кия будет одинаковой для высоких и низкорослых игроков, если массы их предплечий одинаковы. Некоторые игроки производят начальный удар, вращая не только предплечье, но и плечо (*в Пирамиде такая техника игры в высокой стойке встречается намного чаще, чем в Пуле; прим. пер.*). Выше проведенный анализ показывает, что дополнительная длина плеча здесь не играет никакой роли. Учитывая этот фактор, важно лишь увеличить величину M_f на массу плеча. Полезна ли для передачи энергии битку такая техника или нет, зависит еще и от сил, прикладываемых различными группами мышц, дополнительно вовлеченных в ударное движение.

Теперь, когда мы получили последнее соотношение, а ранее нашли решение задачи 3.3, возникла дилемма. С одной стороны, для наилучшей передачи энергии битку нужен очень легкий кий, имеющий массу приблизительно 6 унций. А с другой – есть нужда и в большой массе кия – для максимизации его энергии T_0 при фиксированной общей энергии T . Следовательно, максимизация энергии, передаваемой битку, требует отыскания некоторого компромисса между указанными крайними массами кия.

Выражая T_0 из последнего соотношения и подставляя его в формулу, найденную при решении задачи 3.3, получим:

$$\frac{T_b}{T} = \frac{4M_b M_s^2}{(M_s + M_b)^2 \left(M_s + \frac{1}{3}M_f\right)} = \frac{4\alpha_s^2}{(1 + \alpha_s)^2 \left(\alpha_s + \frac{1}{3}\alpha_f\right)},$$

где $\alpha_f = M_f / M_b$ – отношение массы предплечья к массе шара. При фиксированной массе предплечья величина T_b / T определяется только значением отношения α_s (или иначе – массой кия; прим. пер.). Для отыскания оптимальной массы кия (обеспечивающей максимум отношению T_b / T ; прим. пер.) продифференцируем по α_s правую часть последнего равенства и приравняем полученное выражение к нулю. Выражая после этого α_s , получим оптимальное значение отношения массы кия к массе шара $\alpha_{s(opt)}$:

$$\alpha_{s(opt)} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{3} \alpha_f}.$$

(Оптимальная масса кия $M_{s(opt)}$ может быть найдена как произведение массы шара M_b на $\alpha_{s(opt)}$. Прим. пер.). Из последнего соотношения видно, что $\alpha_{s(opt)}$ и α_f связаны параболической зависимостью. Когда $\alpha_f = 0$ (при этом для определения массы кия влияние предплечья не учитывается; прим. пер.), получаем, что $\alpha_{s(opt)} = 1$, а оптимальная масса кия составляет 6 унций. Это вполне согласуется с выводами из задачи 3.3. Игроки с худым телосложением имеют легкое предплечье с массой, приблизительно составляющей 24 унции; влиянию такого предплечья соответствуют величины $\alpha_f = 4$, $\alpha_{s(opt)} = 2.2$. В этом случае оптимальный кий имеет массу 13.2 унции. Предплечье большинства взрослых людей имеет массу в районе 36 унций. Учет влияния такого предплечья позволяет определить оптимальную массу кия – 15.4 унции (при этом $\alpha_f = 6$, $\alpha_{s(opt)} = 2.56$; прим. пер.). У крупногабаритных людей масса предплечья может составлять 64 унции, что соответствует оптимальной массе кия 19.3 унции ($\alpha_f = 10.67$, $\alpha_{s(opt)} = 3.21$; прим. пер.). У тех игроков, которые выполняют начальный удар «целой» рукой, поворачивая ее в основном относительно плеча, а не локтя, масса руки составляет примерно 150 унций. Такая величина соответствует оптимальной массе кия 27.2 унции.

(Расчеты с использованием выше приведенных соотношений свидетельствуют, что оптимальная масса кия для Пирамиды составляет: 530÷540 граммов – для очень худых игроков и подростков; 600÷610 граммов – для людей нормального телосложения; 740÷750 граммов – для массивных или габаритных игроков. Эти значения удивительным образом соответствуют устоявшимся на сегодняшний день параметрам реальных киев. И в первую очередь поражает здесь то, что именно к таким массам киев привел многолетний опыт, накопленный на ощупь – посредством проб и ошибок. Ведь до совсем недавнего времени не были известны формулы, приведенные автором в настоящей работе. А с другой стороны, и самого автора интересовали параметры киев для Пула, а не для Пирамиды. Прим. пер.).

В последние годы некоторые бильярдисты, играющие в «Девятку» (одна из разновидностей игры в Пул; прим. пер.), заменили свои тяжелые кии для разбоя пирамиды на более легкие. Для обычных ударов эти игроки могут использовать стандартные кии массой 19 ÷ 20 унций, а для начального удара – облегченный кий массой 15 ÷ 18 унций. Такая масса кия для разбоя соответствует выше представленным соотношениям, если применять технику удара с поворотом предплечья относительно локтя, а также считать, что игрок имеет худое или нормальное телосложение. Применяемая же игроками фактическая техника разбоя пирамиды может быть сложнее рассмотренной выше техники. Например, ударное движение может сочетать в себе два разных поворота – вокруг локтя и вокруг плеча.

Задача 3.4

Как высота точки удара по битку влияет на отношение угловой и поступательной скоростей сразу же после контакта наклейки с шаром?

Ответ: Для простоты будем считать, что точка контакта находится в вертикальной плоскости, проходящей через центр шара (*а также через продольную ось кия; прим. пер.*). Импульс прикладываемой к битку силы F определяется соотношением $p = \int_0^t F(t') dt'$, где t – время контакта наклейки с шаром. Вообще говоря, на интервале $[0, t]$ сила F переменна, но при взаимодействии кия с шаром время контакта очень мало, благодаря чему F можно аппроксимировать идеальной импульсной силой. (Идеальной импульсной силой считается такая сила, которая придает постоянный импульс при точечном по времени действии. Помимо контакта кия с шаром, в качестве подобного примера можно привести силу, прикладываемую молотком при забивании гвоздя). Благодаря такому упрощению, импульс силы можно выразить простой зависимостью $p = MV$, где M – масса шара; V – приобретаемая битком поступательная скорость. Интегрируя уравнение для угловой скорости, получим: $pR \sin \theta = pb = I\omega$, где $b = R \sin \theta$ – вертикальное смещение точки удара относительно центра битка; θ – угол между радиус-вектором точки удара, проведенным из центра шара, и вектором приложенной силы. (*Чтобы получить приведенные равенства, обратимся к уравнению для угловой скорости тела с единственной осью вращения, представленному в разделе 1: $FR \sin \theta = I \dot{\omega}$. Интегрируя его по времени, получим $FtR \sin \theta = I\omega$. Вводя обозначение $b = R \sin \theta$ и учитывая, что $Ft = p$ – импульс постоянной силы, будем иметь $pb = I\omega$. Прим. пер.*). Величина b положительна при ударе выше центра шара, равна нулю, когда точка удара приходится в центр битка, и отрицательна, если удар был нанесен ниже его центра. Итак, с одной стороны $p = MV$, а с другой $pb = I\omega$. Исключая p и раскрывая момент инерции шара $I = \frac{2}{5}MR^2$, получим:

$$MV = \frac{I\omega}{b} = \frac{2MR^2\omega}{5b}, \quad J = \frac{R\omega}{V} = \frac{5}{2} \left(\frac{b}{R} \right).$$

Если $b = 0$, угловая скорость ω тоже принимает нулевое значение. Это значит, что при ударе наклейкой в центр шара биток не приобретает вращения. Если наклейка попадает в точку выше центра шара, смещение b положительно, а значит и угловая скорость $\omega = \omega_y$ положительна. Это означает, что после удара, наносимого выше центра шара, биток приобретает вращение, направленное так же, как и поступательная скорость (*иначе говоря, шар при этом вращается в сторону своего продвижения; прим. пер.*). Когда же удар приходится наклейкой ниже центра шара, величины b и ω отрицательны. При этом биток получает угловую скорость уже в противоположном направлении (*он закручивается в сторону игрока, в то время как поступательная скорость устремляет шар вперед; прим. пер.*), что имеет место при оттяжке и тормозящем накате. Заметим, что представленные выше соотношения действительны только при $-R \leq b \leq R$; если же это неравенство не выполняется, кий проходит мимо битка. На практике смещение точки удара от центра шара уменьшают по сравнению с величиной R , так как нанесение ударов в точки, находящиеся вблизи края шара, чревато киксом (см. задачу 1.7). Несмотря на то, что последнее представленное соотношение мы получили для удара, придающего битку вращение вокруг горизонтальной оси (*продольное вращение; прим. пер.*), такое же равенство будет справедливо и для удара, закручивающего шар вокруг вертикальной

оси (при этом шару будет придано боковое вращение; прим. пер.). Только в этом случае величина b будет уже представлять собой не вертикальное, а горизонтальное смещение наклейки от центра битка. Более того, представленное соотношение справедливо для ударов, придающих битку вращение вокруг произвольно наклоненной оси. (При этом биток, по сути, получит составное вращение – он будет одновременно вращаться как вокруг вертикальной оси, так и вокруг горизонтальной. Прим. пер.).

Задача 3.5

Каково должно быть вертикальное смещение b_{NR} точки касания наклейкой битка, чтобы сразу же после удара наступило естественное качение шара?

Ответ: Естественное качение наступает при выполнении условия $V = R\omega_y$. Подстановка этого равенства в последнее соотношение дает $b_{NR} = \frac{2}{5}R$. Так как высота точки удара над поверхностью стола равна $z = R + b$, то $z_{NR} = \frac{7}{5}R = \frac{7}{10}D$, где $D = 2R$ – диаметр шара. Эта точка расположена на битке довольно-таки высоко, и следует быть осторожным при попытке ударить еще выше нее – при этом высока вероятность кикса (см. задачу 1.7). Придание битку бокового вращения при горизонтальном ударе не оказывает влияния на достижение им состояния естественного качения. Поэтому, те точки на битке, удар по которым сразу же приводит к естественному качению, располагаются на горизонтальной линии, поднятой от сукна на высоту $\frac{7}{10}D$.

Упражнение 3.1

Проведите эксперимент, нанося удары по точкам битка, сразу же обеспечивающим его естественное качение. В качестве битка используйте полосатый шар. Перед выполнением ударов располагайте шар так, чтобы средняя линия полоски, закрашивающей его центр, была наклонена к вертикали под разными углами. Устанавливая биток, добейтесь того, чтобы при взгляде по линии предстоящего движения шара полоска занимала симметричное положение относительно видимого центра битка. При ударах держите кий как можно горизонтальной. Наносите удары точно по центру полоски на высоте $\frac{7}{10}D$ от поверхности стола. Если Вы все сделаете правильно, то при качении шара полоска будет выглядеть неподвижной. Маленькие ошибки в точности попадания по требуемой точке или ошибки, допущенные при установке шара, приведут к небольшим колебаниям полоски при вращении катящегося битка.

Задача 3.6

Какие точки контакта наклейки с битком обеспечивают равные отношения угловой скорости бокового вращения к поступательной скорости битка сразу же после удара? Какие точки контакта обеспечивают такое же отношение «вращение/скорость», когда начнется естественное качение шара?

Ответ: Рассмотрим координатные оси, изображенные на рисунке 3.1.

Координата z определяет высоту над поверхностью сукна, а y является расстоянием от вертикальной плоскости, проходящей через центр битка. Обозначим через b_y горизонтальное отклонение любой точки поверхности битка от вертикальной плоскости, проходящей через центр шара, а через b_z – вертикальное отклонение от горизонтальной плоскости, проходящей через центр шара. Ясно, что $b_y = y$, а $b_z = z - R$. Рассмотрим точку удара (точку контакта наклейки и битка) с координатами (y, z) . Сразу же после удара шар приобретает поступательную скорость V_0 и угловую скорость вращения ω_{0y} вокруг оси \mathbf{y} , которые можно выразить через импульс силы p следующим образом (см. задачу 3.4; прим. пер.):

$$V_0 = \frac{p}{M}, \quad \omega_{0y} = \frac{p(z - R)}{I} = \frac{5p(z - R)}{2MR^2}.$$

Продольное вращение битка определяется высотой точки удара z и не зависит от бокового смещения y . (Продольное вращение называется **верхним**, если угловая скорость вращения вокруг горизонтальной оси \mathbf{y} положительна: $\omega_y > 0$. Соответственно, при $\omega_y < 0$ вращение называют **нижним**. Из последнего соотношения видно, что начальное вращение, приобретаемое вследствие удара, будет верхним при выполнении условия $z > R$. Прим. пер.). В момент начала естественного качения поступательная скорость может быть выражена так (см. задачу 2.2):

$$V_{NR} = \frac{5}{7} V_0 + \frac{2}{7} R \omega_{0y} = \frac{5p}{7M} + \frac{5p(z - R)}{7MR} = \frac{5p}{7M} \left(\frac{z}{R} \right).$$

Будем полагать, что боковое вращение (то есть, угловая скорость вращения вокруг вертикальной оси) не изменяется от действия сил трения при скольжении шара. Обращаясь к задаче 3.4, найдем начальную угловую скорость бокового вращения (она же будет и конечной):

$$\omega_z = \left(\frac{5y}{2R^2} \right) V_0 = \frac{5yp}{2MR^2}.$$

Боковое вращение зависит только от горизонтального смещения y . (Боковое вращение называется **левым**, если при взгляде сверху шар вращается вокруг вертикальной оси по часовой стрелке. Из последнего соотношения видно, что шар приобретает левое боковое вращение, если $y > 0$. Иными словами, при этом ударе наносится в точку, находящуюся левее вертикальной оси \mathbf{z} . При $y < 0$ боковое вращение называют **правым**. Прим. пер.). Отношение угловой скорости бокового вращения к начальной поступательной скорости битка принимает вид

$$J_z = \frac{R \omega_z}{V_0} = \frac{5y}{2R}.$$

Величина этого отношения определяется только горизонтальным смещением y и не зависит от скорости шара V_0 , а также от высоты точки удара z . Следовательно, одинаковое отношение можно получить как с помощью «мягкого» удара, так и силового.

Найдем отношение бокового вращения к поступательной скорости естественного качения:

$$J_{z,NR} = \frac{R \omega_z}{V_{NR}} = \frac{7}{2} \left(\frac{y}{z} \right).$$

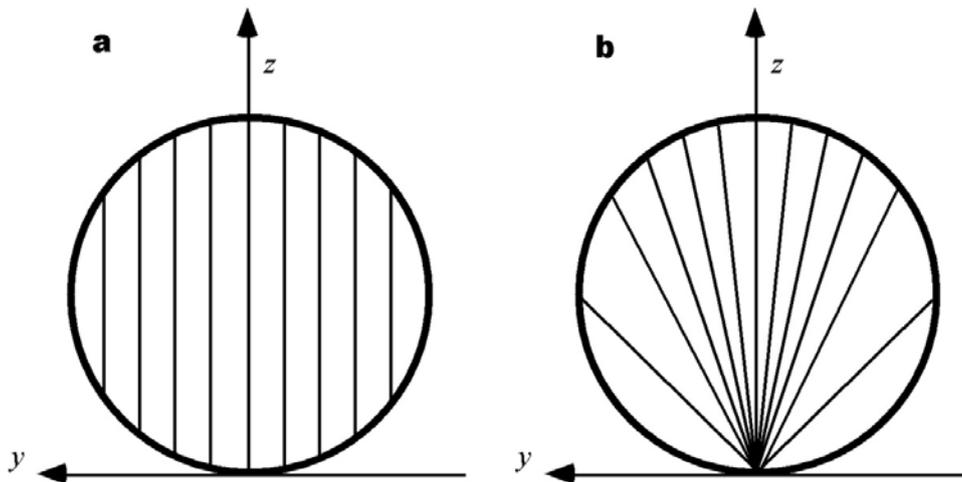


Рис 3.1. На виде битка сзади (при взгляде от игрока) тонкими линиями нанесены положения точек контакта кия с шаром, соответствующие различным отношениям угловых скоростей бокового вращения к поступательной скорости битка. Каждая из вертикальных линий, изображенных на виде а, соответствует определенному постоянному значению отношения «вращение/скорость» непосредственно после нанесения удара по битку. На виде б представлены линии с постоянным отношением «вращение/скорость» по достижении шаром состояния естественного качения; это – прямые линии, пересекающиеся в точке $(y, z) = (0,0)$. В обоих случаях большее отклонение линии от центра шара соответствует большему значению отношения «вращение/скорость».

Отсюда следует, что положение точек удара (y, z) , для которых отношение $J_{z, NR}$ постоянно, определяется линейной зависимостью между Z и y : $Z = \left(\frac{7}{2J_{z, NR}} \right) y$.

Линии, соответствующие некоторым постоянным значениям $J_{z, NR}$, изображены на виде б рисунка 3.1. Интересно, что одного и того же эффекта (*одинакового отношения «вращение/скорость»; прим. пер.*) можно достигать при помощи ударов, наносимых в разные точки битка, но расположенные на одной прямой линии. Конечно, сказанное справедливо, если шар «имеет достаточно времени» (*и, соответственно, свободного места на столе; прим. пер.*) для завершения этапа скольжения по сукну и начала естественного качения. Чем ниже расположена точка удара, тем большую начальную поступательную скорость следует придать битку, чтобы при переходе к естественному качению он имел нужную игроку скорость V_{NR} (*иными словами, чем ниже при ударе опускается кий, тем сильнее нужно выполнять сам удар; прим. пер.*). Заметим, что прямые линии, соответствующие большим значениям отношения «вращение/скорость» $J_{z, NR}$, расположены на рисунке 3.1 ближе к горизонтальной оси y .

Задача 3.7

Какая точка удара (y_0, z_0) , располагающаяся на линии постоянного отношения «боквое вращение/скорость» при естественном качении $J_{z, NR}$, находится ближе всего к центру битка?

Ответ: Рассмотрим рисунок 3.2. Все точки, располагающиеся на одинаковом заданном расстоянии от центра битка, находятся на окружности, проведенной вокруг центра. Та окружность, которая коснется наклонной линии, определяющей согласно задаче 3.6 одинаковое отношение «вращение/скорость», и укажет точку касания, расстояние от которой до центра битка минимально. Эта точка, имеющая координаты (y_0, z_0) , является вершиной прямого угла треугольника, образованного точками $(0,0)$, $(0, R)$ и (y_0, z_0) . Обозначим через α угол между вертикальной осью и линией равного отношения «вращение/скорость». Тогда тангенс этого угла равен $tg \alpha = \frac{y_0}{z_0}$. Но, с другой стороны, $tg \alpha = \frac{R - z_0}{y_0}$. Исходя из этого, легко находится связь $y_0^2 = z_0(R - z_0)$, которую можно преобразовать к виду $y_0^2 + \left(z_0 - \frac{1}{2}R\right)^2 = \left(\frac{1}{2}R\right)^2$. Последнее соотношение – ничто иное, как уравнение окружности, имеющей радиус $\frac{1}{2}R$ и центр в точке с координатами $\left(0, \frac{1}{2}R\right)$ (эта малая окружность изображена на рисунке 3.2 жирной линией; прим. пер.). Использование этой окружности для отыскания точек контакта с наклейкой называется **прицеливанием по малой окружности**. Для ударов с таким прицеливанием требуемое отношение «вращение/скорость» на стадии естественного качения достигается при минимальном отклонении точек контакта наклейки с шаром от его центра. При естественном качении можно добиться гораздо большего отношения «вращение/скорость», чем сразу же после удара. Это будет показано при решении следующей задачи.

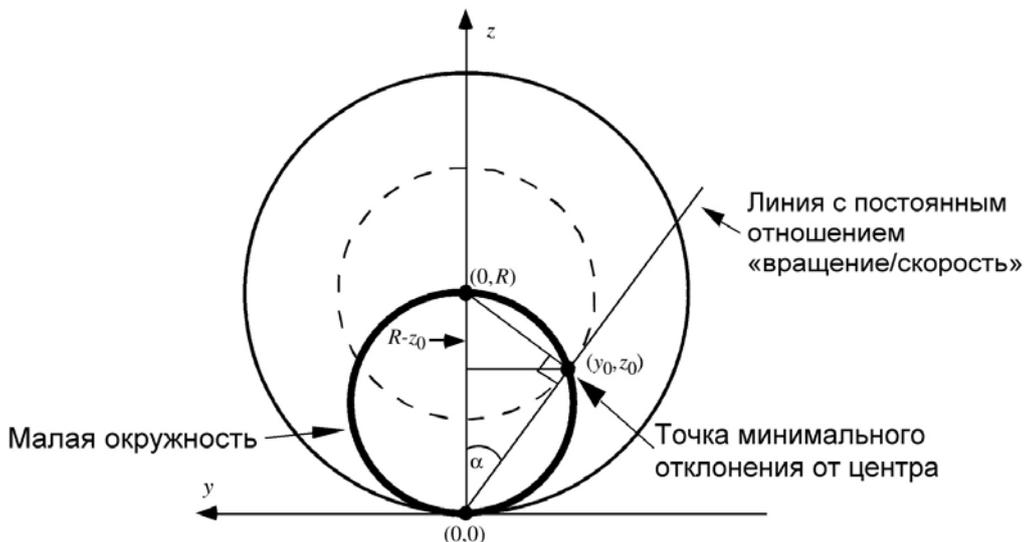


Рис 3.2. Точки удара, минимально удаленные от центра битка и при этом соответствующие различным величинам отношения «боквое вращение/скорость» при естественном качении, располагаются на малой окружности, имеющей радиус $R/2$ и касающейся нижней точки шара.

Задача 3.8

Какого отношения «вращение/скорость» $R\omega_z/V_{NR}$ достигает катящийся шар после удара наклейкой кия по точке $P_1 = (y_1, z_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}R, R\right)$? Какое отношение $R\omega_z/V_{NR}$ будет соответствовать удару по точке $P_2 = (y_2, z_2) = \left(\frac{1}{2}R, \frac{1}{2}R\right)$? По какой точке $P_3 = (y_3, z_3)$ нужно нанести удар, чтобы приобретаемое сразу после удара отношение «вращение/скорость» $R\omega_z/V_0$ было равно отношению $R\omega_z/V_{NR}$, достигаемому при естественном качении шаром после удара по точке P_2 ?

Ответ: При решении задачи 3.6 было получено равенство $\frac{R\omega_z}{V_{NR}} = \frac{7}{2} \left(\frac{y}{z}\right)$. Подставляя сюда координаты точки P_1 , получим $\left(\frac{R\omega_z}{V_{NR}}\right) = \frac{7}{2} \left(\frac{y_1}{z_1}\right) = \frac{7}{2\sqrt{2}} = 2.475$. Для точки P_2 будем иметь $\left(\frac{R\omega_z}{V_{NR}}\right) = \frac{7}{2} \left(\frac{y_2}{z_2}\right) = \frac{7}{2} = 3.5$. Хотя удаление точек P_1 и P_2 от центра шара одинаково и равно $\frac{1}{\sqrt{2}}R$, достигаемое отношение «вращение/скорость» для второй точки превышает аналогичное отношение после удара в точку P_1 на 41%. Точка P_2 располагается на «малой окружности», и, следовательно, обеспечивает максимальное отношение «вращение/скорость» для точек удара с фиксированным отклонением от центра битка.

Найдем положение точки P_3 . Так как, согласно задаче 3.6, $\frac{R\omega_z}{V_0} = \frac{5y}{2R}$, то $\frac{5y}{2R} = \frac{7}{2}$. Отсюда получим возможные местоположения третьей точки $P_3 = (y_3, z_3) = \left(\frac{7}{5}R, z\right)$. Легко заметить, что точки, удовлетворяющие условию из постановки задачи, находятся вне поверхности битка. Следовательно, не применяя тормозящие удары, позволяющие снизить значение поступательной скорости битка в момент его перехода к естественному качению, достичь такой большой величины отношения «вращение/скорость» невозможно. Посредством нанесения горизонтальных ударов по битку, на практике можно добиться величины $\frac{R\omega_z}{V_{NR}}$, равной 3.5 или чуть больше. Еще большие значения могут быть получены с помощью ударов с существенным наклоном кия к поверхности стола (типа «массе») или после соударения битка с иными шарами.

Рассматривая движение со скольжением, иногда очень удобно соотносить вращение шара и его поступательную скорость в какой-то момент времени с некоторой «эффективной точкой удара». Под такой точкой понимается место контакта наклейки кия и неподвижного шара, нанесение удара в которое приводит к заданной угловой скорости шара и скорости его поступательного перемещения. Ввиду того, что при скольжении вращение и поступательная скорость непрерывно изменяются, местоположение эффективной точки удара зависит от времени. Используя материал раздела 2 и соотношения из задачи 3.6, найдем зависимости, определяющие смещения эффективной точки удара по горизонтальной оси b_y^{eff} и по вертикальной оси b_z^{eff} :

$$\frac{5}{2} \left(\frac{b_y^{eff}}{R} \right) = \frac{R\omega_z}{V} = \frac{R\omega_{0z}}{V_0 - \mu g t},$$

$$\frac{5}{2} \left(\frac{b_z^{eff}}{R} \right) = \frac{R\omega_y}{V} = \frac{(R\omega_{0y} + \frac{5}{2}\mu g t)}{V_0 - \mu g t},$$

где μ – коэффициент трения скольжения; ω_{0z} и ω_{0y} – начальные (приобретенные в момент удара) угловые скорости вращения вокруг осей \mathbf{z} и \mathbf{y} , соответственно; V_0 – начальная поступательная скорость шара; t – время, прошедшее с момента нанесения удара. При получении этих соотношений полагалось $t_0 = 0$.

Задача 3.9

Требуется показать, что в координатах (y, z) эффективные точки удара, определяемые смещениями $b_y^{eff}(t)$ и $b_z^{eff}(t)$, лежат на прямой линии, проходящей через точки $(y, z) = (0, 0)$ и $(y, z) = (b_y^{eff}(0), R + b_z^{eff}(0))$.

Решение: Найдем параметрическую зависимость (через переменную t) величины b_z^{eff} от b_y^{eff} . Для этого воспользуемся двумя последними приведенными уравнениями. Из первого уравнения выразим t и подставим полученную связь во второе уравнение. После некоторых преобразований получим:

$$\left(\frac{R + b_z^{eff}(t)}{b_y^{eff}(t)} \right) = \left(\frac{R + b_z^{eff}(0)}{b_y^{eff}(0)} \right).$$

Правая часть этого равенства не зависит от времени. Вследствие этого, наклон линии, определяемой координатами $(y, z) = (b_y^{eff}(t), R + b_z^{eff}(t))$, постоянен и не зависит от времени, а сама линия является прямой. Расстояние $(R + b_z^{eff}(t))$ является высотой точки контакта наклейки с битком (что можно видеть, например, по рисунку 3.2), а $b_y^{eff}(t)$ – ее горизонтальным смещением от вертикали, проходящей через центр шара. Рассмотрим еще одну линию, которая проходит между точкой $(0, 0)$, соответствующей опоре шара, и точкой $(b_y^{eff}(0), R + b_z^{eff}(0))$. Она имеет точно такой же наклон, что и выше обсуждавшаяся линия эффективных точек удара. Следовательно, эти две линии являются продолжениями друг друга, а это значит, что нам удалось показать то, что требовалось постановкой задачи. Линия эффективных точек удара ограничивается в верхней части точкой $b_z^{eff}(t) = \frac{2}{5}R$, нанесение удара в которую приведет не к скольжению шара, а к естественному качению.

Результат, полученный при решении задачи 3.9, может быть использован игроком для правильного учета влияния трения скольжения на наклон оси вращения шара. Для этого, сначала следует определить желаемый наклон в некоторой точке ожидаемой траектории битка. Например, в реальной игре часто выполняется плоский удар, для которого характерно вертикальное расположение оси вращения в момент соударения битка с прицельным шаром. (Выше, когда вводилось понятие плоского удара, полагалось, что в момент соударения биток не имеет

продольного и бокового вращения. На практике же, это – частный случай. Чаще всего выполняется частично плоский удар, для которого характерно отсутствие продольного вращения при наличии бокового. Здесь и далее автор не подчеркивает, что наносится именно частично плоский удар, а не абсолютно плоский. Прим. пер.). Наклон оси вращения соответствует некоторой эффективной точке удара $(b_y^{eff}(t), R + b_z^{eff}(t))$. При плоском соударении эффективная точка удара будет иметь координаты $(b_y^{eff}(t), R)$, соответствующие исключительно боковому вращению битка. Далее, игрок должен оценить (учитывая предполагаемую силу удара и последующее действие трения о сукно) нужное вертикальное смещение (вниз от центра шара) точки контакта наклейки с битком, благодаря которому и будет реализовано плоское соударение шаров. Обозначим это вертикальное смещение через δ . Теперь игроку предстоит визуально представить прямую линию, соединяющую точку $(b_y^{eff}(t), R)$, соответствующую желаемому вращению битка при соударении шаров, и нижнюю точку битка $(0,0)$. На этой воображаемой линии и будет находиться точка предстоящего удара $(b_y^{eff}(0), R - \delta)$. Если игроку нужно выполнить не плоский, а какой-то другой удар, то его подготовительные действия аналогичны тем, которые только что обсуждались. Воображаемая прямая линия всегда проводится от конечной эффективной точки удара к опоре шара $(0,0)$. При анализе игрок «прокручивает» предстоящее движение битка в обратной последовательности – от конечного положения оси вращения до первоначального контакта наклейки с битком. Возможны случаи, когда проведенный анализ не даст удовлетворительного результата. Так, если получится, что найденная точка удара будет располагаться в зоне киксов (при ее удалении от центра шара на расстояние, большее $0.7R$; прим. пер.), то задуманный игроком удар невозможен, и ему следует поискать какие-то альтернативы.

Задача 3.10

Какова связь между скоростью кия в момент удара V_0 , скоростью битка непосредственно после удара V_b и отклонением точки контакта наклейки с битком от его центра b (в предположении, что общая кинетическая энергия при этом сохраняется)?

Ответ: Применяя законы сохранения импульса и кинетической энергии, для удара со смещением b от центра битка получим:

$$M_s V_0 = M_s V_s + M_b V_b,$$

$$\frac{1}{2} M_s V_0^2 = \frac{1}{2} M_s V_s^2 + \frac{1}{2} M_b V_b^2 + \frac{1}{2} I \omega_b^2 = \frac{1}{2} M_s V_s^2 + \left[\frac{1}{2} + \frac{5}{4} \left(\frac{b}{R} \right)^2 \right] M_b V_b^2.$$

Здесь использованы ранее введенные обозначения: M_b – масса шара; M_s – масса кия; V_s – скорость кия после удара; ω_b – угловая скорость, приобретенная шаром в результате удара; I – момент инерции шара. Выражая V_s из первого соотношения и подставляя его во второе, получим:

$$V_b = \frac{2V_0}{1 + \frac{M_b}{M_s} + \frac{5}{2} \left(\frac{b}{R} \right)^2}.$$

Легко видеть, что эта связь при $b = 0$ (в случае нанесения удара точно в центр битка; прим. пер.) трансформируется в соотношение, полученное при рассмотрении центрального удара в задаче 3.2. Теперь становится понятным – почему при

выполнении начального удара (*разбоя пирамиды; прим. пер.*) желательно не придавать битку вращения. Для заданной энергии кия (или его скорости V_0) любое начальное вращение, соответствующее ненулевому смещению b , будет уменьшать начальную скорость шара и его поступательную кинетическую энергию; максимум начальной поступательной скорости шара достигается при ударе в центр битка ($b = 0$). Зависимости отношения V_b / V_0 от смещения точки удара, рассчитанные для некоторых величин отношения массы шара к массе кия, представлены на рисунке 3.3. (Этим рисунком можно воспользоваться и при анализе отечественной бильярдной игры. При этом нужно будет учесть, что отношение $\frac{M_b}{M_s}$ для Пирамиды обычно составляет $0.37 \div 0.5$. Прим. пер.).

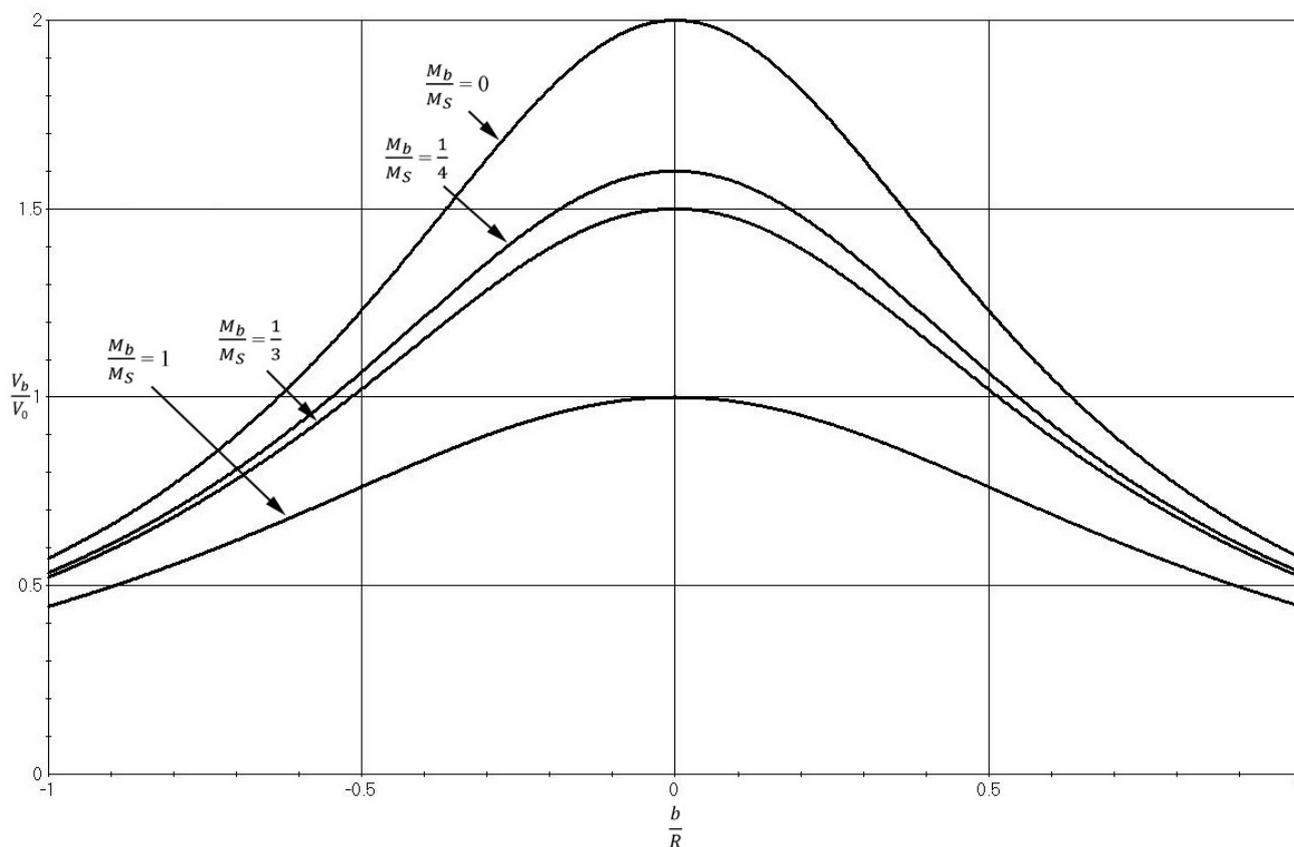


Рис 3.3. Зависимости отношения поступательной скорости V_b , приобретенной битком, к скорости кия до удара V_0 от удаления b точки удара по отношению к центру битка, построенные для различных отношений масс шара и кия $\frac{M_b}{M_s}$.

Задача 3.11

Требуется найти вертикальное смещение наклейки относительно центра битка, обеспечивающее максимум отношения поступательной скорости шара при наступлении естественного качения V_{NR} к скорости кия V_0 непосредственно перед ударом.

Решение: Пользуясь решениями задач 2.2, 3.6 и 3.10, найдем поступательную скорость битка в момент его перехода к естественному качению:

$$V_{NR} = \frac{5}{7} V_b + \frac{2}{7} R \omega_b = \frac{10}{7} \left[\frac{1 + \frac{b}{R}}{1 + \frac{M_b}{M_s} + \frac{5}{2} \left(\frac{b}{R}\right)^2} \right] V_0.$$

Выразим отсюда отношение V_{NR} к V_0 , продифференцируем его по b и приравняем полученную производную к нулю. После некоторых преобразований, найдем величину $\left(\frac{b}{R}\right)_{\max V_{NR}}$, при которой достигается максимум отношения V_{NR} к V_0 :

$$\left(\frac{b}{R}\right)_{\max V_{NR}} = -1 + \sqrt{\frac{7}{5} + \frac{2}{5} \left(\frac{M_b}{M_s}\right)}.$$

Для шара массой 6 унций и кия массой 18 унций получим $\left(\frac{b}{R}\right)_{\max V_{NR}} = 0.238$. Для более массивного кия ($M_s = 24$ унций) будем иметь $\left(\frac{b}{R}\right)_{\max V_{NR}} = 0.225$. Приведенные здесь конкретные величины $\left(\frac{b}{R}\right)_{\max V_{NR}}$ характерны для большинства используемых в Пуле киев, масса которых заключена в пределах от 18 до 24 унций. Следует обратить внимание на то, что оптимальное значение $\left(\frac{b}{R}\right)$ слабо зависит от массы кия. В обоих случаях точка удара находится между видимым центром шара $b = 0$ и точкой, удар в которую сразу же приводит к естественному качению битка $b = \frac{2}{5}R$. Начальная поступательная скорость битка максимальна при $b = 0$, но $2/7$ этой скорости теряется за счет трения скольжения, действующего до перехода к естественному качению (см., например, задачу 2.2; прим. пер.). При $b = \frac{2}{5}R$ таких потерь нет, но сама начальная скорость битка довольно мала – в силу действия законов сохранения кинетической энергии и импульса при контакте кия с шаром (см. задачу 3.10; прим. пер.). Найденная точка обеспечивает оптимальный компромисс между крайними случаями ($b = 0$ и $b = \frac{2}{5}R$). Максимизация скорости V_{NR} эквивалентна максимизации кинетической энергии естественного качения, что, в свою очередь, обеспечивает наибольшую дальность продвижения шара до его полной остановки за счет действия трения качения. Ввиду того, что эта дальность максимизируется, небольшие изменения положения реальной точки удара по сравнению с оптимальной точкой $\left(\frac{b}{R}\right)_{\max V_{NR}}$ приводят к незначительным изменениям в достижимой дальности. На рисунке 3.4 представлены зависимости отношения V_{NR} / V_0 от смещения точки удара $\frac{b}{R}$ для некоторых значений $\frac{M_b}{M_s}$.

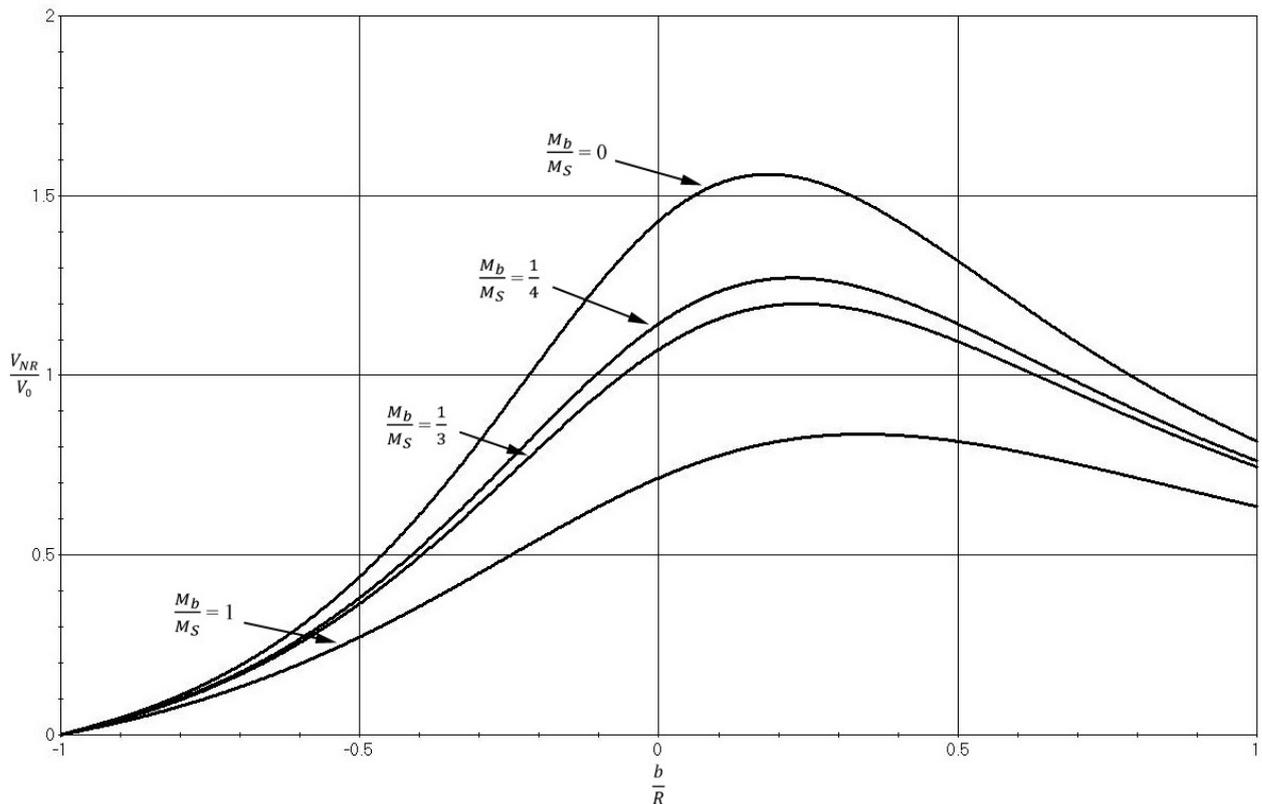


Рис 3.4. Зависимости отношения поступательной скорости V_{NR} битка в момент начала естественного качения к скорости кия до удара V_0 от удаления b точки удара по отношению к центру битка, построенные для различных отношений масс шара и кия $\frac{M_b}{M_S}$.

4. Соударения шаров

Рассмотрим движение двух соударяющихся шаров. Будем полагать, что до контакта один из них (прицельный шар) покоится, а другой (биток) – передвигается. При соударении на резке, между шарами в тангенциальном направлении действуют силы трения. Они незначительны по величине и сравнимы с силами трения, возникающими между наклейкой кия и битком при нанесении удара. Все прочие силы действуют по линии, проходящей через центры контактирующих шаров. Выше она была названа центральной линией соударения.

Сначала рассмотрим малый интервал времени движения шаров непосредственно перед соударением и сразу же после него. При этом силы трения скольжения и качения, действующие между шаром и сукном, не могут как-то значительно повлиять на траекторию движения, ведь длительность рассматриваемого отрезка времени очень мала. Импульс силы ($\mathbf{P} = M\mathbf{V}$) сохраняется по обоим направлениям координатных осей \mathbf{x} и \mathbf{y} плоского движения. Представляемая в векторном виде конечная сумма импульса силы двух шаров равна импульсу силы битка до соударения. Исключая из рассмотрения массу шаров, выразим в векторном виде соотношение между начальными и конечными скоростями: $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_b + \mathbf{V}_c$. Здесь \mathbf{V}_0 – скорость битка до соударения; \mathbf{V}_b и \mathbf{V}_c – скорости прицельного шара и битка после соударения, соответственно. Наглядное

представление этого соотношения можно увидеть на рисунке 4.1. Конечная скорость битка V_c изображена дважды: в первом случае вектор V_c исходит оттуда же, откуда направлен и вектор V_b – так показано то, что шары расходятся после точечного контакта; во втором же случае вектор V_c направлен из конечного положения вектора V_b – для того, чтобы наглядно показать выполнение векторного равенства $V_0 = V_b + V_c$. На рисунке также показаны дополнительные углы C и D , удовлетворяющие условию $C + D = \pi$. Отсюда следует, что $\cos C = -\cos D$.

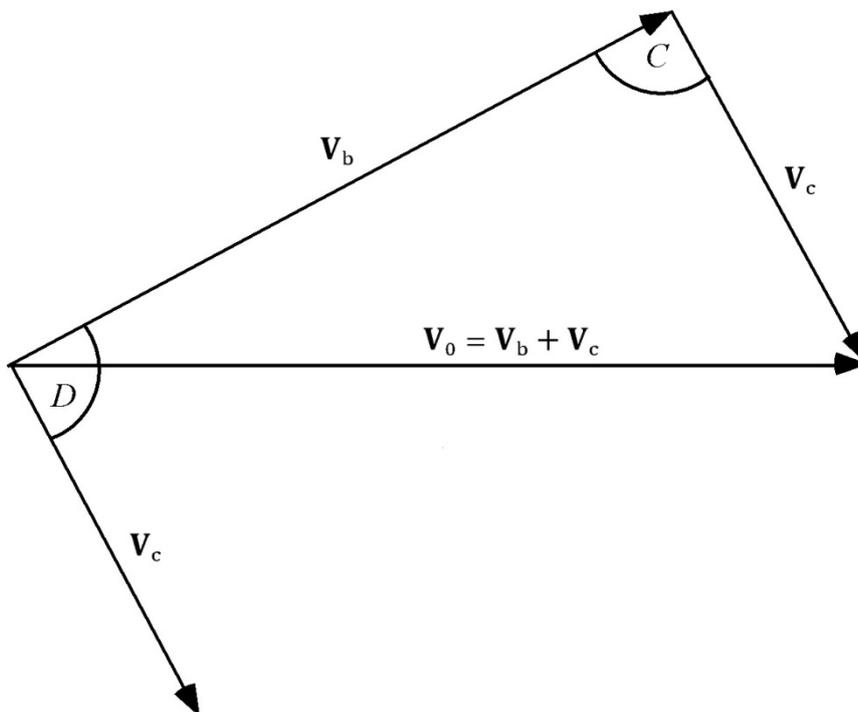


Рис 4.1. Наглядное представление закона сохранения импульса силы, показанное с помощью векторного равенства $V_0 = V_b + V_c$. Дополнительные углы C и D удовлетворяют условию $C + D = \pi$.

С хорошей точностью можно полагать, что при контакте шаров, помимо импульса силы, сохраняется и кинетическая энергия. Однако, небольшие потери все же есть – они связаны с преобразованием части кинетической энергии в тепловую и звуковую энергию. В теории **упругим соударением** считается контакт, предполагающий полное сохранение энергии. Мы же не будем пользоваться такой идеализированной моделью и обозначим через $E_{inelastic}$ потери энергии за счет того, что соударение шаров не является абсолютно упругим. В предыдущих разделах указывалось, что общая кинетическая энергия, связанная с каждым шаром, состоит из поступательной и вращательной энергии. Приравнивая энергию до и после соударения, получим следующее выражение:

$$T_{0(trans)} + T_{0(rot)} = T_{c(trans)} + T_{c(rot)} + T_{b(trans)} + T_{b(rot)} + E_{inelastic},$$

где $T_{0(trans)}$ – поступательная энергия битка до соударения; $T_{0(rot)}$ – вращательная энергия битка до соударения; $T_{c(trans)}$ – поступательная энергия битка после соударения; $T_{c(rot)}$ – вращательная энергия битка после соударения; $T_{b(trans)}$ – поступательная энергия прицельного шара после соударения; $T_{b(rot)}$ – вращательная энергия прицельного шара после соударения. Умножая обе части

этого соотношения на $\frac{2}{M}$, и группируя все члены, связанные с вращательным движением, преобразуем его к виду:

$$|\mathbf{V}_0|^2 = |\mathbf{V}_b|^2 + |\mathbf{V}_c|^2 + \Delta_{elastic} + \Delta_{inelastic} = |\mathbf{V}_b|^2 + |\mathbf{V}_c|^2 + \Delta_{total},$$

где $\Delta_{total} = \Delta_{elastic} + \Delta_{inelastic}$; $\Delta_{elastic} = \frac{2}{M} (T_{c(rot)} + T_{b(rot)} - T_{0(rot)})$; $\Delta_{inelastic} = \frac{2}{M} E_{inelastic}$. Величина $\Delta_{elastic}$ зависит от изменения общей вращательной энергии и может принимать как положительные, так и отрицательные, а также нулевые значения. Напротив, величина $\Delta_{inelastic}$ всегда положительна, так как отражает потери энергии при соударении. Вклад в величину $E_{inelastic}$ состоит из двух составляющих. Первая из них связана с действием сил трения при скольжении поверхностей шаров друг относительно друга. Эти силы влияют на обмен энергией между различными поступательными и вращательными компонентами. Точно так же, как и в случае скольжения простого блока, силы трения тесно связаны с потерями энергии за счет неабсолютной упругости соударения шаров; без этих потерь вообще бы трения скольжения не было. Ниже будет показано, что обсуждаемые здесь потери могут быть определены путем исследования передачи импульса силы между шарами. Вторая составляющая величины $E_{inelastic}$ связана с неполным обменом энергией между контактирующими шарами. Например, звук, возникающий при соударении, свидетельствует о передаче части кинетической энергии процесса соударения в окружающую среду. В настоящей работе не проводится количественного анализа второй составляющей величины $E_{inelastic}$. На основании указанных упрощений, ниже будем полагать, что вклад величин $\Delta_{elastic}$ и $\Delta_{inelastic}$ в Δ_{total} связан исключительно с действием сил трения скольжения.

Теорема косинусов для произвольного плоского треугольника со сторонами a , b и c , а также противолежащими этим сторонам углами A , B и C , определяет следующую связь:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

В частности, она свидетельствует о том, что величина каждого из углов треугольника связана с длинами всех его трех сторон. Применим это свойство к треугольнику, изображенному на рисунке 4.1. Сравнивая последнее соотношение с ранее приведенным уравнением $|\mathbf{V}_0|^2 = |\mathbf{V}_b|^2 + |\mathbf{V}_c|^2 + \Delta_{total}$, получим связь между углами C , D и величиной Δ_{total} :

$$\cos C = \frac{-\Delta_{total}}{2 |\mathbf{V}_b| |\mathbf{V}_c|} = -\cos D.$$

Если при соударении шаров нет потерь поступательной кинетической энергии, величина Δ_{total} равна нулю; следовательно, при этом $\cos C = 0$ и угол C является прямым ($C = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$). В данном случае теорема косинусов трансформируется в известную теорему Пифагора. Если $C = \frac{\pi}{2}$, то и $D = \frac{\pi}{2}$, а это значит, что шары в таком случае расходятся под прямым углом. Сначала рассмотрим случай, при котором шары имеют вращение только вокруг вертикальной оси (*т.е. имеет место случай исключительно бокового вращения; прим. пер.*), а более общую ситуацию проанализируем позже. Если во время контакта шаров общая вращательная энергия не изменяется, то $\Delta_{elastic} = 0$. Это возможно при выполнении одного из трех условий. Первое условие: между шарами отсутствует трение, в силу чего в точке соударения не действуют тангенциальные силы. Такую точку зрения можно принимать при анализе целого ряда бильярдных ударов, во всяком случае – в качестве неплохого

начального приближения. Второе условие: при соударении биток имеет именно такое боковое вращение (*имеется ввиду нужное направление вращения и «правильная» величина его угловой скорости; прим. пер.*), при котором поверхности шаров не перемещаются друг относительно друга в течение довольно непродолжительного времени контакта. В этом случае при соударении вращение битка никак не изменяется, а прицельный шар не приобретает вращения. И наконец, третье условие: при соударении биток имеет именно такое боковое вращение, которое полностью передается прицельному шару. В этом случае после контакта биток отделяется, не имея вращения. Первое условие соответствует идеализированным соударениям без трения, для которых в любых случаях (*для любых резок, вращений и т.п.; прим. пер.*) выполняется равенство $\Delta_{total} = 0$. Второе условие не зависит от трения между шарами, а определяется величиной угла резки и интенсивностью вращения битка. При этом боковое вращение обязательно должно быть прямым. (*Автор называет такое вращение внешним. Его направление совпадает с направлением резки: при попадании битка, например, в правую часть прицельного шара вращение должно быть правым. Прим. пер.*). Так же как и при выполнении первого условия, здесь имеет место равенство $\Delta_{total} = 0$. Это – следствие того, что при соударении не возникает трения. Третье условие может быть выполнено при определенном сочетании угла резки, сил трения и угловой скорости вращения, которое в этом случае обязано быть не прямым, а обратным. (*Автор называет такое вращение внутренним. Его направление противоположно направлению резки. Прим. пер.*). Поскольку в данном случае действуют силы трения, придающие шарам ускорения, то величина $\Delta_{inelastic}$ не равна нулю; следовательно, при этом $\Delta_{total} \neq 0$, а угол под которым расходятся шары, отличается от $\frac{\pi}{2}$.

Для того чтобы понять практическую важность передачи вращения между шарами, рассмотрим соударение на резке, непосредственно перед которым биток не имеет вращения (*иными словами, здесь рассматривается абсолютно плоское соударение; прим. пер.*). Так как непосредственно перед контактом биток не вращается, его начальная энергия $T_{0(rot)}$ равна нулю. Однако, после соударения величины $T_{c(rot)}$ и $T_{b(rot)}$ уже отличаются от нуля. При соударении между шарами действуют силы трения, которые придают битку и прицельному шару боковые вращения. В данном случае выполняются неравенства $\Delta_{elastic} > 0$ и $\Delta_{inelastic} > 0$, угол C превысит $\frac{\pi}{2}$, а угол D , под которым расходятся шары, будет меньше 90° . Практика показывает, что отклонение угла D от 90° довольно-таки незначительно и лежит в пределах от двух до четырех градусов. Реальная величина отклонения зависит от того, насколько «липкими» являются поверхности контактирующих шаров (*речь идет о величине коэффициента трения между шарами; прим. пер.*). За счет отклонения в четыре градуса прицельный шар, пройдя по столу расстояние в 8 футов, сместится от центральной линии соударения на 6.7" (что составляет примерно половину промежутка между «бриллиантами» на девятифутовом столе для Пула). Смещение прицельного шара от центральной линии соударения называют **эффектом отброса прицельного шара**. Для практических целей важно иметь четкое представление о величине отброса, возникающего при выполнении типичных ударов.

Задача 4.1

При каких условиях величина $\Delta_{elastic}$ положительна, равна нулю и отрицательна (в предположении, что все вращения происходят только вокруг вертикальной оси)?

Ответ: Переходя в соотношении $\Delta_{elastic} = \frac{2}{M} (T_{c(rot)} + T_{b(rot)} - T_{o(rot)})$ от вращательных энергий к угловым скоростям, получим: $\Delta_{elastic} = \frac{2}{5} R^2 (\omega_c^2 + \omega_b^2 - \omega_0^2)$, где угловые скорости шаров ω_0 , ω_c и ω_b характеризуют их боковое вращение. Ввиду того, что силы трения, действующие на шары, равны по величине и направлены противоположно друг другу, изменение вращения битка приводит к равному ему изменению вращения прицельного шара (иными словами, уменьшение скорости вращения битка приводит к аналогичному увеличению скорости вращения прицельного шара; прим. пер.). А это значит, что выполняется условие $\omega_0 = \omega_c - \omega_b$. Подстановка этого равенства в предыдущее соотношение позволяет получить следующую зависимость:

$$\Delta_{elastic} = \frac{4}{5} R^2 \omega_b \omega_c.$$

Когда конечные угловые скорости обоих шаров направлены в одну сторону (при этом оба шара вращаются либо по часовой стрелке либо против нее, если смотреть на стол сверху), величина $\Delta_{elastic}$ положительна, $\cos D > 0$, а угол, под которым расходятся шары, меньше $\frac{\pi}{2}$. Если любая из конечных угловых скоростей равна нулю, величина $\Delta_{elastic}$ тоже становится нулевой. При этом шары расходятся под углом $\leq \frac{\pi}{2}$, величина которого полностью определяется всегда положительным значением $\Delta_{inelastic}$. Когда конечные угловые скорости обоих шаров направлены в разные стороны (при этом один из шаров вращается по часовой стрелке, а другой – против нее), величина $\Delta_{elastic}$ отрицательна. В этом случае угол расхождения шаров зависит от величин двух компонент – $\Delta_{elastic}$ и $\Delta_{inelastic}$. Заметим, что величина $\cos D$ при этом зависит от конечных значений отношений «вращение/скорость» обоих шаров. Поэтому, в рамках принятых допущений можно считать, что влияние величины $\Delta_{elastic}$ на угол, под которым расходятся шары, не зависит от силы нанесенного по битку удара кием.

Проведенный выше анализ не требовал детального учета сил, проявляющих себя при соударении шаров. Теперь же перейдем к подробному изучению траекторий шаров после контакта, что потребует внимательного рассмотрения действующих сил. С этой целью полезно ввести в рассмотрение две системы координат, изображенные на рисунке 4.2. Первая из них, обозначаемая (x', y', z') , связана с начальной скоростью битка, то есть его поступательной скоростью непосредственно перед соударением. Вторая система координат (X, Y, Z) служит для анализа траекторий шаров после их контакта (она связана с центральной линией соударения; прим. пер.). Единичные векторы, направленные по осям указанных систем координат, связаны между собой соотношением:

$$\begin{bmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \\ \hat{k}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix},$$

где α – угол резки. (Понятие резки было уже неоднократно использовано в представленном выше материале. Теперь его можно конкретизировать: соударением на резке считается такой контакт шаров, при котором угол резки

не равен нулю. Под углом резки понимают угол между вектором начальной поступательной скорости битка V_0 и центральной линией соударения. Прим. пер.). Начало системы координат (X, Y, Z) размещено в центре битка в момент его контакта с прицельным шаром. Благодаря такому выбору, точка соударения лежит на оси X (эта ось проходит по центральной линии соударения; прим. пер.). Если бы трение отсутствовало, то поступательная скорость прицельного шара после соударения была бы направлена по оси X , а скорость битка – по оси Y . Силы трения направлены тангенциально в точке контакта и поэтому располагаются в плоскости YZ . Направление действия сил трения определяется направлением скорости точки контакта, расположенной на битке, в момент соударения.

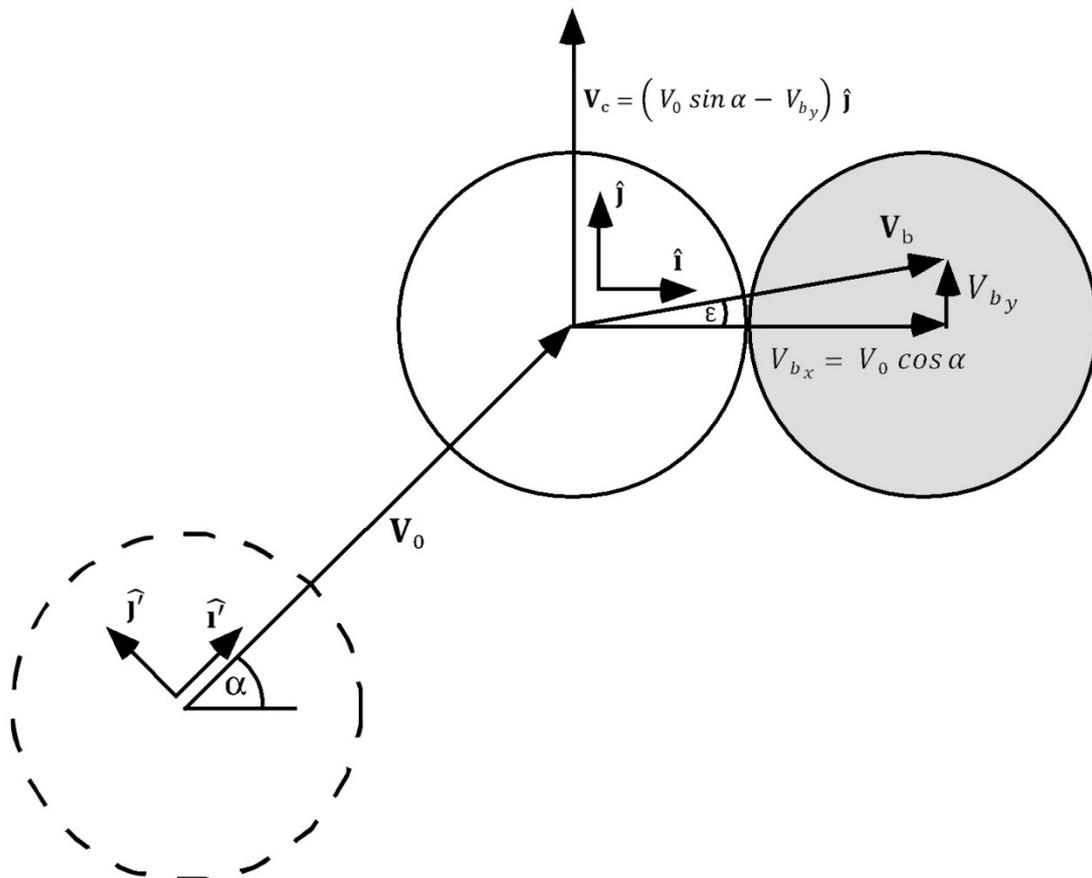


Рис 4.2. Иллюстрация эффекта влияния сил трения на поступательные скорости битка и прицельного шара после соударения. Для анализа эффекта отброса прицельного шара используются две системы координат. Первая из них связана с направлением скорости битка до соударения V_0 , а вторая – с центральной линией соударения. Вертикальная ось не показана; она направлена перпендикулярно плоскости этого рисунка в сторону читателя. α – угол резки.

Скорость точки контакта, расположенной на битке, складывается из поступательной скорости самого битка

$$V_0 = V_0 \hat{\mathbf{i}}' = V_0 (\cos \alpha \hat{\mathbf{i}} + \sin \alpha \hat{\mathbf{j}})$$

и скорости перемещения точки контакта за счет вращения

$$\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}_{cp} = \boldsymbol{\omega}_0 \times R \hat{\mathbf{i}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \omega_{0x} & \omega_{0y} & \omega_{0z} \\ R & 0 & 0 \end{vmatrix} = R (\omega_{0z} \hat{\mathbf{j}} - \omega_{0y} \hat{\mathbf{k}}),$$

где $\boldsymbol{\omega}_0$ – вектор угловой скорости битка перед соударением, имеющий компоненты ω_{0x} , ω_{0y} , ω_{0z} в системе координат (x, y, z) ; \mathbf{r}_{cp} – радиус-вектор точки контакта. Если удар по битку нанесен горизонтально расположенным кием (т.е. без «массе»), то угловая скорость битка может быть представлена в виде

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_{0y'} \hat{\mathbf{j}} + \omega_{0z'} \hat{\mathbf{k}} = -\omega_{0y'} \sin \alpha \hat{\mathbf{i}} + \omega_{0y'} \cos \alpha \hat{\mathbf{j}} + \omega_{0z'} \hat{\mathbf{k}},$$

где $\omega_{0y'}$, $\omega_{0z'}$ – компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}_0$ в системе координат (x', y', z') ; $\omega_{0z} = \omega_{0z'}$. Когда $\omega_{0y'} < 0$, биток при соударении имеет нижнее вращение; значение $\omega_{0y'} = 0$ соответствует плоскому удару; при $\omega_{0y'} > 0$ биток обладает верхним вращением. Таким образом, скорость точки контакта, находящейся на битке, равна:

$$\mathbf{V}_{cp} = V_0 \cos \alpha \hat{\mathbf{i}} + (V_0 \sin \alpha + R \omega_{0z}) \hat{\mathbf{j}} - R \omega_{0y'} \cos \alpha \hat{\mathbf{k}} = V_{cp_x} \hat{\mathbf{i}} + V_{cp_y} \hat{\mathbf{j}} + V_{cp_z} \hat{\mathbf{k}}.$$

Здесь V_{cp_x} , V_{cp_y} , V_{cp_z} – проекции вектора скорости точки контакта \mathbf{V}_{cp} на оси системы координат (x, y, z) . Знак компоненты V_{cp_y} определяет направление отброса прицельного шара. При $V_{cp_y} > 0$ прицельный шар отбрасывается в положительном направлении оси y , при $V_{cp_y} < 0$ – в отрицательном направлении, а при $V_{cp_y} = 0$ отброса нет. Интересно отметить, что при заданном угле резки α величина V_{cp_y} зависит только от угловой скорости бокового вращения битка ω_{0z} . Продольное вращение битка (верхнее и нижнее) не изменяет направления отброса прицельного шара, оказывая влияние лишь на его величину.

Компонента V_{cp_x} скорости точки контакта направлена точно через центр масс прицельного шара. (Ну а как же может быть иначе, если ось x проходит по центральной линии соударения? Прим. пер.). Когда происходит соударение, биток передает прицельному шару импульс силы (количество движения; прим. пер.) $p_{bx} = M V_{cp_x}$. Это происходит в течение весьма малого времени контакта шаров t согласно уравнению $p_{bx} = \int_0^t F_x(t') dt'$. Если проекция скорости точки контакта на тангенциальное направление не равна нулю, то в течение времени t действует сила трения, равная по величине $F_{\perp}(t) = \mu_{bb} F_x(t)$, где μ_{bb} – коэффициент трения между шарами. Направление ее действия определяется направлением тангенциальной компоненты скорости точки контакта. Единичный вектор $\hat{\mathbf{e}}_{\perp}$, связанный с этим тангенциальным направлением, можно определить следующим образом:

$$\hat{\mathbf{e}}_{\perp} = \frac{\mathbf{v}_{cp_{\perp}}}{|\mathbf{v}_{cp_{\perp}}|} = \frac{V_{cp_y} \hat{\mathbf{j}} + V_{cp_z} \hat{\mathbf{k}}}{|V_{cp_y} \hat{\mathbf{j}} + V_{cp_z} \hat{\mathbf{k}}|} = \frac{(V_0 \sin \alpha + R \omega_{0z}) \hat{\mathbf{j}} - R \omega_{0y'} \cos \alpha \hat{\mathbf{k}}}{\left((V_0 \sin \alpha + R \omega_{0z})^2 + (R \omega_{0y'} \cos \alpha)^2 \right)^{1/2}} = \cos \gamma \hat{\mathbf{j}} + \sin \gamma \hat{\mathbf{k}}.$$

Его компоненты – горизонтальная $\cos \gamma$ и вертикальная $\sin \gamma$ – весьма наглядны для дальнейшего анализа. Вертикальная компонента силы трения проявляет себя либо в направлении действия силы тяжести шара либо противоположно ей; она не оказывает влияния на направления конечных (после соударения; прим. пер.) скоростей битка и прицельного шара в плоскости стола. Горизонтальная же

компонента силы трения влияет на направление перемещения прицельного шара. Именно она и приводит к его отбросу.

Рисунок 4.3 позволяет получить наглядное представление о том, как может быть направлен единичный вектор $\hat{\mathbf{e}}_{\perp}$. Помимо этого, из рисунка становится вполне ясным геометрический смысл компонент $\cos \gamma$ и $\sin \gamma$. Величину $\cos \gamma$ можно интерпретировать, как **геометрический коэффициент эффективности** преобразования сил трения в скорости отброса прицельного шара.

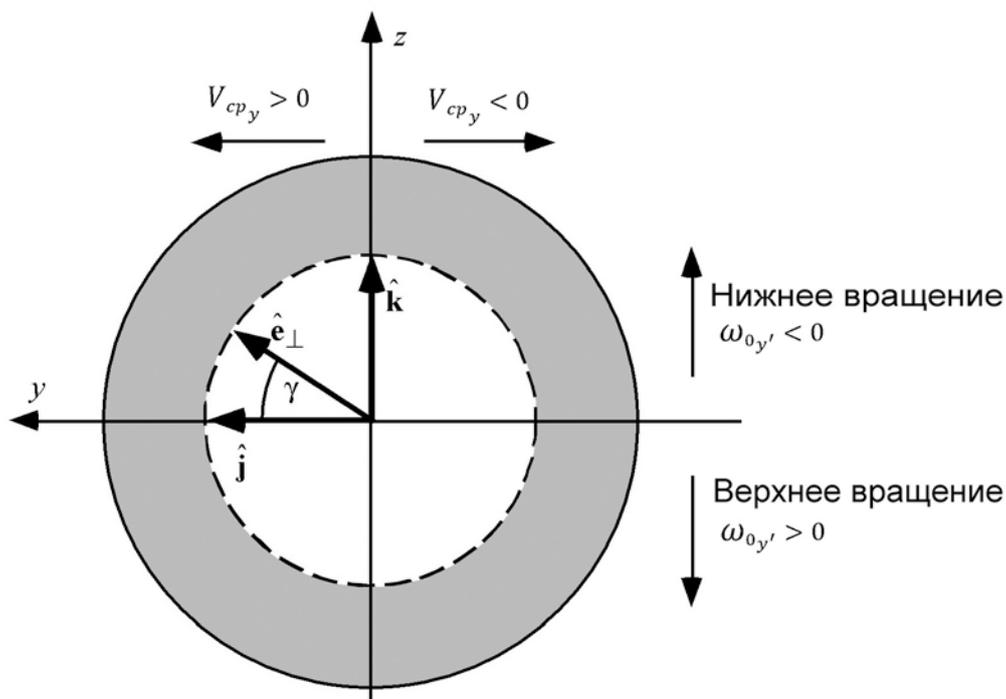


Рис 4.3. Наглядное представление возможных направлений единичного вектора $\hat{\mathbf{e}}_{\perp}$, определяющего направление силы трения, действующей на прицельный шар. Угол γ позволяет определить горизонтальную и вертикальную компоненты вектора $\hat{\mathbf{e}}_{\perp}$. Сила трения, приложенная к прицельному шару в точке контакта, противоположна по направлению силе трения, действующей на биток. Эти силы направлены по касательной к поверхностям шаров и располагаются в плоскости yz . Направление единичного вектора $\hat{\mathbf{e}}_{\perp}$ зависит от угла резки и положения оси вращения битка в момент соударения. Отброс прицельного шара пропорционален горизонтальной компоненте силы трения.

Отброс прицельного шара определяется проекцией силы трения на ось y . При помощи ранее представленных соотношений $F_{\perp}(t) = \mu_{bb} F_x(t)$ и $\hat{\mathbf{e}}_{\perp} = \cos \gamma \hat{\mathbf{j}} + \sin \gamma \hat{\mathbf{k}}$, выразим p_{by} – импульс силы трения, передаваемый прицельному шару в направлении оси y , и V_{by} – проекцию приобретенной прицельным шаром поступательной скорости на эту же ось y :

$$p_{by} = \int_0^t F_{\perp y}(t') dt' = \cos \gamma \mu_{bb} \int_0^t F_x(t') dt' = \cos \gamma \mu_{bb} p_{bx},$$

$$V_{by} = \cos \gamma \mu_{bb} V_{bx}.$$

Горизонтальная компонента силы трения, отбрасывающая прицельный шар, вносит свой вклад V_{by} в вектор скорости прицельного шара; в то же время, действующая в обратном направлении сила трения, изменяет скорость битка. Ввиду того, что

величина $\cos \gamma$ зависит от нескольких параметров, следует рассмотреть несколько частных случаев.

Задача 4.2

Как угол отброса прицельного шара ε (см. рисунок 4.2; прим. пер.), определяемый тригонометрическим равенством $\operatorname{tg} \varepsilon = V_{by} / V_{bx}$, зависит от силы нанесенного удара?

Ответ: Представим выражение для $\cos \gamma$ в виде

$$\cos \gamma = \frac{\left(\sin \alpha + \frac{R\omega_{0z}}{V_0} \right)}{\left[\left(\sin \alpha + \frac{R\omega_{0z}}{V_0} \right)^2 + \left(\frac{R\omega_{0y'}}{V_0} \cos \alpha \right)^2 \right]^{1/2}}.$$

Нетрудно заметить, что геометрический коэффициент $\cos \gamma$ зависит не непосредственно от поступательной скорости бита, косвенно характеризующей силу удара, а от отношения «вращение/скорость» (u , естественно, от угла резки; прим. пер.). Выразим угол отброса прицельного шара: $\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{V_{by}}{V_{bx}} = \operatorname{arctg} (\mu_{bb} \cos \gamma)$. Отсюда видно, что он не зависит от силы нанесенного удара. Практика бильярдной игры показывает, что последний вывод не вполне верен – на самом деле, с повышением силы удара отброс прицельного шара несколько уменьшается. Это происходит потому, что коэффициент трения, который мы считаем постоянным, крайне незначительно, но все же зависит от скорости бита. На рисунке 4.4 представлена зависимость параметра отброса $\cos \gamma$ от отношения «вращение/скорость» $\frac{R\omega_{0z}}{V_0}$ при очень часто используемой в игре **резке в половину шара** (когда угол резки равен 30°).

Задача 4.3

Как при плоском ударе, для которого выполняется условие $\omega_{0y'} = 0$, скорость отброса зависит от угла резки?

Ответ: При плоском ударе выражение для $\cos \gamma$ трансформируется к виду

$$\cos \gamma = \frac{V_{cpy}}{|V_{cpy}|} = \frac{(V_0 \sin \alpha + R\omega_{0z})}{|V_0 \sin \alpha + R\omega_{0z}|} = \pm 1.$$

Знак коэффициента $\cos \gamma$ определяется начальной скоростью бита V_0 , угловой скоростью его бокового вращения ω_{0z} и углом резки α . С учетом последнего соотношения, представим скорость отброса прицельного шара в виде $V_{by} = \pm \mu_{bb} V_{bx}$. Если биток не имеет бокового вращения, то для резки, изображенной на рисунке 4.2, $\cos \gamma = 1$ и $V_{by} = \mu_{bb} V_{bx}$. (Имеется ввиду то, что при этом резка является левой. В таком случае биток контактирует с той частью прицельного шара, которая видна игроку левее его центра. Угол резки при этом положителен, а значит и $\sin \alpha > 0$. Прим. пер.). При определении коэффициента μ_{bb} в задаче 1.6 такой результат предполагался. Здесь же, с помощью тщательного анализа, мы подтвердили правомерность сделанных ранее предположений (при условии, что

взаимодействие касающихся друг друга прицельных шаров не отличается от взаимодействия битка и прицельного шара при плоском ударе). Зависимость скорости отброса от угла резки проявляется только через *направление* действия силы трения. Один из графиков, изображенных на рисунке 4.4, соответствует плоскому удару. Для него характерно наличие такой точки $\frac{R\omega_{0z}}{V_0}$, при переходе через которую $\cos \gamma$ резко меняет свое значение за счет перемены знака величины V_{cpy} .

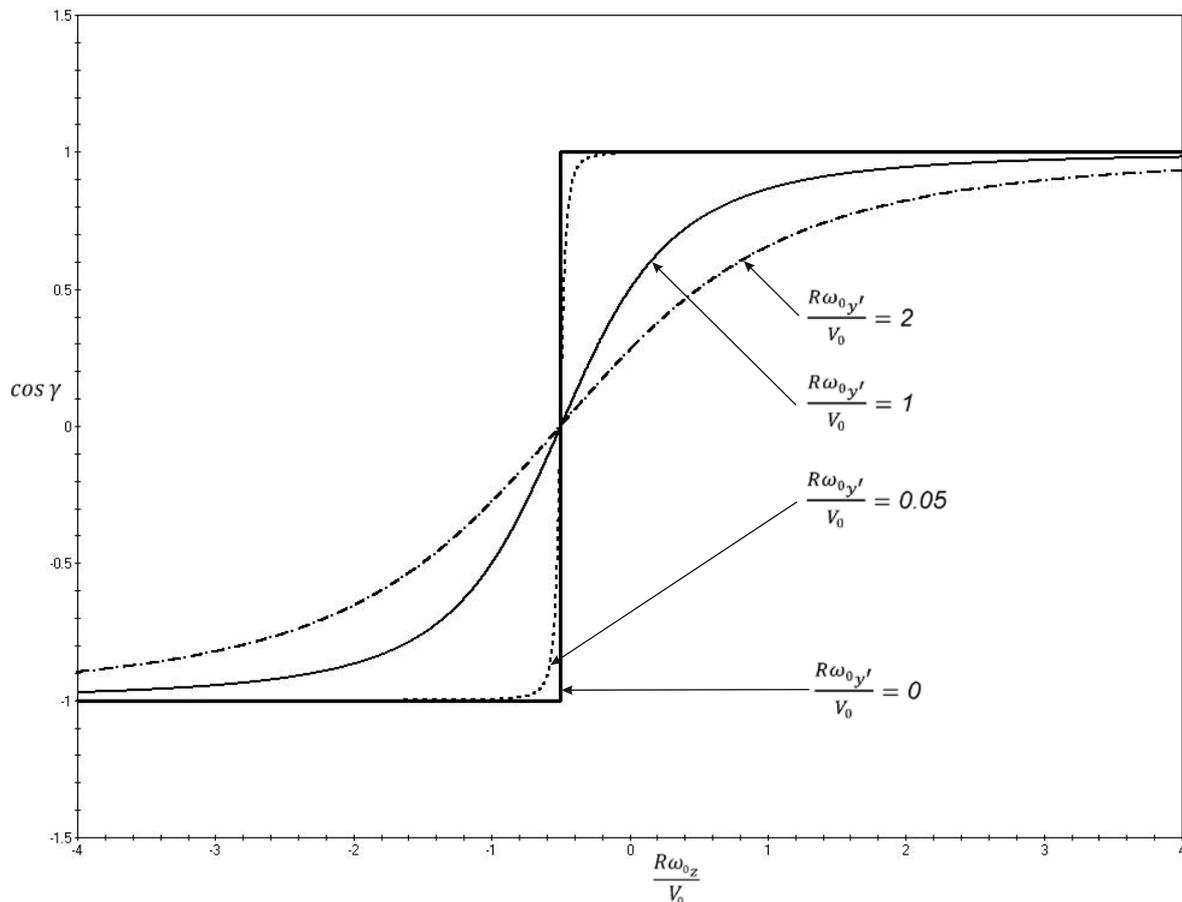


Рис 4.4. Зависимости параметра отброса $\cos \gamma$ от отношения «вращение/скорость» $\frac{R\omega_{0z}}{V_0}$, рассчитанные для некоторых величин отношения угловой скорости продольного вращения битка к поступательной скорости $\frac{R\omega_{0y'}}{V_0}$.

Задача 4.4

Как при соударении, происходящем на этапе естественного качения битка, для которого выполняется условие $R\omega_{0y'} = V_0$, угол отброса прицельного шара зависит от угла резки?

Ответ: При естественном качении битка выражение для $\cos \gamma$ принимает вид

$$\cos \gamma = \frac{\left(\sin \alpha + \frac{R\omega_{0z}}{V_0} \right)}{\left[\left(\sin \alpha + \frac{R\omega_{0z}}{V_0} \right)^2 + (\cos \alpha)^2 \right]^{1/2}},$$

а угол отброса определяется по формуле $\varepsilon = \arctg (\mu_{bb} \cos \gamma)$. На рисунке 4.4 представлен вид зависимости $\cos \gamma$ при естественном качении и угле резки 30° . Хотя эта зависимость и имеет участок быстрого изменения значения $\cos \gamma$ в районе $V_{cpy} = 0$, изменение все же не такое резкое, как при меньших отношениях $\left| \frac{R\omega_{0y'}}{V_0} \right|$.

Выполнить абсолютно плоский удар на практике невозможно. Величина $\omega_{0y'}$ всегда будет отличаться от нуля (пусть и крайне незначительно). Аналогично, и величина $V_{cpy} = V_0 \sin \alpha + R\omega_{0z}$ тоже никогда не будет равна нулю. (Если выразиться математически более строго, то вероятность выполнения абсолютно плоского удара равна нулю. Это не значит, что такое случайное событие никогда не наступит, но вероятность его все же будет нулевой. Прим. пер.). Этот факт побуждает задаться вопросом – как малые отклонения $\omega_{0y'}$ и V_{cpy} от нуля влияют на угол отброса прицельного шара? Ответ заключается в том, что при близости этих значений к нулю единичный вектор \widehat{e}_\perp становится очень чувствительным к изменениям вращения шара. Он бесконтрольно поворачивается в пространстве даже при маленьких вариациях $\omega_{0y'}$ и V_{cpy} . Действительно, направление вектора \widehat{e}_\perp определяется значением $\cos \gamma$. Если обратиться к соотношению, выражающему $\cos \gamma$ (см. задачу 4.2; прим. пер.), то нетрудно заметить, что в рассматриваемом случае и числитель и знаменатель будут близки к нулю, а их отношение не будет устойчиво стремиться к определенному пределу. В силу этого, величина $\cos \gamma$ может варьироваться от -1 до $+1$, а скорость отброса – меняться в пределах от $-\mu_{bb}V_{bx}$ до $+\mu_{bb}V_{bx}$. Если обратиться к рисунку 4.4, то можно увидеть, что при малых значениях $\omega_{0y'}$ наклон зависимости $\cos \gamma$ становится очень крутым, что отражает чувствительность отброса прицельного шара к боковому вращению битка. Чувствительность отброса к изменению продольного вращения битка можно оценить величиной производной параметра $\cos \gamma$ по другому отношению скоростей $\frac{R\omega_{0y'}}{V_0}$.

Задача 4.5

Какова чувствительность отброса прицельного шара по отношению к продольному и боковому вращению битка?

Ответ: Для оценки чувствительности отброса удобно использовать следующие отношения «вращение/скорость»: $J_{0z} = \frac{R\omega_{0z}}{V_0}$ и $J_{0y} = \frac{R\omega_{0y}}{V_0}$. Чувствительность показателя отброса $\cos \gamma$ характеризуется производными

$$\frac{d \cos \gamma}{d J_{0y}} = \frac{-(\sin \alpha + J_{0z}) J_{0y} (\cos \alpha)^2}{\left[(\sin \alpha + J_{0z})^2 + (J_{0y} \cos \alpha)^2 \right]^{3/2}},$$

$$\frac{d \cos \gamma}{d J_{0z}} = \frac{(J_{0y} \cos \alpha)^2}{\left[(\sin \alpha + J_{0z})^2 + (J_{0y} \cos \alpha)^2 \right]^{3/2}}.$$

Когда величина J_{0y} мала, вместо последнего равенства можно использовать приближенную, но более простую связь:

$$\frac{d \cos \gamma}{d J_{0z}} \approx \frac{(J_{0y} \cos \alpha)^2}{|\sin \alpha + J_{0z}|^3}.$$

Отсюда видно – почему наклон зависимости $\cos \gamma$ на рисунке 4.4 становится практически вертикальным, когда отношение J_{0z} проходит через точку, в которой величина V_{cp_y} близка к нулю. При этом знаменатель последнего соотношения стремится к нулю.

В качестве объединенной меры чувствительности показателя отброса к боковому и продольному вращению битка можно использовать следующую величину:

$$F(\mathbf{J}_0) = \sqrt{\left(\frac{d \cos \gamma}{d J_{0y}} \right)^2 + \left(\frac{d \cos \gamma}{d J_{0z}} \right)^2}.$$

(Здесь через \mathbf{J}_0 обозначен вектор с двумя компонентами: J_{0y} и J_{0z} . Прим. пер.). При тех значениях \mathbf{J}_0 , которые соответствуют малым величинам $F(\mathbf{J}_0)$, значительно расширяются границы ошибок и неточностей, которые может допустить игрок при выполнении удара (например, ошибок попадания кием в нужную точку битка) и оценке своих предстоящих действий (например, при оценке необходимой компенсации ожидаемого отброса прицельного шара). Диапазоны больших значений $F(\mathbf{J}_0)$ соответствуют большим изменениям отброса при маленьких вариациях вращения битка; игроку следует избегать применения таких вращений, которые характерны для указанной области $F(\mathbf{J}_0)$. Линии равных значений $F(\mathbf{J}_0)$ в функции компонент J_{0y} и J_{0z} показаны на рисунке 4.5; результаты, представленные здесь графически, были получены при таком же угле резки, который был применен в расчетах для рисунка 4.4 – угле резки в половину шара ($\alpha = 30^\circ$). Можно заметить, что области с наименьшими значениями меры чувствительности $F(\mathbf{J}_0)$

соответствуют малым величинам J_{0y} (характерным, например, для плоского удара) и сильным боковым вращениям $|J_{0z}|$. Области повышенной чувствительности расположены там, где $V_{cp_y} = 0$, то есть при этом $J_{0z} = -\sin \alpha = -\frac{1}{2}$. Области наибольших значений меры чувствительности располагаются вблизи точки $V_{cp_y} = 0$, $J_{0y} = 0$; увеличенный вид этой зоны изображен отдельно в правой нижней части рисунка 4.5. Чувствительность угла отброса в этой зоне становится огромной. Есть какая-то доля иронии в том, что комбинация вращений, которая приводит к наименьшим отбросам прицельного шара, соответствует наибольшей чувствительности, а комбинация вращений, обеспечивающая наибольшие отбросы – наименьшей чувствительности.

Ясное представление о чувствительности можно использовать при грамотном тактическом построении игры: лучше избегать большой неопределенности в угле отброса прицельного шара, отказавшись от определенных вращений битка. Иными словами, из своего технического арсенала следует исключить плоские удары с прямым боковым вращением, так как сопутствующий эффект отброса может поставить под сомнение успешность Ваших действий. От неопределенности отброса можно сознательно уйти, если позаботиться о том, чтобы числитель или знаменатель (или и тот и другой вместе) выражения для $\cos \gamma$ в момент соударения шаров значительно отличался от нуля. В частности, не следует наносить удары с таким нижним вращением, которое за счет трения о сукно полностью исчерпается к моменту соударения. Помимо этого, следует сознательно уходить от ситуаций $V_{cp_y} \approx 0$ – пусть отброс будет и не нулевым, зато он будет предсказуемым.

Следует отметить, что представленная выше рекомендация вступает в противоречие с тем, что пропагандируют некоторые игроки, тренеры и бильярдные теоретики. Их аргументация основана на том, что минимизация величины $|V_{cp_y}|$ обеспечивает и минимум отброса прицельного шара. По рисунку 4.5 можно видеть, что сказанное верно только в тех случаях, когда абсолютная величина $|\omega_{0y'}|$ отличается от нуля и велика по сравнению с $|V_{cp_y}|$. На практике для некоторых типов ударов бывает проще «уклониться» от комбинаций вращения, при которых $V_{cp_y} \approx 0$, намеренно придавая битку ощутимые вращения и компенсируя ожидаемый отброс за счет сдвига точки соударения шаров. Применение такого подхода может оказаться предпочтительнее нанесения плоского удара, которого вроде бы требует позиционная необходимость. Некоторые случаи использования подобных компенсаций будут обсуждаться в задачах, представленных ниже. Приведем еще один пример, когда использование плоского удара может приводить к непредсказуемым последствиям. Речь идет о встречающемся в игре случайном явлении, называемом **занос** (*автор приводит несколько терминов на английском языке, используемых на практике для обозначения этого явления – skid, cling, kick; прим. пер.*). Занос наступает, когда на поверхностях шаров в точке их соударения оказывается небольшое количество бильярдного мела или грязи, что приводит к резкому увеличению коэффициента трения. Когда такое случается, величина отброса при $V_{cp_y} \neq 0$ (*а, как обсуждалось выше, на практике так всегда и бывает; прим. пер.*) становится непрогнозируемой.

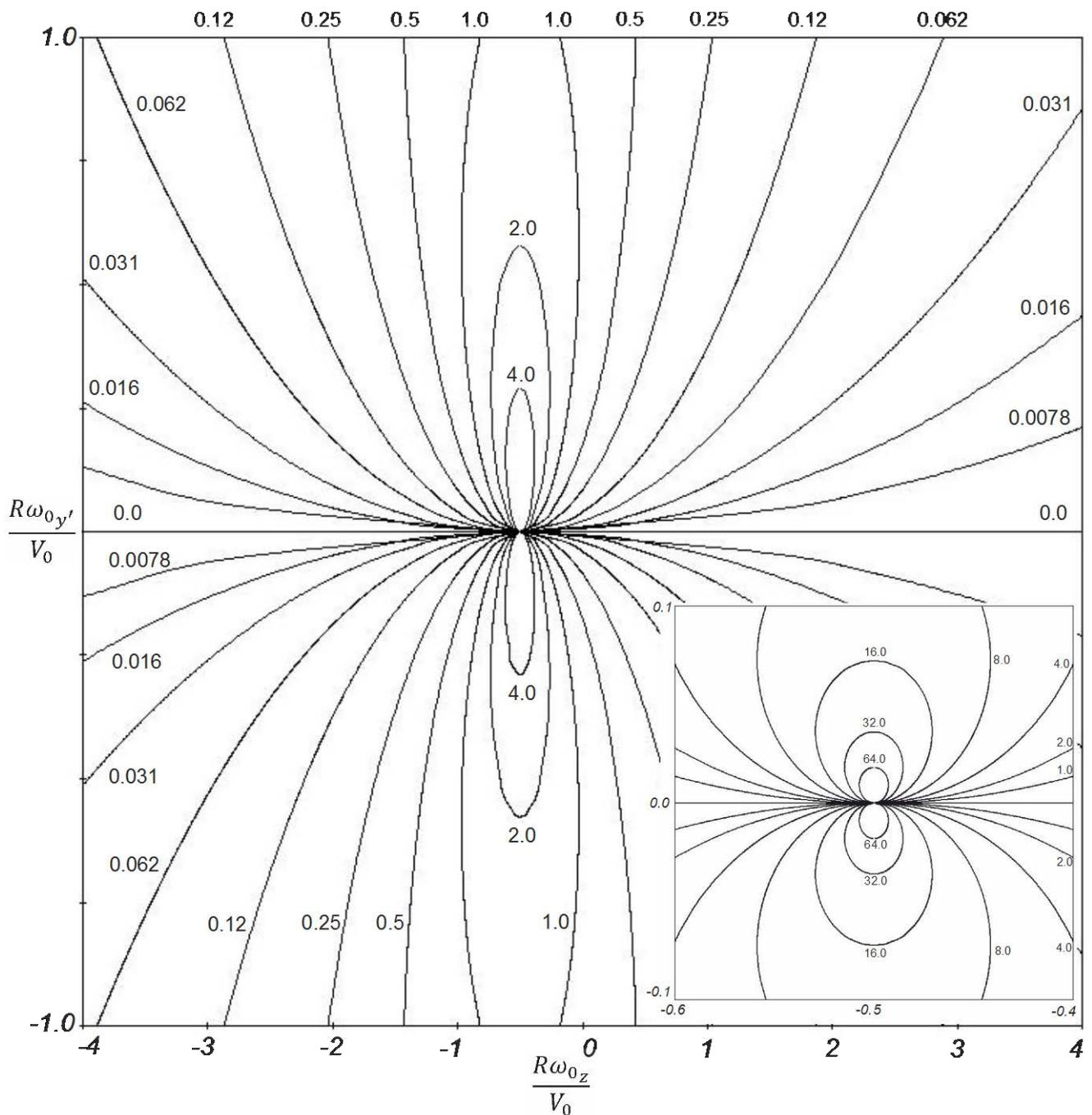


Рис 4.5. Линии равных значений меры чувствительности $F(\mathbf{J}_0)$ показателя отброса прицельного шара $\cos \gamma$ в функции отношений «вращение/скорость» $J_{0z} = \frac{R\omega_{0z}}{V_0}$ и $J_{0y} = \frac{R\omega_{0y'}}{V_0}$. В правом нижнем углу представлен увеличенный вид области $J_{0y} = 0$ и $V_{cp,y} = 0$.

(Уместно сказать несколько слов о применимости выше приведенных рекомендаций автора при игре в Пирамиду. В отличие от Пула и Снукера, для большинства разновидностей пирамидных игр допускается атака лузы битком. Иными словами, попавший в лузу биток (который часто называют «своеком») является «легальным» шаром, не только увеличивающим набранные очки, но и зачастую дающим дальнейшие позиционные выгоды. Одним из самых «понятных» игрокам ударов, приводящих к попаданию битка в лузу, является плоский удар.

Точнее, речь идет о частично плоском ударе, при котором биток в момент соударения с прицельным шаром не имеет продольного вращения – верхнего и нижнего. Благодаря этому, сразу же после соударения биток движется не по параболе, а по прямой линии. Это свойство траектории и используется для легкого и однозначного отыскания необходимой точки соударения шаров. Зная положение этой точки, игроку остается лишь попасть в нее и обеспечить отсутствие продольного вращения у битка. Такие удары настолько распространены в Пирамиде, что получили отдельное название – «свояки в отскок». Однако, в подавляющем большинстве случаев бильярдистов заботит лишь факт попадания битка в лузу, а что происходит при этом с прицельным шаром – для них дело десятое. Если прицельный шар пойдет удачно, то – хорошо, а нет – так и ладно! Нельзя не отметить очевидную ущербность такого подхода. Действительно, осознанное применение боковых вращений, приводящих к контролируемому отбросу прицельного шара, можно и нужно направить на извлечение позиционных преимуществ. Это может быть как перемещение прицельного шара в желаемую область стола, так и «подбой» прочих шаров на игровой поверхности. В общем, на этом пути можно приоткрыть немало дополнительных «лазеек» для разнообразного и по-настоящему умного ведения позиционной игры. Прим. пер.).

Задача 4.6

Как угол отброса прицельного шара зависит от угла резки для случая соударения на этапе естественного качения (или в случае обратного естественного вращения) битка без бокового вращения ($\omega_{0z} = 0$)?

(Обратным естественным вращением – Reverse Natural Roll (RNR) – автор называет продольное вращение битка с угловой скоростью, равной по величине угловой скорости естественного качения, но имеющей отрицательный знак. Конечно же, при этом речь идет не о качении шара, а о таком моменте его движения, когда выполняется равенство $R\omega_{0y'} = -V_0$. Прим. пер.).

Ответ: При отсутствии бокового вращения выражение для $\cos \gamma$, представленное в задаче 4.4, трансформируется к следующему виду:

$$\cos \gamma = \frac{\sin \alpha}{[(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2]^{1/2}} = \sin \alpha .$$

Соответственно, угол отброса можно выразить так: $\varepsilon = \arctg(\mu_{bb} \cos \gamma) = \arctg(\mu_{bb} \sin \alpha)$, откуда видно, что ε зависит только от угла резки α . Отброс равен нулю при прямом ударе ($\alpha = 0$) и повышается до максимального значения при очень тонких резках ($\alpha \approx \frac{\pi}{2}$). Отклонение точки соударения шаров от центра прицельного шара определяется следующим образом: $b_{bb} = R \sin \alpha$. (Для того чтобы проще «почувствовать» это отклонение, полезно представить себе, что удар по прицельному шару наносит не биток, а кий. Ввиду того, что удаление точки контакта от поверхности стола составляет R , точка воображаемого удара отклонена от центра шара лишь по горизонтали. Прим. пер.). В случае естественного качения битка без бокового вращения это позволяет получить простое геометрическое толкование показателя отброса $\cos \gamma = \frac{b_{bb}}{R}$ для любых углов резки.

Опираясь на изложенное выше, можно предложить следующий подход для корректирования отброса прицельного шара после соударения с естественно катящимся битком, не имеющим бокового вращения. 1. Согласно процедуре, указанной в задаче 1.6, определяется коэффициент трения между шарами μ_{bb} . Для конкретного комплекта бильярдных шаров это предстоит сделать лишь один раз. 2. Для интересующего удара оценивается расстояние D между прицельным шаром и лузой, в которую его следует направить. Соответствующий этому расстоянию максимальный возможный отброс составит $\mu_{bb} D$. 3. Находятся оценки отклонения точки соударения шаров от центра прицельного шара b_{bb} и отношения $\frac{b_{bb}}{R}$. 4. Определяется величина s , равная произведению $\mu_{bb} D$ на $\frac{b_{bb}}{R}$. 5. Находится воображаемая точка, смещенная вдоль лузного створа на расстояние s от его центра; смещение направлено в сторону, противоположную ожидаемому отбросу прицельного шара относительно центральной линии соударения. Найденная точка используется в качестве ориентира для прицельного шара без учета его предстоящего отброса.

Чтобы проиллюстрировать применение предложенного выше подхода, представим, что коэффициент трения, определенный согласно задаче 1.6, равен $\mu_{bb} = 4/72$. Пусть расстояние от прицельного шара до лузы составляет $D = 36"$. Вычислим для такого удара максимальный возможный отброс: $(4/72) \cdot 36" = 2"$. (Рассматриваемые величины дальности до лузы и максимального отброса составляют примерно половину от типичных величин, характерных для реальной игры). Предположим, что биток расположен так, что для атаки лузы нужен удар с малой левой резкой. Пусть отклонение точки соударения шаров (без учета эффекта отброса) при этом ударе равно $\frac{b_{bb}}{R} = \frac{1}{4}$. Значит, величина смещения составит $s = \frac{1}{4} \cdot 2" = \frac{1}{2}"$, а в качестве скорректированной точки прицела нужно будет принять точку, смещенную вправо от середины створа лузы (*если смотреть со стороны игрового поля; прим. пер.*) на половину дюйма. Эта же точка прицела будет получена, если вместо состояния естественного качения битка без бокового вращения будет рассмотрен случай соударения, при котором биток обладает обратным естественным вращением. После обретения некоторого практического опыта, можно получать оценки, подобные рассмотренной, очень быстро и на подсознательном уровне. Если при соударении биток имеет верхнее вращение, но при этом не находится в стадии естественного качения, можно получить оценки, основываясь на полученных выше результатах. Смещение скорректированной точки прицела будет располагаться где-то между максимальным смещением 2", соответствующим плоскому удару, и найденным выше значением 0.5" при качении битка. Опытные игроки знают, что если «имеешь дело с липкими шарами», то лучше взять резку чуть «тоньше», чем это кажется на первый взгляд. (*В отечественном бильярде в таких случаях часто говорят, что «лучше перерезать, чем не дорезать».* Автор же приводит любопытную рифмованную бильярдную поговорку – «Cut 'em Thin To Win». В вольном переводе это могло бы звучать так: «Режь тоньше – выиграешь больше». Прим. пер.). Представленный выше подход позволяет определить – насколько для типичных ударов реальная резка должна быть «тоньше».

Приданное битку боковое вращение также требует учета при практическом использовании предложенного выше подхода. Один из путей учета основан на

априорной оценке показателя отброса $\cos \gamma$ с помощью предугадывания вращения битка в момент соударения шаров. Развитию таких навыков может помочь тренировка ударов с верхним, нижним и боковым вращениями, а также плоских ударов, при которой в качестве битка используется полосатый шар. Общее представление должно основываться на том, что смещенная точка прицела будет всегда сдвинута от центра лузы на расстояние, меньшее вычисленной максимальной величины $\mu_{bb} D$. Следует понимать, что любые ошибки, допущенные при оценке $\cos \gamma$, при меньших значениях коэффициента трения μ_{bb} приведут к меньшим отклонениям реальной траектории прицельного шара от ожидаемой траектории. Использование же в игре «липких» шаров может сильно изменять реальную картину по сравнению со спрогнозированной. Одной из проблем, с которой сталкиваются игроки на турнирах, является необходимость корректирования при сменах столов оценки μ_{bb} , полученной для одного из комплекта шаров.

Задача 4.7

Какое угловое вращение ω_b приобретает прицельный шар за счет действия силы трения $F_{\perp}(t)$ во время соударения?

Ответ: Угловое ускорение подчиняется уравнению $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{I} \dot{\omega}$. Интегрируя его по времени контакта, получим:

$$\begin{aligned} \omega_b &= \frac{-R}{I} \int_0^t \hat{\mathbf{i}} \times F_{\perp}(t') dt' = \frac{-R\mu_{bb}}{I} \hat{\mathbf{i}} \times (\cos \gamma \hat{\mathbf{j}} + \sin \gamma \hat{\mathbf{k}}) \int_0^t F_x(t') dt' = \\ &= \frac{-5\mu_{bb}V_{bx}}{2R} (-\sin \gamma \hat{\mathbf{j}} + \cos \gamma \hat{\mathbf{k}}). \end{aligned}$$

Задача 4.8

Какова связь между углом наклона оси вращения прицельного шара, перешедшего к естественному качению, и углом его отброса (если для простоты не учитывать влияния вертикальной составляющей трения при соударении)?

Ответ: Ввиду того, что вращение прицельного шара и его отброс создаются одной и той же силой трения, величины угловой скорости и угла отброса тесно связаны между собой. Сразу же после контакта с битком прицельный шар приобретает поступательную скорость и угловую скорость вращения, которые выражаются следующими зависимостями (справедливыми при условии, что вертикальная составляющая вращения прицельного шара, создаваемая силой трения при соударении, не принимается в расчет):

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_b &= V_{bx} \hat{\mathbf{i}} + V_{by} \hat{\mathbf{j}} = V_{bx} \hat{\mathbf{i}} + \mu_{bb} \cos \gamma V_{bx} \hat{\mathbf{j}} = V_b \hat{\mathbf{e}}_b, \\ \omega_b &= \omega_{bz} \hat{\mathbf{k}} = - \left(\frac{5\mu_{bb} \cos \gamma V_{bx}}{2R} \right) \hat{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Угол отброса ε определяется соотношением $\tan \varepsilon = \mu_{bb} \cos \gamma$. После того, как прицельный шар перейдет к естественному качению, его скорости будут равны:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{bNR} &= \frac{5}{7} V_b \hat{\mathbf{e}}_b, \\ \omega_{bNR} &= \omega_b + \frac{5V_b}{2R} \hat{\mathbf{e}}_{b\perp}, \end{aligned}$$

где единичный вектор $\hat{\mathbf{e}}_{b\perp} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{e}}_b$ располагается в горизонтальной плоскости и направлен перпендикулярно вектору поступательной скорости прицельного шара. Угол

наклона оси вращения при естественном качении β определяется через компоненты вектора угловой скорости. Выразим его:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\omega_z}{\omega_y} = -\frac{5V_{by}}{2V_{bNR}} = -\frac{7 \operatorname{tg} \varepsilon}{2\sqrt{1+(\operatorname{tg} \varepsilon)^2}} = -\frac{7}{2} \sin \varepsilon .$$

Для малых углов отброса, имеющих место на практике, последнее соотношение можно заменить приближенным равенством

$$\beta \approx -\frac{7}{2} \varepsilon \approx -\frac{7}{2} \mu_{bb} \cos \gamma .$$

Отсюда видно, что наклон оси вращения естественно катящегося прицельного шара по величине приблизительно в три с половиной раза больше угла отброса. Помимо этого, можно считать, что указанные углы линейно зависят от коэффициента трения между шарами. Реальный наклон оси вращения проще всего увидеть на полосатом шаре, если смотреть на него сзади и обращать внимание на неизменный наклон его экватора вращения. Связь между наклоном оси вращения и экватором вращения показана на рисунке 4.6. Понимание этой взаимозависимости может служить игроку в качестве дополнительной обратной связи для прогнозирования необходимой компенсации отброса шара при ударах на резке.

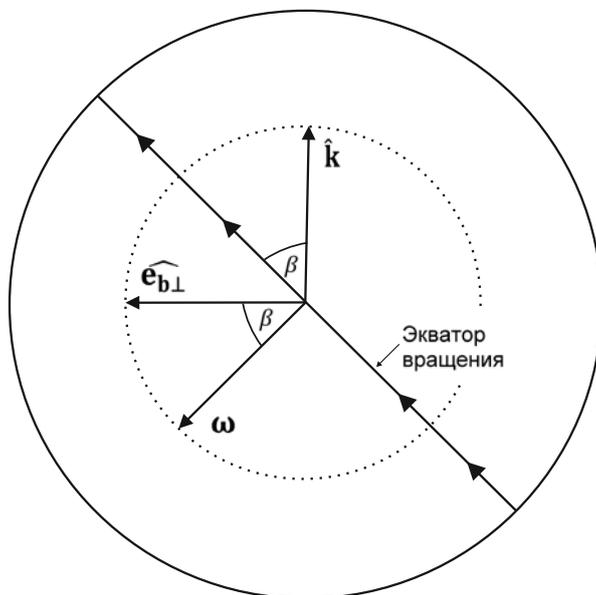


Рис 4.6. На виде сзади естественно катящегося прицельного шара показана связь между наклоном оси вращения и экватором вращения. Угол наклона β приблизительно в три с половиной раза больше угла отброса прицельного шара.

В задаче 4.7 было найдено выражение для угловой скорости прицельного шара, создаваемой силой трения при соударении. При этом по умолчанию предполагалось, что эта сила является единственной, влияющей на вращение шара. На самом же деле, это не совсем так. В силу того, что при соударении возникает горизонтальная компонента углового ускорения, одновременно с трением между шарами проявляет себя и трение между шаром и сукном. Покажем, что влияние трения о сукно настолько незначительно, что им можно пренебрегать. Типичное время контакта шаров составляет $t = 0.0001$ с, а обычная скорость прицельного шара равна $V_{b_x} = 100$ in/c. Средняя сила воздействия на шар выражается зависимостью $F_{avg} = MV_{b_x}/t$, а сила трения скольжения о сукно равна $F_s = \mu_s Mg$.

Значит, отношение этих сил представляется в виде $F_s/F_{avg} = \mu_s gt/V_{bx}$. Полагая коэффициент трения скольжения равным $\mu_s = 0.1$, найдем интересующее нас отношение $F_s/F_{avg} = 0.000386$. Имея такую оценку, можно заключить, что при соударении трение между шарами играет доминирующую роль.

Несколько сложнее учесть то, что при соударении вертикальная составляющая силы трения придает шару вертикальное ускорение. Если ускорение направлено вниз, то ему препятствует поверхность стола. В иных случаях, когда сила трения направлена вверх, ей противодействует вес шара. Однако, он не в состоянии воспрепятствовать появлению вертикального ускорения. В силу этого, когда шар находится на поверхности стола, и на него действует суммарная отрицательная вертикальная сила $(F_{\perp z} - Mg)$, направленная вниз, в течение времени контакта вертикального ускорения нет. Когда же сила $(F_{\perp z} - Mg)$ направлена вверх, шар приобретает ускорение в этом же направлении. Если величина Mg незначительна по сравнению с силой $F_{\perp z}$, то максимальная вертикальная скорость прицельного шара сразу же после соударения будет примерно равна максимальной скорости горизонтального отброса. При этом максимальный угол отрыва шара от поверхности стола будет равен максимальному углу его отброса. Отношение гравитационной силы $F_{grav} = Mg$, направленной вниз, к средней силе $F_{avg} = MV_{bx}/t$, действующей на шар, равно $F_{grav}/F_{avg} = gt/V_{bx}$. Для типичного удара, рассмотренного выше, это отношение составит $F_{grav}/F_{avg} = 0.000386$. Такая оценка свидетельствует о том, что силы трения при соударении шаров доминируют и над гравитационными силами.

Задача 4.9

Рассмотрим случай прямого попадания (без резки) битка, имеющего нижнее вращение, в прицельный шар. Действием гравитационной силы при соударении будем пренебрегать. Пусть поступательная скорость битка в момент соударения равна $V_{bx} = 36$ in/c, а коэффициент трения между шарами принимает значение, найденное в задаче 1.6, то есть $\mu_{bb} = 4/72$. На какую высоту от стола оторвется прицельный шар, и насколько далеко от своего начального местоположения он опустится на сукно?

Ответ: Найдем вертикальную составляющую скорости прицельного шара: $V_{bz} = \mu_{bb} \sin \gamma V_{bx}$. При прямом соударении с нижним вращением битка $\sin \gamma = +1$, и сила трения, действующая на прицельный шар, направлена вверх. $V_{bz} = (4/72) \cdot 36 = 2$ in/c. Определим высоту подъема шара над поверхностью стола $z = V_{bz}t - 1/2gt^2 = (2)t - 1/2(386)t^2$. Когда высота максимальна, выполняется условие $\frac{dz}{dt} = 0$. Вычислим эту производную, приравняем ее к нулю и выразим время, прошедшее до момента подъема на максимальную высоту $t_{max} = V_{bz}/g = \mu_{bb}V_{bx}/g$, линейно зависящее от коэффициента трения и скорости битка (силы удара). В результате получим $t_{max} = V_{bz}/g = 2/386 = 0.00518$ с. За это время шар достигнет высоты $z_{max} = V_{bz}t_{max} - \frac{1}{2}gt_{max}^2 = \frac{V_{bz}^2}{2g} = \frac{\mu_{bb}^2 V_{bx}^2}{2g} = \left(\frac{2}{386}\right) = 0.00518$ in. Максимальная высота пропорциональна квадрату коэффициента трения и квадрату скорости битка. Шар вернется на поверхность стола за время, равное $2t_{max}$. За такое

время шар, находящийся в полете, пройдет горизонтальное расстояние $x = V_{bx}(2t_{max}) = \frac{2\mu_{bb} V_{bx}^2}{g} = 36(2)(2/386) = 0.373$ in. Горизонтальное расстояние пропорционально коэффициенту трения и квадрату скорости битка. Ввиду того, что время, проведенное шаром вне поверхности стола, крайне мало, а расстояния, пройденные при этом шаром, невелики, эффектом отрыва шара от стола можно пренебрегать.

Отметим одно важное следствие из задачи 4.9. Когда при соударении прицельный шар приобретает вертикальный импульс силы, биток вдавливаясь в поверхность стола. Если бы при контакте биток имел верхнее вращение, то именно он отрывался бы от игровой поверхности, а прицельный шар прижимался бы к ней. В любом случае, при соударении шаров вертикальный импульс силы не сохраняется, так как противодействие вдавливанию шара амортизируется столом. Если бы бильярдный стол был включен в рассматриваемую динамическую систему, то при анализе можно было пользоваться законом сохранения импульса. В этом смысле, отсутствие сохранения импульса силы является артефактом при формальном разделении «системы» и «окружения» в этом простом анализе.

Задача 4.10

Используя выражения для поступательной скорости и вращения, полученные в задачах 4.2 – 4.7, требуется определить общую кинетическую энергию до и после соударения шаров, а также величину $E_{inelastic}$. (Для простоты следует не учитывать скорость и вращение, создаваемые вертикальной составляющей силы трения).

Решение: Общая кинетическая энергия до соударения равна

$$T_0 = T_0(trans) + T_0(rot) = \frac{1}{2}M|\mathbf{V}_0|^2 + \frac{1}{2}I|\boldsymbol{\omega}_0|^2,$$

а сразу же после соударения:

$$T_f = \frac{1}{2}M(|\mathbf{V}_c|^2 + |\mathbf{V}_b|^2) + \frac{1}{2}I(|\boldsymbol{\omega}_c|^2 + |\boldsymbol{\omega}_b|^2).$$

Выпишем все соотношения для скоростей, выраженных через V_{by} :

$$V_{by} = \mu_{bb} \cos \gamma V_{bx} = \mu_{bb} \cos \gamma V_0 \cos \alpha,$$

$$\mathbf{V}_b = V_0 \cos \alpha \hat{\mathbf{i}} + V_{by} \hat{\mathbf{j}},$$

$$\mathbf{V}_c = (V_0 \sin \alpha - V_{by}) \hat{\mathbf{j}},$$

$$\boldsymbol{\omega}_b = -\frac{5V_{by}}{2R} \hat{\mathbf{k}},$$

$$\boldsymbol{\omega}_c = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_b = -\omega_{0y'} \sin \alpha \hat{\mathbf{i}} + \omega_{0y'} \cos \alpha \hat{\mathbf{j}} + \left(\omega_{0z} - \frac{5V_{by}}{2R}\right) \hat{\mathbf{k}}.$$

Подстановка в соотношение для кинетической энергии дает:

$$T_f = T_0 + M \left[-V_{by} (V_0 \sin \alpha + R\omega_{0z}) + \frac{7}{2}V_{by}^2 \right] = T_0 + M \left(-V_{by} V_{cp_y} + \frac{7}{2}V_{by}^2 \right).$$

Потери энергии за счет неабсолютной упругости соударения:

$$E_{inelastic} = T_0 - T_f = M \left[V_{by} (V_0 \sin \alpha + R\omega_{0z}) - \frac{7}{2}V_{by}^2 \right] = M \left(V_{by} V_{cp_y} - \frac{7}{2}V_{by}^2 \right).$$

Трение вносит поправку в преобразование энергии между состояниями поступательного перемещения и вращения, но только в виде потерь. Это вполне согласуется с рассмотренным выше влиянием трения скольжения шара по сукну на его

кинетическую энергию. В приведенных выражениях величина V_{cpy} представляет собой горизонтальную тангенциальную компоненту скорости точки контакта шаров, находящейся на поверхности битка, в момент соударения. Величина V_{cpy} определяет направление действия силы трения на прицельный шар, поэтому она всегда имеет такой же знак, как и величина V_{by} . Следовательно, величина $M V_{by} V_{cpy}$, входящая в соотношение для потерь энергии за счет трения и пропорциональная коэффициенту μ_{bb} , всегда положительна. Вторая же величина $M \frac{7}{2} V_{by}^2$ пропорциональна квадрату μ_{bb} . Она всегда вносит в последнее соотношение вклад с отрицательным знаком и значительно меньше по значению, чем $M V_{by} V_{cpy}$.

Задача 4.11

Требуется определить зависимости величин $\Delta_{elastic}$, $\Delta_{inelastic}$ и Δ_{total} от V_{by} . Какие значения будут принимать эти величины при $V_{cpy} = 0$?

Ответ: Используя соотношение из задачи 4.10, получим

$$\Delta_{inelastic} = \frac{2}{M} E_{inelastic} = 2V_{by}V_{cpy} - 7V_{by}^2.$$

Обобщая подход, использованный при решении задачи 4.1, на случай произвольного вращения битка, найдем:

$$\begin{aligned} \Delta_{elastic} &= \frac{2}{5} R^2 (\boldsymbol{\omega}_c^T \boldsymbol{\omega}_c + \boldsymbol{\omega}_b^T \boldsymbol{\omega}_b - \boldsymbol{\omega}_0^T \boldsymbol{\omega}_0) = \\ &= \frac{2}{5} R^2 \left[\boldsymbol{\omega}_c^T \boldsymbol{\omega}_c + \boldsymbol{\omega}_b^T \boldsymbol{\omega}_b - (\boldsymbol{\omega}_c - \boldsymbol{\omega}_b)^T (\boldsymbol{\omega}_c - \boldsymbol{\omega}_b) \right] = \frac{4}{5} R^2 \boldsymbol{\omega}_c^T \boldsymbol{\omega}_b = - \\ &\quad 2R\omega_{0z}V_{by} + 5V_{by}^2. \end{aligned}$$

$$\Delta_{total} = \Delta_{elastic} + \Delta_{inelastic} = 2V_{by}V_0 \sin \alpha - 2V_{by}^2.$$

Отсюда видно, что величина Δ_{total} является квадратичной функцией коэффициента трения между шарами μ_{bb} . В особом случае $V_{cpy} = 0$ составляющая скорости V_{by} равна нулю, а потери Δ_{total} отсутствуют, что свидетельствует о том, что после соударения шары расходятся под прямым углом.

Начальная скорость битка сразу же после соударения определяется равенством $\mathbf{V}_c = (V_0 \sin \alpha - V_{by}) \hat{\mathbf{j}}$. На величину этой скорости влияет отброс прицельного шара, но направление \mathbf{V}_c никак не зависит от любых сил трения. Если после соударения биток не имеет вращения относительно горизонтальной оси (при этом он может иметь боковое вращение, но не продольное), то начальное направление скорости не изменяется от действия трения при дальнейшем движении. Продвижение битка замедляется до момента начала естественного качения, а направление его поступательной скорости остается неизменным. В этом смысле, траектория битка после соударения меньше зависит от коэффициента трения μ_{bb} , чем траектория прицельного шара. Это свойство используется при получении предварительных оценок и выполнении точных ударов с плоским соударением шаров.

Упражнение 4.1

Проведите эксперименты при выполнении плоских ударов. Начните с положения шаров, находящихся на расстоянии нескольких дюймов друг от друга. Наносите удар точно по центру битка, и добивайтесь того, чтобы его траектория после соударения была прямолинейной (*без изгиба сразу же после того, как шары начнут расходиться; прим. пер.*). Пометьте местоположение точки опоры битка в момент соударения, а также положения точек касания шарами бортов. Измерьте угол, под которым разошлись шары, и оцените – насколько он близок к прямому углу. Для того чтобы установить меру влияния потерь Δ_{total} на угол расхождения шаров, перейдите к выполнению плоского удара с приданием битку бокового вращения. Регулярно практикуясь, можно научиться выполнять плоский удар очень точно. Такие удары очень часто применяются в разновидности пуловской игры «Девятка».

Задача 4.12

Определите общий момент количества движения относительно точки, в которой при контакте находится центр битка, непосредственно перед соударением шаров и сразу после него. Сохраняется ли этот момент? (Пренебрегайте вертикальными составляющими поступательных скоростей шаров, порождаемыми вертикальными компонентами сил трения).

Ответ: Есть две составляющие момента количества движения. Одна из них связана с вращениями шаров относительно их центров $\mathbf{L}^{spin} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$, а вторая – с перемещениями центров масс относительно рассматриваемой точки $\mathbf{L}^{orbit} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Здесь \mathbf{p} – вектор количества движения, компоненты которого равны произведению массы на соответствующую компоненту вектора поступательной скорости. Выразим указанные составляющие в момент перед соударением шаров:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0^{orbit} &= \mathbf{r}_0(t) \times \mathbf{p}_0(t) = (\mathbf{V}_0 t) \times (M\mathbf{V}_0) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{L}_0^{spin} &= \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_0, \\ \mathbf{L}_0 &= \mathbf{L}_0^{orbit} + \mathbf{L}_0^{spin} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_0. \end{aligned}$$

После соударения соотношения для рассматриваемых составляющих таковы:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_b^{orbit} &= \mathbf{r}_b(t) \times \mathbf{p}_b(t) = (2R \hat{\mathbf{i}} + \mathbf{V}_b t) \times (M\mathbf{V}_b) = 2MR (\hat{\mathbf{i}} \times \mathbf{V}_b) = \\ &= 2MR \left[\hat{\mathbf{i}} \times (V_{bx} \hat{\mathbf{i}} + V_{by} \hat{\mathbf{j}}) \right] = 2MRV_{by} \hat{\mathbf{k}} = -2I\omega_{bz} \hat{\mathbf{k}}, \\ \mathbf{L}_b^{spin} &= \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_b, \\ \mathbf{L}_c^{orbit} &= \mathbf{r}_c(t) \times \mathbf{p}_c(t) = (\mathbf{V}_b t) \times (M\mathbf{V}_b) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{L}_c^{spin} &= \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_c = \mathbf{I} (\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_b), \\ \mathbf{L} &= \mathbf{L}_c^{orbit} + \mathbf{L}_c^{spin} + \mathbf{L}_b^{orbit} + \mathbf{L}_b^{spin} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_0 + 2I\omega_{by} \hat{\mathbf{j}}. \end{aligned}$$

Найдем изменение общего момента количества движения:

$$\mathbf{L} - \mathbf{L}_0 = 2I\omega_{by} \hat{\mathbf{j}}.$$

Изменение общего момента количества движения всегда равно нулю, за исключением горизонтальной компоненты, которая не изменяется только при $\omega_{by} = 0$. Эта компонента порождается действием вертикальной составляющей силы трения при соударении; она принимает нулевое значение только при $\omega_{0y} = 0$ (это условие выполняется при плоском соударении). Вертикальная составляющая общего момента

количества движения всегда сохраняется, так же как и горизонтальная компонента момента вокруг оси X ; возрастание момента L^{orbit} за счет отброса прицельного шара компенсируется таким же изменением величины L^{spin} . Такая компенсация для вертикальной составляющей невозможна, так как действию вертикальной составляющей силы трения препятствует неподвижная игровая поверхность. При получении представленных выше соотношений мы пренебрегли вертикальными составляющими поступательного ускорения шаров. Но даже если бы мы включили их в рассмотрение для отрывающегося от сукна шара (как это было сделано в задаче 4.9), то для вжимаемого в поверхность стола шара соответствующий вклад был бы ликвидирован противодействием стола. На самом деле, как это уже обсуждалось выше, ввиду того, что вертикальные компоненты момента количества поступательного движения при соударении не сохраняются, не приходится ожидать того, что компоненты, связанные с вращением и создаваемые теми же самыми силами трения, будут сохраняться в рамках проводимого упрощенного анализа.

В нескольких рассмотренных выше задачах обсуждались аспекты проявления эффекта отброса прицельного шара. Этот отброс влияет на траектории шаров после их соударения. Дальнейшее перемещение шаров определяется как параметрами движения, приобретенными ими в результате контакта, так и действием силы трения скольжения между шарами и бильярдным сукном (некоторые аспекты проявления которого обсуждались в предыдущих разделах). Для того чтобы исследовать движение шаров со скольжением, порожденное соударением, а в конечном счете являющееся следствием удара, нанесенного кием по битку, скомбинируем результаты, полученные в этом разделе, с приведенными ранее результатами. Чтобы упростить анализ, в последующих обсуждениях эффект отброса прицельного шара чаще всего приниматься в расчет не будет. В большинстве случаев этот эффект можно было включить в рассмотрение, что привело бы к дополнительным трудностям анализа, но не дало бы существенного вклада в понимание смысла происходящего. Начнем с рассмотрения естественного качения битка после его соударения с прицельным шаром. Понимание этого элемента игры очень важно для тех, кто серьезно играет в Пул, Снукер и Карамболь. *(Ну и, конечно же, для игроков, специализирующихся в отечественном бильярде, такое понимание будет краеугольным. Прим. пер.).*

Задача 4.13

Как угол резки α влияет на угол отклонения θ траектории битка, достигающего естественного качения после соударения с прицельным шаром (без учета трения между шарами и при условии, что в момент соударения биток естественно катился)?

Ответ: Если при соударении между шарами не действует трение, то начальный угол отклонения битка от центральной линии соударения сразу же после контакта шаров будет равен $\frac{\pi}{2}$ (девяносто градусов). Используя единичные векторы \hat{i} и \hat{j} в системе координат (x', y') , определенной рисунком 4.2, выразим начальные поступательные скорости шаров сразу же после соударения:

$$\mathbf{V}_b = V_0 \cos \alpha (\cos \alpha \hat{i} - \sin \alpha \hat{j}),$$

$$\mathbf{V}_c = V_0 \sin \alpha (\sin \alpha \hat{i} + \cos \alpha \hat{j}).$$

Угол между векторами \mathbf{V}_b и \mathbf{V}_0 является углом резки α . Сразу же после соударения

прицельный шар не имеет угловой скорости, поэтому до достижения естественного качения его поступательная скорость изменяется только по величине, но не по направлению. Следовательно, скорость естественного качения прицельного шара будет равна

$$\mathbf{V}_{b, NR} = \frac{5}{7} \mathbf{V}_b = \frac{5}{7} V_0 \cos \alpha (\cos \alpha \hat{\mathbf{i}}' - \sin \alpha \hat{\mathbf{j}}').$$

Несколько иные изменения происходят с битком, который естественно катился в момент соударения и имел угловую скорость, удовлетворяющую условию $V_0 = R\omega_{0y}$. При контакте с прицельным шаром эта скорость не изменилась. Ввиду наличия угловой скорости после соударения, возникает сила трения скольжения с единственной компонентой, направленной так же, как и вектор $\hat{\mathbf{i}}'$. Следовательно, скорость битка при его переходе к естественному качению можно выразить следующим образом:

$$\mathbf{V}_{c, NR} = \frac{5}{7} \mathbf{V}_c + \frac{2}{7} V_0 \hat{\mathbf{i}}' = \left(\frac{5}{7} V_0 (\sin \alpha)^2 + \frac{2}{7} V_0 \right) \hat{\mathbf{i}}' + \left(\frac{5}{7} V_0 \sin \alpha \cos \alpha \right) \hat{\mathbf{j}}'.$$

А отсюда легко находится угол отклонения θ прямой линии, по которой естественно катится биток, от направления начальной скорости \mathbf{V}_0 :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{(\sin \alpha)^2 + \frac{2}{5}}.$$

Сразу же после соударения траектория битка имеет параболический вид, как это и было определено при решении задачи 2.3. Сила трения ускоряет биток до достижения фазы естественного качения, после чего он катится по прямой линии без ускорения.

Задача 4.14

Требуется показать, что $\operatorname{tg}(\alpha + \theta) = \frac{7}{2} \operatorname{tg} \alpha$.

Решение: Используем тригонометрическое равенство, выражающее тангенс суммы двух углов через их тангенсы:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \theta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \theta}.$$

Подставим в него выражения тангенса угла через его синус и косинус: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$,

а также последнее соотношение, полученное в задаче 4.13: $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{(\sin \alpha)^2 + \frac{2}{5}}$. В

результате, получим:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \theta) = \frac{\sin \alpha \left[(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 + \frac{2}{5} \right]}{\frac{2}{5} \cos \alpha} = \frac{7}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Задача 4.15

При каком угле резки α угол отклонения траектории битка θ максимален?

Ответ: Представим последнее равенство в несколько ином виде:

$$\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{7}{2} \operatorname{tg} \alpha \right) - \alpha.$$

Продифференцировав обе части этого соотношения по α , получим:

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{14}{4 + 45(\sin \alpha)^2} - 1.$$

Приравняем эту производную к нулю и выразим из полученной связи искомый угол:

$$\alpha_{\theta_{max}} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = 0.49088 = \frac{\pi}{6.3999} = 28.125^\circ.$$

Заметим, что резка с найденным углом $\alpha_{\theta_{max}}$ чуть толще резки в половину шара, при которой $\alpha = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$.

Задача 4.16

Каков максимальный угол отклонения траектории битка θ_{max} , естественно катящегося в момент соударения?

Ответ: Подставим найденную величину $\alpha_{\theta_{max}}$ в соотношение для θ . В результате, получим:

$$\theta_{max} = \arctg\left(\frac{7}{2} \operatorname{tg} \alpha_{\theta_{max}}\right) - \alpha_{\theta_{max}} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha_{\theta_{max}} = 0.58903 = \frac{\pi}{5.3335} = 33.749^\circ.$$

Весьма полезно знать, что, в силу естественного качения битка, достичь угла отклонения, близкого к найденному, гораздо проще, чем точно выдержать сам необходимый угол резки. Это будет показано в следующей задаче. (Здесь автор делает акцент на том, что угол отклонения определяется именно естественным характером качения битка в момент соударения. Пожалуй, более информативной была бы ссылка на «пологий» характер зависимости θ от α в окрестности значения $\alpha = \alpha_{\theta_{max}}$, обусловленный естественным качением. Прим. пер.).

Задача 4.17

Как изменится (по сравнению с величиной θ_{max} ; прим. пер.) угол отклонения траектории битка, если угол резки будет отличаться от величины $\alpha_{\theta_{max}}$, найденной в задаче 4.15, на два градуса?

Ответ: Если угол резки меньше величины $\alpha_{\theta_{max}}$ на два градуса, то

$$\theta = \arctg\left(\frac{7}{2} \operatorname{tg} 26.125^\circ\right) - 26.125^\circ = 33.651^\circ.$$

Это значение отличается от величины θ_{max} , найденной в задаче 4.16, на 0.098° . Если же α превышает $\alpha_{\theta_{max}}$ на два градуса, то

$$\theta = \arctg\left(\frac{7}{2} \operatorname{tg} 30.125^\circ\right) - 30.125^\circ = 33.67^\circ.$$

В этом случае разница с θ_{max} составляет 0.089° . В обоих случаях угол отклонения траектории битка гораздо устойчивей к малым вариациям, чем угол резки, связанный с прицельным шаром. (Здесь приведены результаты расчетов по данным, точно следующим из сформулированной постановки задачи. Автор же использовал округленные до целых величин значения угла резки. Суть полученного вывода от этой небольшой разницы никак не меняется. Прим. пер.).

Задача 4.18

Какова связь между углом резки и углом отклонения траектории битка, контактирующего с прицельным шаром на этапе естественного качения, при малых значениях α ?

Ответ: Известно, что при малых углах, измеряемых в радианах, с неплохой точностью можно использовать приближенное равенство $tg x \approx x$. Применяя его к соотношению $tg(\alpha + \theta) = \frac{7}{2} tg \alpha$, полученному в задаче 4.14, будем иметь:

$$\theta \approx \frac{5}{2} \alpha .$$

Эту связь можно с пользой применять при анализе движения битка на этапе естественного качения, наступившего после соударения с прицельным шаром на малой резке (*т.е. после почти прямого соударения или соударения «в лоб»*; прим. пер.). Посредством нанесения удара кием трудно добиться верхних вращений, превосходящих по величине угловую скорость качения $\omega_0 = V_0/R$. При таком ударе высока вероятность возникновения кикса (см. задачу 1.7). Однако, после соударения с прицельным шаром на малой резке, эффект избыточности вращения проявляется весьма явно. После таких ударов угол θ не настолько больше α , как представлено в последнем приближенном равенстве.

Задача 4.19

При каком угле резки α прицельному шару передается половина кинетической энергии естественно катящегося битка? Каков при этом угол отклонения траектории битка θ , и чему равны конечные кинетические энергии шаров?

Ответ: Когда биток катится, выполняется условие $V_0 = R\omega_0$, а его кинетическую энергию можно представить в виде:

$$T = \frac{1}{2} MV_0^2 + \frac{1}{2} I\omega_0^2 = \frac{7}{10} MV_0^2 .$$

Сразу же после соударения энергия прицельного шара равна

$$T_b = \frac{1}{2} MV_b^2 = \frac{1}{2} MV_0^2 (\cos \alpha)^2 .$$

Скомбинируем последние два равенства с помощью условия передачи половины кинетической энергии $T_b = \frac{1}{2} T$. Упрощая полученное соотношение, выразим из него искомый угол резки $\alpha_{(\frac{1}{2}T)}$:

$$\alpha_{(\frac{1}{2}T)} = \arccos \left(\sqrt{\frac{7}{10}} \right) = 0.57964 = \frac{\pi}{5.4199} = 33.211^\circ .$$

Этому углу резки соответствует угол отклонения траектории битка:

$$\theta_{(\frac{1}{2}T)} = \arctg \left(\frac{7}{2} tg \alpha_{(\frac{1}{2}T)} \right) - \alpha_{(\frac{1}{2}T)} = 2\alpha_{(\frac{1}{2}T)} - \alpha_{(\frac{1}{2}T)} = \alpha_{(\frac{1}{2}T)} .$$

При получении последнего соотношения было использовано тригонометрическое равенство $\frac{7}{2} tg \alpha_{(\frac{1}{2}T)} = tg 2\alpha_{(\frac{1}{2}T)}$, справедливость которого можно проверить его подстановкой в использованное при решении задачи 4.14 равенство, выражающее тангенс суммы двух углов. Таким образом, когда углы резки и отклонения траектории битка равны, биток и прицельный шар непосредственно после соударения обладают одинаковой кинетической энергией. Заметим, что соответствующий такому равенству угол резки $\alpha_{(\frac{1}{2}T)}$ чуть больше угла резки в половину шара (*иными словами, чтобы при*

ударе кием «попасть» в такую резку, нужно целиться чуть тоньше, чем в половину шара; прим. пер.).

Выразим конечные кинетические энергии шаров, пользуясь соотношениями для $V_{b,NR}$ и $V_{c,NR}$ из задачи 4.13:

$$T_{b,NR} = \frac{1}{2} M \mathbf{V}_{b,NR}^T \mathbf{V}_{b,NR} = T_0 \left[\frac{25}{49} (\cos \alpha)^2 \right],$$

$$T_{c,NR} = \frac{1}{2} M \mathbf{V}_{c,NR}^T \mathbf{V}_{c,NR} = T_0 \left[\frac{25}{49} (\sin \alpha)^4 + \frac{20}{49} (\sin \alpha)^2 + \frac{4}{49} + \frac{25}{49} (\sin \alpha)^4 (\cos \alpha)^2 \right],$$

где T_0 – поступательная энергия бита непосредственно перед соударением. Эти соотношения можно использовать при любом значении угла α . Подставляя сюда величины $\left(\cos \alpha_{\left(\frac{1}{2}T\right)} \right)^2 = \frac{7}{10}$ и $\left(\sin \alpha_{\left(\frac{1}{2}T\right)} \right)^2 = \frac{3}{10}$, найдем следующую связь, действительную для угла $\alpha_{\left(\frac{1}{2}T\right)}$:

$$T_{b,NR} = T_{c,NR} = \frac{5}{14} T_0.$$

Отсюда видно, что энергии шаров равны друг другу не только сразу же после соударения, но и по достижении ими фазы естественного качения. Расстояние, которое пройдут естественно катящиеся шары (в предположении, что не будет соударений с прочими шарами и бортами стола), пропорционально величине конечной кинетической энергии. Этот вывод важен для оценки конечных местоположений шаров не только после соударения под углом резки $\alpha_{\left(\frac{1}{2}T\right)}$, но и для прикидок при других

значениях α . (Это – очень полезный вывод для предварительного анализа отыгрыша в Пирамиде, когда важно точно контролировать конечные положения обоих контактирующих шаров. Прим. пер.).

Зависимость угла отклонения траектории бита θ_{NR} от угла резки α , найденная в задачах 4.13 и 4.14, представлена на рисунке 4.7. На ней отмечены: точка, соответствующая резке в половину шара $(\alpha_{halfball}, \theta_{NR}) = (0.52360, 0.58766)$; точка максимального отклонения траектории бита $(\alpha_{\theta_{NR}max}, \theta_{NRmax}) = (0.49088, 0.58903)$, полученная в 4.15; точка равного деления энергии $(\alpha_{\frac{1}{2}T_0}, \theta_{NR}) = (0.57964, 0.57964)$, найденная в задаче 4.19. Там же изображена кривая, представляющая производную $\frac{d\theta_{NR}}{d\alpha}$ (см. задачу 4.15). На представленном интервале изменения угла резки α эта функция является монотонной (если же рассматривать полный интервал возможных углов α , включающий как положительные, так и отрицательные значения, то функция будет четной и симметричной относительно значения $\alpha = 0$). При $\alpha = 0$ производная $\frac{d\theta_{NR}}{d\alpha}$ принимает значение 2.5, после чего уменьшается до нуля при росте α от нуля до $\alpha_{\theta_{max}}$, а затем асимптотически стремится к величине $-\frac{5}{7}$ при приближении α к $\frac{\pi}{2}$. На графике производной $\frac{d\theta_{NR}}{d\alpha}$ есть еще одна точка, представляющая самостоятельный интерес – в ней величина $\frac{d\theta_{NR}}{d\alpha}$ равна единице, а угол резки $\alpha_{cr} = \arcsin \left(\sqrt{\frac{1}{15}} \right) = 0.26116 = 14.963^\circ$. Для углов резки, меньших чем

α_{cr} , выполняется условие $\left| \frac{d\theta_{NR}}{d\alpha} \right| > 1$. Соответственно, при этом траектория катящегося битка чувствительней к вариациям угла резки, чем траектория прицельного шара. При $\alpha > \alpha_{cr}$ производная уже удовлетворяет неравенству $\left| \frac{d\theta_{NR}}{d\alpha} \right| < 1$. А это значит, что в области таких углов α траектория битка менее чувствительна к изменениям угла резки по сравнению с траекторией прицельного шара. В практическом смысле, меньшая чувствительность траектории позволяет игроку легче управлять соответствующим шаром, что очень важно в точной позиционной игре и при выполнении отыгрыша.

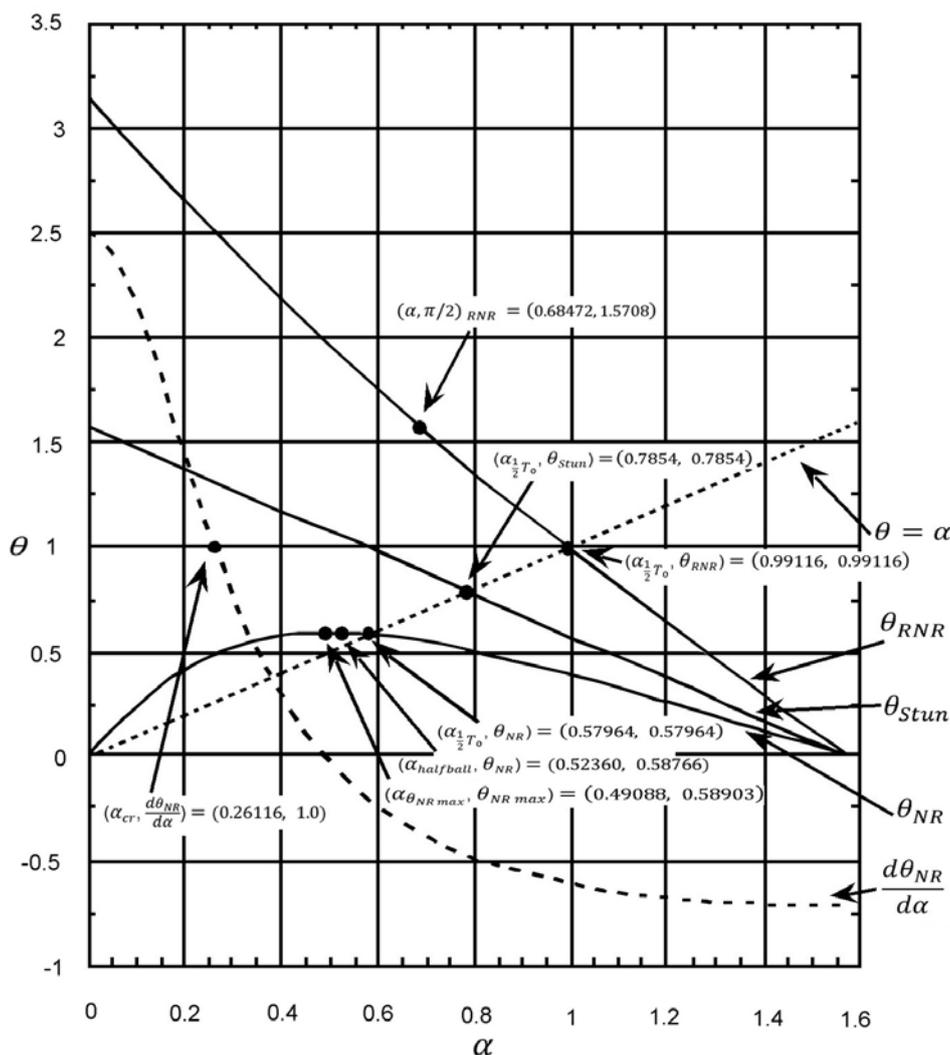


Рис 4.7. Зависимость угла отклонения траектории естественно катящегося битка от угла резки. Кривая θ_{NR} соответствует качению битка перед соударением, линия θ_{Stun} – отсутствию вращения у битка при контакте шаров. Зависимость θ_{RNR} построена для случая, когда при соударении биток обладает обратным естественным вращением. Прямая линия $\theta = \alpha$ отражает факт равенства кинетических энергий обоих шаров, после контакта достигших фазы естественного качения. Штриховой линией показана зависимость производной $\frac{d\theta_{NR}}{d\alpha}$. На построенных зависимостях отмечены отдельные важные точки.

Задача 4.20

При каком угле резки α прицельному шару за счет контакта передается половина кинетической энергии, если в момент соударения биток не обладает вращением (т.е., если соударение является плоским)? Каковы при этом конечные кинетические энергии шаров? (При решении не следует учитывать трение между шарами).

Ответ: С учетом соотношений из задачи 4.13, кинетические энергии шаров сразу же после соударения можно представить в виде:

$$T_b = \frac{1}{2} M \mathbf{V}_b^T \mathbf{V}_b = \frac{1}{2} M V_0^2 (\cos \alpha)^2,$$

$$T_c = \frac{1}{2} M \mathbf{V}_c^T \mathbf{V}_c = \frac{1}{2} M V_0^2 (\sin \alpha)^2.$$

Приравнивая их, получим:

$$(\operatorname{tg} \alpha)^2 = 1, \alpha = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4} = 45^\circ.$$

Каждый шар после соударения имеет начальную энергию, равную $\frac{1}{2} T_0$. Ввиду того, что при контакте шары не имеют вращения, их дальнейшее движение происходит с замедлением поступательной скорости до величины $\frac{5}{7} V_0$ и набором угловой скорости естественного качения. При наступлении качения кинетическая энергия каждого шара равна $\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{5}{7}\right)^2 T_0 = \frac{25}{98} T_0$. Обращаясь для сравнения к результатам, полученным в 4.19, отметим: если после плоского соударения энергии шаров равны, то соответствующая резка тоньше, а конечные энергии шаров меньше, чем в аналогичном случае соударения при качении битка. Точка $(\alpha_{\frac{1}{2}T_0}, \theta_{Stun}) = (0.7854, 0.7854)$, соответствующая равным энергиям шаров после плоского соударения, показана на рисунке 4.7 на прямой линии θ_{Stun} , проходящей через точки $(0, \frac{\pi}{2})$ и $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

Задача 4.21

Как угол отклонения траектории битка θ зависит от его угловой скорости в момент соударения ω_{0y} и угла резки α ?

Ответ: Обобщая результат, полученный в задаче 4.13, представим поступательную скорость битка в момент начала естественного качения в функции

отношения «вращение/скорость» $J_{0y} = \frac{R\omega_{0y}}{V_0}$:

$$\mathbf{V}_{c,NR} = \frac{5}{7} \mathbf{V}_c + \frac{2}{7} V_0 J_{0y} \hat{\mathbf{i}} = \frac{5}{7} V_0 \left((\sin \alpha)^2 + \frac{2}{5} J_{0y} \right) \hat{\mathbf{i}} + \frac{5}{7} V_0 (\sin \alpha \cos \alpha) \hat{\mathbf{j}}.$$

Найдем тангенс угла отклонения траектории θ как отношение компонент вектора скорости $\mathbf{V}_{c,NR}$:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{(\sin \alpha)^2 + \frac{2}{5} J_{0y}}.$$

С использованием тригонометрического равенства, приведенного в 4.14, последнее соотношение можно записать в виде:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \theta) = \left(\frac{1 + \frac{2}{5} J_{0y}}{\frac{2}{5} J_{0y}} \right) \operatorname{tg} \alpha.$$

При естественном качении выполняется условие $J_{0y} = +1$, а это значит, что полученные выше зависимости согласуются с соотношениями из задач 4.13, 4.14.

Задача 4.22

В задачах 4.19, 4.20 было показано, что при некоторой величине угла резки кинетические энергии бита и прицельного шара равны сразу же после соударения, а также по достижении шарами состояния естественного качения. При каких условиях такое равенство энергий будет иметь место? (При решении следует полагать, что бокового вращения нет, т.е. $\omega_z = 0$).

Ответ: Когда биток передает прицельному шару половину своей кинетической энергии, выполняется равенство $T_b = \frac{1}{2}T_0$. Это происходит при условии

$$(\cos \alpha)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}J_{0y}^2\right),$$

где $J_{0y} = \frac{R\omega_{0y}}{V_0}$ – отношение «вращение/скорость». Для равенства кинетических энергий естественно катящихся шаров $T_{b,NR} = T_{c,NR}$ должно выполняться условие

$$(\cos \alpha_{NR})^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}J_{0y}\right).$$

Следовательно, одновременное выполнение условий $T_b = \frac{1}{2}T_0$ и $T_{b,NR} = T_{c,NR}$ при одном и том же угле $\alpha = \alpha_{NR}$ возможно, если справедливо равенство

$$J_{0y}(J_{0y} - 1) = 0.$$

Это уравнение имеет лишь два решения: $J_{0y} = 1$, соответствующее естественному качению, рассмотренному в задаче 4.19; $J_{0y} = 0$, соответствующее плоскому соударению, обсуждавшемуся в задаче 4.20. При прочих же отношениях «вращение/скорость» один угол α будет обеспечивать выполнение условия $T_b = \frac{1}{2}T_0$, а другой $\alpha_{NR} \neq \alpha$ – условия $T_{b,NR} = T_{c,NR}$.

Задача 4.23

Какова связь между углом отклонения траектории бита θ и углом резки α для случая соударения, при котором биток обладает обратным естественным вращением $V_0 = -R\omega_{0y}$?

Ответ: При обратном естественном вращении выполняется условие $J_{0y} = -1$. Подставляя это значение в последнее соотношение, полученное в задаче 4.21, будем иметь:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \theta) = -\frac{3}{2}\operatorname{tg} \alpha.$$

Отрицательный знак указывает на то, что углы $(\alpha + \theta)$ и α находятся в разных квадрантах. Если α находится в первом квадранте: $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то угол $(\alpha + \theta)$ располагается во втором квадранте: $\frac{\pi}{2} \leq (\alpha + \theta) \leq \pi$. В таком случае из последнего соотношения можно получить:

$$\theta = \operatorname{arctg} \left(-\frac{3}{2} \operatorname{tg} \alpha \right) - \alpha - \pi .$$

Отсюда видно, что при малых углах α справедливо приближенное равенство

$$\theta \approx \pi - \frac{5}{2} \alpha .$$

Это соотношение напоминает связь $\theta \approx \frac{5}{2} \alpha$, полученную в задаче 4.18 для случая естественного качения. Однако здесь, при ударе с нижним вращением, траектория битка после соударения близка не к прямому направлению, определяемому его поступательной скоростью перед соударением, а к реверсному направлению. Так же как и в случае удара с верхним вращением, угловые скорости, превышающие по абсолютной величине скорость обратного естественного вращения, трудно достижимы из-за риска кикса. Тем не менее, на практике они встречаются – после соударений шаров и в результате выполнения ударов «массе».

Задача 4.24

В задачах 4.19 и 4.20 было показано, что для случаев $J_{0y} = 1$ и $J_{0y} = 0$ кинетическая энергия в результате соударения делится поровну между битком и прицельным шаром при условии равенства угла резки и угла отклонения траектории битка. Требуется показать, что это условие справедливо для произвольной величины J_{0y} . Чему равен угол резки, обеспечивающий равенство кинетических энергий обоих шаров после соударения, при котором биток имеет обратное естественное вращение? Как этот угол соотносится с углом резки, найденным в 4.19 для случая естественного качения битка?

Ответ: Из решения задачи 4.22 следует, что биток и прицельный шар, достигающие после контакта состояния естественного качения, обладают одинаковой кинетической энергией, если выполняются условия:

$$\begin{aligned} (\cos \alpha)^2 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} J_{0y} \right), \\ (\sin \alpha)^2 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} J_{0y} \right). \end{aligned}$$

Подставим эти равенства в соотношение, устанавливающее связь между θ и α (см. задачу 4.21), и получим:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{(\sin \alpha)^2 + \frac{2}{5} J_{0y}} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{(\cos \alpha)^2} = \operatorname{tg} \alpha .$$

А это значит, что в общем случае справедливо равенство $\theta = \alpha$, когда кинетические энергии естественно катящихся битка и прицельного шара равны друг другу. Линия, изображающая указанное равенство углов, представлена на рисунке 4.7. Равенство $\theta = \alpha$ можно представить в виде:

$$\theta = \alpha = \operatorname{arcsin} \left(\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{5} J_{0y}} \right) .$$

В частности, при обратном естественном вращении $J_{0y} = -1$, и из последнего соотношения можно найти соответствующий угол резки:

$$\alpha_{\frac{1}{2}T,RNR} = \operatorname{arcsin} \left(\sqrt{\frac{7}{10}} \right) = 0.99116 = \frac{\pi}{3.1696} = 56.789^\circ .$$

Сравнивая это значение с решением задачи 4.19, можно заметить, что выполняется

равенство

$$\alpha_{\frac{1}{2}T,RNR} + \alpha_{\frac{1}{2}T,NR} = \frac{\pi}{2},$$

являющееся частным случаем соотношения

$$\alpha_{\frac{1}{2}T,J_{0y}} + \alpha_{\frac{1}{2}T,-J_{0y}} = \frac{\pi}{2},$$

вытекающего из связи

$$\left(\cos \alpha_{\frac{1}{2}T,J_{0y}}\right)^2 = \left(\sin \alpha_{\frac{1}{2}T,-J_{0y}}\right)^2.$$

Зависимость угла отклонения траектории от угла резки при условии, что биток в момент контакта имеет обратное естественное вращение, показана на рисунке 4.7. Величина θ_{RNR} варьируется от нуля при очень тонких резках до π при самых толстых резках. Такой характер изменения θ_{RNR} резко отличается от зависимости $\theta_{NR}(\alpha)$, принимающей значения от нуля до величины, чуть большей $\frac{\pi}{6}$. Ввиду того, что верхнее вращение при естественном качении и обратное естественное вращение являются экстремальными вращениями битка (за исключением случаев вращения после соударений с шарами и после применения ударов «массе»), область между графиками θ_{NR} и θ_{RNR} на рисунке 4.7 соответствует практически всем возможным ударам. К области между линиями θ_{Stun} и θ_{RNR} относятся удары с нижним вращением битка в момент соударения, а к области между линиями θ_{Stun} и θ_{NR} – удары с верхним вращением. Нетрудно заметить, что область, соответствующая ударам с нижним вращением битка, намного больше области, представляющей удары с верхним вращением. Это означает, что удары с нижним вращением предоставляют игроку гораздо больше возможностей для управления отраженным битком. С другой же стороны, это свидетельствует о том, что удары с верхним вращением менее чувствительны к вариациям угла резки или скоростей вращений. По рисунку 4.7 видно, что зависимость θ_{RNR} является почти прямой линией со средним наклоном примерно вдвое превышающим наклон линии θ_{Stun} . Ввиду того, что величину θ_{Stun} относительно нетрудно определить, то найти оценку значения θ_{RNR} можно просто увеличивая θ_{Stun} вдвое. Такая простая оценка всегда будет давать завышенные значения θ_{RNR} . Следующая задача продемонстрирует размер ошибки, получаемой при такой аппроксимации.

Задача 4.25

При каком угле резки α_{\perp} угол отклонения траектории является прямым $\left(\frac{\pi}{2}\right)$, если в момент соударения биток обладает обратным естественным вращением?

Ответ: Подставим значения углов, указанные при постановке задачи, в соотношение, устанавливающее связь между углами отклонения траектории и резки (см. задачу 4.23):

$$\operatorname{tg} \left(\alpha_{\perp} + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{3}{2} \operatorname{tg} \alpha_{\perp}.$$

Используя тригонометрическое равенство

$$\operatorname{tg} \left(\alpha_{\perp} + \frac{\pi}{2} \right) = - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_{\perp}},$$

найдем угол α_{\perp} :

$$\alpha_{\perp} = \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right) = 0.68472 = \frac{\pi}{4.5881} = 39.232^{\circ}.$$

Эта точка зависимости θ_{RNR} отмечена на рисунке 4.7. Если бы величину угла α_{\perp} мы не рассчитали, а оценили так, как было указано выше, то получили бы значение $\alpha_{\perp} = 45^{\circ}$. При этом ошибка оценки составила бы примерно 12%. Верная величина α_{\perp} находится примерно посередине между углом резки в половину шара и $\frac{\pi}{4}$.

Задача 4.26

Какое отношение «вращение/скорость» при заданном угле резки α не приводит к действию горизонтально направленных сил трения между шарами?

Ответ: Чтобы силы трения во время соударения не действовали, нужно чтобы поверхности шаров не скользили друг относительно друга. Скорость точки контакта, расположенной на поверхности битка, непосредственно перед соударением является суммой поступательной скорости \mathbf{V}_0 и скорости, порожденной вращением шара относительно вертикальной оси. Скорость точки контакта можно записать в виде:

$$\mathbf{V}_{cp} = V_0 \cos \alpha \hat{\mathbf{i}} + (V_0 \sin \alpha + R\omega_{0z}) \hat{\mathbf{j}} - R\omega_{0y} \cos \alpha \hat{\mathbf{k}} = V_{cp_x} \hat{\mathbf{i}} + V_{cp_y} \hat{\mathbf{j}} + V_{cp_z} \hat{\mathbf{k}}.$$

Горизонтально направленные силы трения не действуют, когда $V_{cp_y} = 0$. Значит, это будет иметь место при условии

$$J_{0z} = \frac{R\omega_{0z}}{V_0} = -\sin \alpha.$$

Задача 4.27

Какие точки контакта наклейки кия с битком при заданном угле резки α не приводят к действию горизонтально направленных сил трения между шарами? При решении следует использовать соотношения для начальных и конечных отношений «вращение/скорость» из задачи 3.6, а также условие $V_{cp_y} = 0$ из 4.26.

Ответ: Точки удара, обеспечивающие равные величины отношения «боковое вращение/скорость» сразу же после контакта наклейки с битком, располагаются на вертикальной линии, удовлетворяющей условию:

$$\sin \alpha = \frac{5y'_{tip}}{2R},$$

где y'_{tip} – горизонтальное смещение наклейки относительно центра битка. Заметим, что точка контакта с прицельным шаром удовлетворяет соотношению $y'_{cp} = -R \sin \alpha$. Комбинируя эти два условия, получим:

$$y'_{tip} = -\frac{2}{5} y'_{cp}.$$

Отрицательный знак здесь свидетельствует о том, что точка удара и точка, контактирующая с прицельным шаром, располагаются в разных полушариях. Заметим,

что в пределах возможных резок от нуля до $\frac{\pi}{2}$ этот результат согласуется с задачей 3.5 – «боковое естественное качение» наступает, если точка удара смещена вбок от центра битка на расстояние $\frac{2}{5}R$. Эта связь применима на практике для случаев, когда контакт шаров наступает почти сразу же после нанесения удара кием по битку, в силу чего трение между битком и сукном не успевает чувствительно изменить скорость шара.

Когда биток до контакта с прицельным шаром переходит к естественному качению, необходимые точки удара удовлетворяют условиям:

$$\sin \alpha = \frac{7}{2} \left(\frac{y'_{tip}}{z_{tip}} \right),$$

$$y'_{tip} = - \left(\frac{2y'_{tip}}{7R} \right) z_{tip}.$$

Для заданного угла резки α эти соотношения определяют прямую линию, проходящую через нижнюю точку битка $(0,0)$. Чтобы представить расположение точек на этой линии, обратимся к рисунку 4.8. Найдем необходимую точку удара, находящуюся на высоте $z_{tip} = \frac{7}{5}R$ и смещенную по горизонтали на величину $-\frac{2}{5}y'_{cp}$. После удара, нанесенного в эту точку, сразу же наступает естественное качение (см. задачу 3.5). Линия необходимых точек удара проведена через указанную точку $(-\frac{2}{5}y'_{cp}, \frac{7}{5}R)$ и нижнюю точку $(0,0)$. На этой линии также расположена и точка минимального отклонения от центра битка, находящаяся на пересечении с малой окружностью.

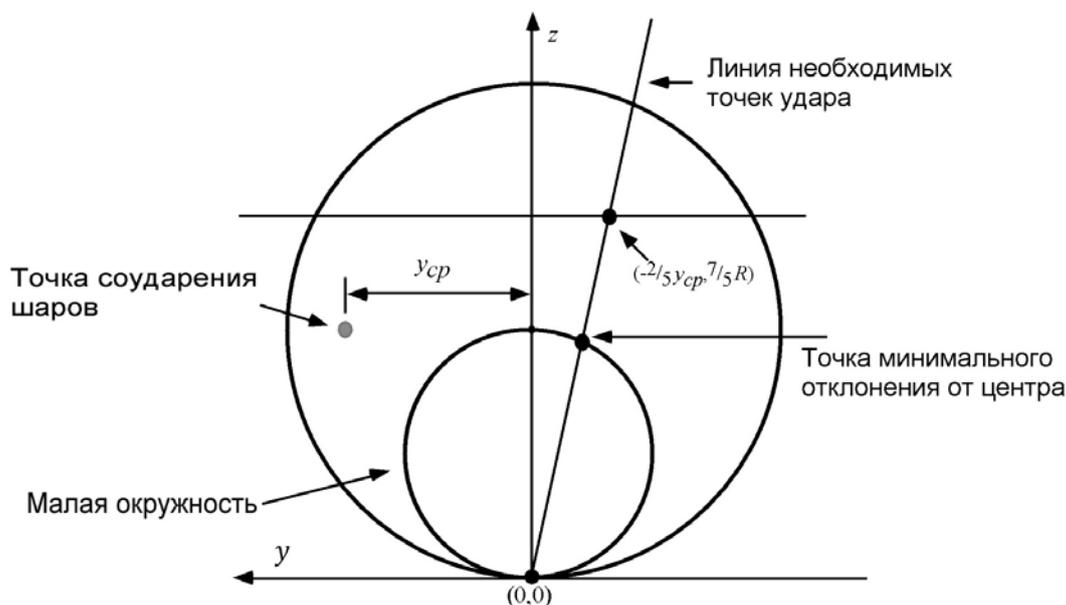


Рис 4.8. На заднем виде битка показана прямая линия точек удара, необходимого для отсутствия боковой составляющей трения между шарами при контакте, наступающем на этапе естественного качения битка. Положение точки соударения шаров зависит от выбранного угла резки и определяет наклон линии необходимых точек удара.